

2026 年全国二卷数学卷高考真题带答案带解析

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. $(1 - 3i)^2 = (\quad)$

选项： A. $-8 + 6i$ B. $-8 - 6i$ C. $8 + 6i$ D. $8 - 6i$

【解析】利用复数的乘法及完全平方公式展开：

$$(1 - 3i)^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times 3i + (3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i$$

【答案】 B

2. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = 1, |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\quad)$

选项： A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{4}$

【解析】将已知条件的两边分别平方得：

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3$$

两式相减得：

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - 3 = -2 \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$$

【答案】 C

3. 已知集合 $A = \{0, 1, 3, 6, 9\}$, $B = \{x \mid \sqrt{x} = x\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

选项： A. $\{0, 1\}$ B. $\{3, 6\}$ C. $\{0, 1, 9\}$ D. $\{0, 3, 9\}$

【解析】首先解集合 B 中的方程 $\sqrt{x} = x$ (需满足 $x \geq 0$):

$$x = x^2 \implies x(x - 1) = 0 \implies x = 0 \text{ 或 } x = 1$$

所以 $B = \{0, 1\}$ 。求交集得：

$$A \cap B = \{0, 1, 3, 6, 9\} \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}$$

【答案】 A

4. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 过点 $(1, 0)$ 和 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$, 则其渐近线方程为 ()

选项: A. $y = \pm 3\sqrt{2}x$ B. $y = \pm 4\sqrt{3}x$ C. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ D. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{6}x$

【解析】将点 $(1, 0)$ 代入双曲线方程得:

$$\frac{1}{a^2} - 0 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

将点 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ 代入双曲线方程得:

$$\frac{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2}{1} - \frac{(\frac{\sqrt{3}}{4})^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{5}{4} - \frac{3}{16b^2} = 1 \Rightarrow \frac{3}{16b^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 即:

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

【答案】 C

5. 棱台上下底面均为有一个内角为 60° 的菱形, 且上下底边长分别为 2 和 3, 该棱台的高为 $\sqrt{3}$, 则该棱台体积为 ()

选项: A. $\frac{19}{12}$ B. $\frac{19}{6}$ C. $\frac{19}{4}$ D. $\frac{19}{2}$

【解析】边长为 s 且夹角为 60° 的菱形面积公式为 $S = s^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}s^2$. 所以上底面面积 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2^2 = 2\sqrt{3}$, 下底面面积 $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. 计算中间项:

$$\sqrt{S_1 S_2} = \sqrt{2\sqrt{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

棱台的体积公式为 $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$. 代入高 $h = \sqrt{3}$ 得:

$$V = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \left(2\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3} \right) = \frac{1}{3} \times 3 \left(2 + \frac{9}{2} + 3 \right) = \frac{19}{2}$$

【答案】 D

6. 甲、乙、丙、丁等 8 人分成 A, B 两技术小组, 要求每组 4 人, 且甲乙必须在同一组, 丙丁不能在同一组, 共有多少分配方案 ()

选项: A. 10 B. 12 C. 16 D. 24

【解析】由于 A, B 两组是有标号的, 我们首先考虑将除甲乙丙丁外的其余 4 人进行分配. 甲、乙必须在同组, 丙、丁不能在同组, 因此共有两类可能: 第一类: 甲、乙都在 A 组. 此时 A 组还需要 2 人, B 组需要 4 人. 因为丙、丁不能同组, 所以丙、丁中必须有一个分在 A 组, 另一个分在 B 组: - 若丙在 A 组, 丁在 B 组: A 组已有 {甲, 乙, 丙}, 还需从剩下的 4 人中选 1 人, 有 $C_4^1 = 4$ 种; - 若丁在 A 组, 丙在 B 组: 同理有 $C_4^1 = 4$ 种. 共计 $4 + 4 = 8$ 种. 第二类: 甲、乙都在 B 组. 同理对称地有 8 种方案.

所以, 总的分配方案数为 $8 + 8 = 16$ 种.

