

清单 01 高考数学考前必背核心知识

(含 20 个专题, 223 个核心考点)

内容导览

专题 01 集合

专题 02 常用逻辑用语

专题 03 复数

专题 04 平面向量

专题 05 等式与不等式的性质

专题 06 基本不等式

专题 07 三角函数与诱导公式、三角恒等变换

专题 08 三角函数的图象及性质

专题 09 解三角形

专题 10 函数的概念及其表示

专题 11 函数的基本性质

专题 12 指数对数幂函数

专题 13 函数的图象、函数与方程、函数模型

专题 14 导数

专题 15 数列

专题 16 立体几何

专题 17 直线与圆

专题 18 圆锥曲线(椭圆、双曲线、抛物线)

专题 19 排列组合与二项式定理

专题 20 概率统计

核心知识背记

专题 01 集合

考点 1 元素与集合

1. 集合的概念

一般地, 我们把指定的某些对象的全体称为 集合, 通常用大写字母 A, B, C, \dots 表示, 集合中的每个对象叫做这个集合的 元素, 通常用小写字母 a, b, c, \dots 表示.

2. 集合与元素的关系

一个集合确定后, 任何一个对象是不是这个集合的元素就确定了, 如果元素 a 在集合 A 中, 就说元素 a 属于 集合 A , 记作 $a \in A$, 如果元素 a 不在集合 A 中, 就说元素 a 不属于 集合 A , 记作 $a \notin A$.

3. 集合的分类

含有有限个元素的集合叫作 有限集，含有无限个元素的集合叫作 无限集，不含任何元素的集合叫作 空集，记作 \varnothing 。

4. 元素与集合

- (1) 集合中元素的特性：确定性、互异性、无序性。
- (2) 集合的表示方法：列举法、描述法、图示法。
- (3) 常用数集及其记法：

数集	非负整数集（或自然数集）	正整数集	整数集	有理数集	实数集	复数集
符号	<u>\mathbf{N}</u>	\mathbf{N}^* 或 (\mathbf{N}_+)	\mathbf{Z}	\mathbf{Q}	\mathbf{R}	\mathbf{C}

考点 2 集合的基本关系

		文字语言	符号语言
基本关系	子集	集合 A 中任意一个元素都是集合 B 的元素	$A \subseteq B$
	真子集	集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 中至少有一个元素不在集合 A 中	$A \subsetneq B$
	相等	集合 A, B 中元素相同或集合 A, B 互为子集	$A = B$
空集	空集是任何集合的子集		$\varnothing \subseteq A$
	空集是任何非空集合的 <u>真子集</u>		$\varnothing \subsetneq B$ 且 $B \neq \varnothing$

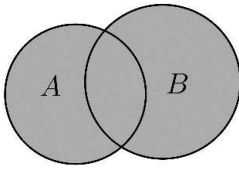
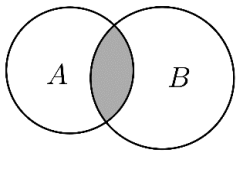
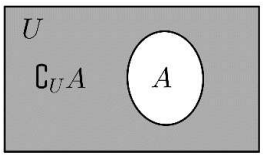
必记结论：

- (1) 若集合 A 中含有 n 个元素，则有 2^n 个子集，有 $2^n - 1$ 个非空子集，有 $2^n - 1$ 个真子集，有 $2^n - 2$ 个非空真子集。
- (2) 子集关系的传递性，即 $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ 。

注意：空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集，在涉及集合关系时，必须优先考虑 空集 的情况，否则会造成漏解。

考点 3 集合的交集、并集、补集运算

	文字语言	符号语言	图形语言	记法
--	------	------	------	----

并集	由所有属于集合 <u>A 或属于 B</u> 的元素组成的集合	$\{x x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$		<u>$A \cup B$</u>
交集	由所有属于集合 <u>A 且属于 B</u> 的元素组成的集合	$\{x x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$		<u>$A \cap B$</u>
补集	由全集 U 中 <u>不属于</u> 集合 A 的所有元素组成的集合	$\{x x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$		<u>$\complement_U A$</u>

考点 4 集合的运算性质

1. 交集的性质:

① $A \cap B \subseteq A$; ② $A \cap B \subseteq B$; ③ $A \cap A = A$; ④ $A \cap \emptyset = \emptyset$; ⑤ $A \cap B = B \cap A$.