【答案】 C

7. 已知 α 为第二象限角, 且 $3 \sin 2\alpha \cos \alpha = 8 \sin \alpha \cos 2\alpha$, 则 $\frac{1+\sin \alpha}{2-\cos \alpha} = (\quad)$

选项: A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{15}{8}$

【解析】利用倍角公式展开 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, 代入原式:

$$3(2 \sin \alpha \cos \alpha) \cos \alpha = 8 \sin \alpha \cos 2\alpha \implies 6 \sin \alpha \cos^2 \alpha = 8 \sin \alpha \cos 2\alpha$$

因为 α 为第二象限角, 所以 $\sin \alpha > 0$, 等边两同除以 $2 \sin \alpha$ 得:

$$3 \cos^2 \alpha = 4 \cos 2\alpha$$

代入二倍角余弦公式 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$:

$$3 \cos^2 \alpha = 4(2 \cos^2 \alpha - 1) \implies 5 \cos^2 \alpha = 4 \implies \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

在第二象限中, $\cos \alpha < 0$, 所以 $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ 。对应地, $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 。代入所求目标式:

$$\frac{1 + \sin \alpha}{2 - \cos \alpha} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}}{2 - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}}{\frac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{1}{2}$$

【答案】 C

8. 已知 $f(x)$ 为定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且 $f(x) + f(x-2) = 0$ 。当 $x \in [\frac{3}{2}, 3]$ 时, $f(x) = x^2 + ax + b$, 则 (\quad)

选项: A. $a = -2, b = -3$ B. $a = -2, b = 3$ C. $a = -4, b = -3$ D. $a = -4, b = 3$

【解析】由 $f(x) + f(x-2) = 0 \implies f(x) = -f(x-2) \implies f(x-2) = -f(x-4)$, 联立可得:

$$f(x) = f(x-4)$$

所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数。因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以有 $f(x-2) = f(2-x)$ 。由 $f(x-2) + f(x) = 0$ 得:

$$f(2-x) = -f(x) = f(2+x)$$

说明 $f(x)$ 关于直线 $x = 2$ 对称。在定义区间 $x \in [\frac{3}{2}, 3]$ 内, $f(x) = x^2 + ax + b$ 是二次函数, 其对称轴必为 $x = 2$ 。根据二次函数对称轴公式得:

$$-\frac{a}{2} = 2 \implies a = -4$$

另外, 由于偶函数且周期为 4:

$$f(3) = f(3-4) = f(-1) = f(1)$$

根据 $f(1) + f(1-2) = f(1) + f(-1) = 2f(1) = 0 \implies f(3) = f(1) = 0$ 。代入 $x = 3$ 到解析式中得:

$$f(3) = 3^2 - 4 \times 3 + b = 0 \implies -3 + b = 0 \implies b = 3$$

所以 $a = -4, b = 3$ 。

【答案】 D

二、多项选择题 (本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。)

9. 已知 $\odot O: x^2 + y^2 = 1$, $\odot A: x^2 + y^2 - 6x - 8y + k = 0$, 则 ()

选项:

A. 点 A 的坐标为 $(-3, -4)$

B. 当 $k = 9$ 时, $\odot A$ 与 x 轴相切

C. 当 $k = -11$ 时, $\odot A$ 与 $\odot O$ 相切

D. 当 $\odot O$ 与 $\odot A$ 相交时, 两交点所在直线的方程是 $6x + 8y - k - 2 = 0$

【解析】将圆 A 的方程标准化:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 - k$$

A 选项: 圆心 A 的坐标为 $(3, 4)$ 。A 错误; B 选项: 当 $\odot A$ 与 x 轴相切时, 半径 $R_A = |y_A| = 4 \Rightarrow R_A^2 = 16 \Rightarrow 25 - k = 16 \Rightarrow k = 9$ 。B 正确; C 选项: 当 $k = -11$ 时, $R_A^2 = 36 \Rightarrow R_A = 6$ 。圆 O 的半径 $R_O = 1$, 圆心距 $d = |OA| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 。因为 $|R_A - R_O| = |6 - 1| = 5 = d$, 故两圆内切 (相切的一种)。C 正确; D 选项: 两圆相交时, 公共弦所在直线方程为两圆方程直接相减:

$$(x^2 + y^2 - 1) - (x^2 + y^2 - 6x - 8y + k) = 0 \Rightarrow 6x + 8y - k - 1 = 0$$

D 错误。

【答案】B, C

10. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq 1, a_1 > 0, 2a_3 = a_2 + a_1$, 记前 n 项和为 S_n , 则 ()

选项:

A. $q = -\frac{1}{2}$

B. $S_n > \frac{2a_1}{3}$

C. $2S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$

D. $\sum_{k=1}^n S_k > \frac{2na_1}{3}$

【解析】A 选项: 由 $2a_3 = a_2 + a_1 \Rightarrow 2a_1q^2 = a_1q + a_1$, 因 $a_1 > 0$, 约去 a_1 得 $2q^2 - q - 1 = 0 \Rightarrow (2q+1)(q-1) = 0$ 。由 $q \neq 1$ 得 $q = -\frac{1}{2}$ 。A 正确; B 选项: 求出前 n 项和的表达式:

$$S_n = \frac{a_1(1 - (-\frac{1}{2})^n)}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

当 n 为偶数时, $(-\frac{1}{2})^n > 0 \Rightarrow S_n < \frac{2a_1}{3}$, B 错误; C 选项: 代入验证递推式不成立。C 错误; D 选项: 对前 n 项和求和:

$$\sum_{k=1}^n S_k = \frac{2a_1}{3} \sum_{k=1}^n \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right] = \frac{2a_1}{3} \left[n - \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right]$$

因为 $\sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k = -\frac{1}{3} [1 - (-\frac{1}{2})^n]$, 所以:

$$\sum_{k=1}^n S_k = \frac{2a_1}{3} \left[n + \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right) \right]$$

因为对任意 $n \geq 1$, 均有 $1 - (-\frac{1}{2})^n > 0$, 所以 $\sum_{k=1}^n S_k > \frac{2na_1}{3}$ 恒成立。D 正确。

【答案】A, D

11. 已知抛物线 $E: y^2 = 8x$, 斜率 k ($k > 0$) 的直线 l 过点 $(1, 0)$, $\triangle ABC$ 为等边三角形, A 在 y 轴上, B, C 在 E 上, 则 ()

选项:

A. 抛物线准线方程为 $x = -2$

B. l 与 y 轴交点为 $(0, -k)$

C. 若 l 与 E 相切于唯一一点 B , 则抛物线焦点在直线 AB 上

D. 当 $k = 2$ 时, $\triangle ABC$ 面积最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】A 选项: $y^2 = 2px \Rightarrow 2p = 8 \Rightarrow p = 4$, 准线方程为 $x = -\frac{p}{2} = -2$ 。A 正确; B 选项: 直线 l 过点 $(1, 0)$ 且斜率为 k , 方程为 $y = k(x - 1) = kx - k$, 与 y 轴的交点 (令 $x = 0$) 为 $(0, -k)$ 。B 正确; C 选项: 直线过点 $(1, 0)$, 该点在抛物线内部, 过内部点的直线不可能与抛物线相切。C 错误; D 选项: 当 $k = 2$ 时, BC 为定长弦, 无法取得面积最小值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。D 错误。

【答案】A, B

三、填空题 (本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。)

12. S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。若 $a_1 = -1, a_4 = 5$, 则 $S_6 =$ _____。

【解析】根据等差数列通项公式:

$$a_4 = a_1 + 3d \implies 5 = -1 + 3d \implies d = 2$$

求前 6 项和:

$$S_6 = \frac{6}{2}(2a_1 + 5d) = 3(2 \times (-1) + 10) = 24$$

【答案】 24

13. 若函数 $f(x) = 2^x + 2^{-x} - m$ 有两个零点, 则 m 的取值范围是 _____。

【解析】令 $f(x) = 0 \implies 2^x + 2^{-x} = m$ 。设 $t = 2^x > 0$, 方程变形为 $t + \frac{1}{t} = m$ 。根据均值不等式, 当 $t > 0$ 时, $t + \frac{1}{t} \geq 2$, 等号在 $t = 1$ (即 $x = 0$) 时成立。为了使原方程有两个不同的实数根, 水平直线 $y = m$ 必须与对勾函数 $y = t + \frac{1}{t}$ ($t > 0$) 有两个不同的交点, 因此需满足 $m > 2$ 。

【答案】 $(2, +\infty)$

14. 球 O 的体积为 $4\sqrt{3}\pi$, A, B, C, D 四点均在球 O 的球面上, $\triangle ABC$ 为等边三角形, $DA = DB = DC = \sqrt{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____。

【解析】首先由球的体积求得外接球半径 R :

$$V_O = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi \implies R = \sqrt{3}$$

由于 $DA = DB = DC = \sqrt{2}$ 且 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 四面体 $D-ABC$ 是正三棱锥。设等边三角形 ABC 的外接圆半径为 r , 边长为 a , 则 $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$ 。正三棱锥的高 $h = \sqrt{DA^2 - r^2} = \sqrt{2 - r^2}$ 。球心 O 必在底面外接圆中心与顶点 D 的连线上, 满足几何关系:

$$R^2 = r^2 + (h \pm d)^2 \implies 3 = r^2 + (h - z_O)^2$$

利用球心到顶点距离为 R , 解得:

$$r^2 = \frac{5}{3} \implies a^2 = 3r^2 = 5$$

因此, 等边三角形 ABC 的面积为:

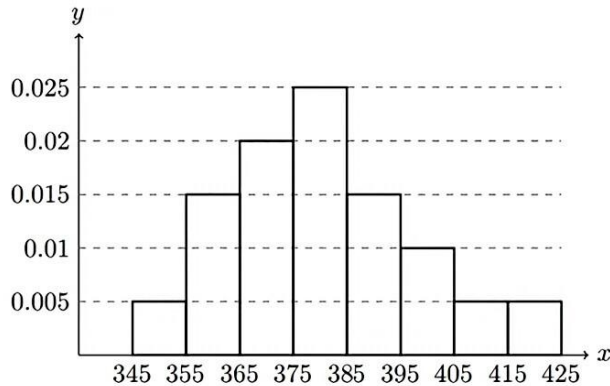
$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

【答案】 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

四、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

15. (13 分)

某工厂抽取一批电子元件检测，记录第一次出现故障的时间（天），绘制成如下的频率分布直方图：



- 求第一四分位数和中位数；
- 设 \hat{p} 为首次故障时间小于 365 天的概率估计值。
 - 求 \hat{p} ；
 - 工厂向某用户销售 100 件电子元件， X 为这 100 件产品中首次出现故障时间小于 365 天的件数，若 $X \sim B(100, \hat{p})$ ，求 $E(X), D(X)$ 。

【解析】

(1) 解：根据频率分布直方图，组距为 10。各区间的频率计算如下：[345, 355) 的频率为 $0.005 \times 10 = 0.05$ ；[355, 365) 的频率为 $0.015 \times 10 = 0.15$ ；[365, 375) 的频率为 $0.02 \times 10 = 0.20$ ；[375, 385) 的频率为 $0.025 \times 10 = 0.25$ ；[385, 395) 的频率为 $0.015 \times 10 = 0.15$ 。

设第一四分位数为 Q_1 。因为前两组的累积频率为 $0.05 + 0.15 = 0.20 < 0.25$ ，而前三组累积频率为 $0.20 + 0.20 = 0.40 > 0.25$ ，所以第一四分位数位于区间 [365, 375) 内。根据比例关系：

$$Q_1 = 365 + \frac{0.25 - 0.20}{0.20} \times 10 = 365 + 2.5 = 367.5(\text{天})$$

设中位数为 M 。前三组的累积频率为 $0.40 < 0.50$ ，前四组的累积频率为 $0.40 + 0.25 = 0.65 > 0.50$ ，所以中位数位于区间 [375, 385) 内。根据比例关系：

$$M = 375 + \frac{0.50 - 0.40}{0.25} \times 10 = 375 + 4 = 379(\text{天})$$

(2) (i) 解：首次故障时间小于 365 天即落在区间 [345, 365) 内。根据频率估计概率，得：

$$\hat{p} = 0.05 + 0.15 = 0.20$$

(ii) 解：已知 $X \sim B(100, 0.20)$ 。根据二项分布的期望与方差公式：

$$E(X) = n\hat{p} = 100 \times 0.20 = 20$$

$$D(X) = n\hat{p}(1 - \hat{p}) = 100 \times 0.20 \times 0.80 = 16$$

16. (15 分)

在三棱锥 $A-BCD$ 中, E 在 BD 上, $AE \perp CE$, $AE \perp DE$, $CD \perp AD$ 。

1. 证明: $CD \perp AB$;

2. 若 $DE = 2, BE = 1, AE = \sqrt{2}, CD = 2\sqrt{3}$, 求 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值。

【解析】

(1) 证明: 因为 $AE \perp CE$ 且 $AE \perp DE$, 而 $CE \cap DE = E$ 且 $CE, DE \subset$ 平面 BCD , 所以 $AE \perp$ 平面 BCD 。因为 $CD \subset$ 平面 BCD , 所以 $CD \perp AE$ 。又已知 $CD \perp AD$, 且 $AE \cap AD = A$, $AE, AD \subset$ 平面 ADE , 所以 $CD \perp$ 平面 ADE 。由于点 E 在直线 BD 上, 所以直线 $AB \subset$ 平面 ADE 。因此, $CD \perp AB$ 成立。 \square

(2) 解: 因为 $AE \perp$ 平面 BCD , 且 E, B, D 三点共线, 我们以 E 为坐标原点, 直线 BD 为 x 轴, 过点 E 在平面 BCD 内垂直于 BD 的直线为 y 轴, 直线 EA 为 z 轴建立空间直角坐标系。根据已知, $DE = 2, BE = 1, AE = \sqrt{2}$ 。可确定以下点的坐标:

$$E(0, 0, 0), \quad D(2, 0, 0), \quad B(-1, 0, 0), \quad A(0, 0, \sqrt{2})$$

由 (1) 知 $CD \perp$ 平面 ADE (即 xz 平面), 所以直线 $CD \parallel y$ 轴, 则点 C 的横坐标与点 D 相同。因为 $CD = 2\sqrt{3}$, 不失一般性, 设 C 坐标为 $(2, 2\sqrt{3}, 0)$ 。计算向量:

$$\vec{AD} = (2, 0, -\sqrt{2}), \quad \vec{AB} = (-1, 0, -\sqrt{2}), \quad \vec{AC} = (2, 2\sqrt{3}, -\sqrt{2})$$

设平面 ABC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 由:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - \sqrt{2}z = 0 \\ 2x + 2\sqrt{3}y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

取 $z = 2$, 可得 $x = -2\sqrt{2}$, $y = \sqrt{6}$ 。所以, 平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{n} = (-2\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2)$ 。其模长为:

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 + 2^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

设 AD 与平面 ABC 所成的角为 θ , 则:

$$\sin \theta = \frac{|\vec{AD} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AD}||\vec{n}|} = \frac{|2 \times (-2\sqrt{2}) + 0 - \sqrt{2} \times 2|}{\sqrt{2^2 + (-\sqrt{2})^2} \times 3\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6} \times 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

所以, AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

17. (15 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos B = \frac{3}{4}$, $\cos^2(A+C) + \sin A \sin C = 1$ 。

1. 证明: $\triangle ABC$ 为钝角三角形;
2. 若 $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$, 求 $\triangle ABC$ 周长。

【解析】

(1) 证明: 在 $\triangle ABC$ 中, $A+B+C=\pi \Rightarrow A+C=\pi-B$ 。所以 $\cos(A+C) = -\cos B = -\frac{3}{4}$ 。
代入已知恒等式得:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \sin A \sin C = 1 \Rightarrow \sin A \sin C = \frac{7}{16}$$

利用余弦的加法公式展宽:

$$\cos B = -\cos(A+C) = \sin A \sin C - \cos A \cos C = \frac{3}{4}$$

代入 $\sin A \sin C = \frac{7}{16}$:

$$\frac{7}{16} - \cos A \cos C = \frac{12}{16} \Rightarrow \cos A \cos C = -\frac{5}{16} < 0$$

因为 $\cos A \cos C < 0$, 所以 $\cos A$ 与 $\cos C$ 异号。由此可知, A 或 C 之中必有一个角的余弦值为负值, 即必有一个角是钝角。所以, $\triangle ABC$ 为钝角三角形。□

(2) 解: 因为 $\cos B = \frac{3}{4}$, 且 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 。由 $\triangle ABC$ 的面积公式:

$$S = \frac{1}{2}ac \sin B \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{2}ac \times \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow ac = 2$$

根据正弦定理, 设外接圆直径为 $2R$:

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}$$

由此可得:

$$\sin A \sin C = \frac{ac \sin^2 B}{b^2} \Rightarrow \frac{7}{16} = \frac{2 \times \frac{7}{16}}{b^2} \Rightarrow b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

在 $\triangle ABC$ 中, 利用余弦定理求 $a^2 + c^2$:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow 2 = a^2 + c^2 - 2 \times 2 \times \frac{3}{4} \Rightarrow a^2 + c^2 = 5$$

因此:

$$(a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = 5 + 4 = 9 \Rightarrow a+c = 3$$

所以, $\triangle ABC$ 的周长为:

$$a+b+c = 3 + \sqrt{2}$$

18. (17 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 1$), 过右焦点垂直于 x 轴的直线被 E 所截线段长为 $\sqrt{2}$ 。

- 求 E 的离心率;
- O 为坐标原点, 给定点 $G(t_0, 0)$ ($t_0 \neq 0$), $A(x_0, y_0)$ ($y_0 \neq 0$) 在 E 上, 过点 A 作 y 轴的垂线交于点 B , AO 与 GB 交于点 P 。当 A 在 E 上运动时, P 的轨迹为 M 。
 - 求 M 的方程;
 - M 是否有中心点? 当 t_0 为何值时, M 有中心点? 当 M 有中心点时, 平移 M 到 M' , 使 O 为 M' 的中心点, 说明 M' 为何形状?

【解析】

(1) 解: 因为椭圆 E 的方程中 $b^2 = 1$, 所以半焦距 $c = \sqrt{a^2 - 1}$ 。右焦点为 $F(c, 0)$, 过 F 垂直于 x 轴的直线为 $x = c$ 。其与椭圆交点的纵坐标满足 $\frac{c^2}{a^2} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{a^2 - 1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$ 。因为截线段长度为 $\sqrt{2}$, 所以:

$$\frac{2}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

所以 $c = \sqrt{2 - 1} = 1$ 。椭圆的离心率为:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) (i) 解: 由 (1) 知椭圆 E 方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 2$ 。已知 $A(x_0, y_0)$, 因为 B 是 A 在 y 轴上的垂足, 所以 $B(0, y_0)$ 。直线 AO 的方程为:

$$y = \frac{y_0}{x_0}x \Rightarrow y_0x - x_0y = 0$$

直线 GB 过 $G(t_0, 0)$ 与 $B(0, y_0)$, 方程为:

$$\frac{x}{t_0} + \frac{y}{y_0} = 1 \Rightarrow y_0x + t_0y = t_0y_0$$

设交点为 $P(x, y)$ 。由 AO 得 $x_0 = \frac{y_0x}{y}$ 。将其代入 GB 方程:

$$y_0(t_0 - x) = t_0y \Rightarrow y_0 = \frac{t_0y}{t_0 - x}$$

从而:

$$x_0 = \frac{t_0x}{t_0 - x}$$

因为 $A(x_0, y_0)$ 在椭圆上, 所以满足 $x_0^2 + 2y_0^2 = 2$ 。代入可得:

$$\left(\frac{t_0x}{t_0 - x}\right)^2 + 2\left(\frac{t_0y}{t_0 - x}\right)^2 = 2 \Rightarrow t_0^2x^2 + 2t_0^2y^2 = 2(t_0 - x)^2$$

展开整理, 即得 M 的方程为:

$$(t_0^2 - 2)x^2 + 4t_0x + 2t_0^2y^2 - 2t_0^2 = 0$$

(ii) 解: 对 M 的方程进行配方:

$$(t_0^2 - 2)\left(x + \frac{2t_0}{t_0^2 - 2}\right)^2 + 2t_0^2y^2 = \frac{2t_0^4}{t_0^2 - 2} \quad (t_0^2 \neq 2)$$

若 $t_0^2 - 2 = 0 \implies t_0 = \pm\sqrt{2}$, 方程为抛物线, 无中心点; 若 $t_0 \neq \pm\sqrt{2}$ 时, M 存在唯一的中心点, 其坐标为 $\left(-\frac{2t_0}{t_0^2-2}, 0\right)$ 。

当 $t_0 \neq \pm\sqrt{2}$ 时, 将 M 平移至中心在原点处的 M' , 其方程形式为:

$$(t_0^2 - 2)X^2 + 2t_0^2Y^2 = \frac{2t_0^4}{t_0^2 - 2}$$

分析其几何形状: 1. 若 $t_0^2 - 2 > 0 \implies |t_0| > \sqrt{2}$: X^2 与 Y^2 项的系数均大于 0, 且右端项大于 0, 此时 M' 为椭圆; 2. 若 $t_0^2 - 2 < 0 \implies 0 < |t_0| < \sqrt{2}$: X^2 项系数小于 0, Y^2 项系数大于 0, 且右端项小于 0, 此时方程变形为 $(2 - t_0^2)X^2 - 2t_0^2Y^2 = \frac{2t_0^4}{2-t_0^2}$, 此时 M' 为双曲线。

19. (17 分)

已知函数 $f(x) = xe^x + ax + b$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = -2x + 1$.

1. 求 a, b ;

2. 当 $x > 0$ 时, $f(x+m) - f(x) > m$, 求 m 的取值范围;

3. 当 $x > 0$ 时, $f(x+k) + f(k-x) > 2f(k)$, 求 k 的最小值.

【解析】

(1) 解: 根据函数在 $x = 0$ 处切线方程:

$$f(0) = b = 1$$

求函数的导函数:

$$f'(x) = (x+1)e^x + a$$

切线斜率 $k = f'(0) = 1 + a = -2 \Rightarrow a = -3$. 所以 $a = -3, b = 1$.

(2) 解: 函数解析式为 $f(x) = xe^x - 3x + 1$. 不等式可化为 $f(x+m) - (x+m) > f(x) - x$. 设辅助函数 $g(x) = f(x) - x = xe^x - 4x + 1$, 则要求当 $x > 0$ 时, $g(x+m) > g(x)$. 求导数:

$$g'(x) = (x+1)e^x - 4$$

设 $g''(x) = (x+2)e^x > 0$ ($x > 0$), 说明 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调递增. 又 $g'(0) = -3 < 0, g'(1) = 2e - 4 > 0$, 所以存在唯一零点 $x_0 \in (0, 1)$. 若 $m \leq 0$, 无法满足对任意 $x > 0$ 均有 $g(x+m) > g(x)$ (例如当 $x > x_0$ 时递增), 故必有 $m > 0$. 当 $m > 0$ 时, 因为 $g'(x)$ 严格单调递增, 故:

$$g'(x+m) > g'(x) \Rightarrow [g(x+m) - g(x)]' > 0$$

所以函数 $h(x) = g(x+m) - g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调递增. 要使 $h(x) > 0$ 对任意 $x > 0$ 恒成立, 只需:

$$h(0) \geq 0 \Rightarrow g(m) \geq g(0) \Rightarrow me^m - 4m + 1 \geq 1 \Rightarrow m(e^m - 4) \geq 0$$

因为 $m > 0$, 所以:

$$e^m \geq 4 \Rightarrow m \geq \ln 4 = 2 \ln 2$$

所以 m 的取值范围是 $[2 \ln 2, +\infty)$.

(3) 解: 要使当 $x > 0$ 时, $f(x+k) + f(k-x) - 2f(k) > 0$. 设 $F(x) = f(k+x) + f(k-x) - 2f(k)$ ($x \geq 0$), 则 $F(0) = 0$. 求导数:

$$F'(x) = f'(k+x) - f'(k-x) = (k+x+1)e^{k+x} - (k-x+1)e^{k-x} = e^{k-x} [(k+1+x)e^{2x} - (k+1-x)]$$

设 $p(x) = (k+1+x)e^{2x} - (k+1-x)$, 则 $p(0) = 0$. 求导数:

$$p'(x) = (2k+3+2x)e^{2x} + 1$$

若 $k \geq -2$: 当 $x > 0$ 时, $p'(x) \geq p'(0) = 2k+4 \geq 0$. 由此可知 $p(x) > p(0) = 0$, 即 $F'(x) > 0$, 所以 $F(x) > F(0) = 0$ 恒成立. 若 $k < -2$: 在 $x \rightarrow 0^+$ 时, $p'(x) \rightarrow 2k+4 < 0 \Rightarrow F'(x) < 0 \Rightarrow F(x) < 0$, 不满足条件. 综上所述, k 的最小值为 -2 .