2. 并集的性质:

① $A \cup B \supseteq A$; ② $A \cup B \supseteq B$; ③ $A \cup A = A$; ④ $A \cup \emptyset = A$; ⑤ $A \cup B = B \cup A$.

3. 补集的性质:

① $\complement_U(\complement_U A) = A$; ② $\complement_U U = \emptyset$; ③ $\complement_U \emptyset = U$;

④ $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$; ⑤ $A \cup (\complement_U A) = U$;

⑥ $\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$;

⑦ $\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$.

专题 02 常用逻辑用语

考点 1 命题的概念

(1) 定义: 一般地, 我们把用语言、符号或式子表达的, 可以判断 真假 的 陈述句 叫做命题.

(2) 分类: 判断为 真 的语句是真命题, 判断为 假 的语句是假命题.

(3) 结构形式: “若 p , 则 q ”“如果 p , 那么 q ”等形式的命题中, p 称为命题的条件, q 称为命题的结论.

考点2 充分条件与必要条件

1. 充分条件与必要条件的定义

一般地，“若 p ，则 q ”为真命题，是指由条件 p 通过推理可以得出 q 。

由 p 可推出 q ，记作 $p \Rightarrow q$ ，并且说 p 是 q 的 充分条件， q 是 p 的 必要条件。

如果“若 p ，则 q ”为假命题，是指由条件 p 不能推出结论 q ，记作 $p \not\Rightarrow q$ ，则 p 不是 q 的充分条件， q 不是 p 的必要条件。

2. 充分性和必要性的关系

在“若 p ，则 q ”中，

若： $p \Rightarrow q$ ，则 p 是 q 的充分条件， q 是 p 的必要条件

若： $q \Rightarrow p$ ，则 q 是 p 的充分条件， p 是 q 的必要条件

也就是说：在“若 p ，则 q ”中，

条件 \Rightarrow 结论，充分性成立；

结论 \Rightarrow 条件，必要性成立

3. 充分条件、必要条件与充要条件的概念

若 $p \Rightarrow q$ ，则 p 是 q 的充分条件， q 是 p 的必要条件	
p 是 q 的 <u>充分不必要</u> 条件	$p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$
p 是 q 的 <u>必要不充分</u> 条件	$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$
p 是 q 的 <u>充要</u> 条件	$p \Leftrightarrow q$
p 是 q 的 <u>既不充分又不必要</u> 条件	$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$

考点3 集合中的包含关系在判断条件关系中的应用

设命题 p 对应集合 A ，命题 q 对应集合 B

若 $A \subseteq B$ ，即 $p \Rightarrow q$ ， p 是 q 的充分条件（充分性成立）

若 $A \supseteq B$ ，即 $q \Rightarrow p$ ， p 是 q 的必要条件（必要性成立）

若 $A \subsetneq B$, 即 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$, p 是 q 的 充分不必要条件

若 $A \supsetneq B$, 即 $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$, p 是 q 的 必要不充分条件

若 $A = B$, 即 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$, p 是 q 的 充要条件

考点 4 全称量词与存在量词

1. 全称量词与存在量词

(1) 全称量词: 短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做 全称量词, 并用符号“ \forall ”表示. 含有全称量词的命题, 叫做 全称量词命题. 全称量词命题“对 M 中任意一个 x , $p(x)$ 成立”可用符号简记为 $\forall x \in M, p(x)$.

(2) 存在量词: 短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫做 存在量词, 并用符号“ \exists ”表示. 含有存在量词的命题, 叫做 存在量词命题. 存在量词命题“存在 M 中的元素 x , $p(x)$ 成立”可用符号简记为 $\exists x \in M, p(x)$.

2. 全称量词命题和存在量词命题的否定

(1) 全称量词命题的否定

对含有一个量词的全称量词命题的否定, 有下面的结论: 全称量词命题 $p: \forall x \in M, p(x)$, 它的否定 $\neg p$: $\exists x \in M, p(x)$ 不成立.

全称量词命题的否定是存在量词命题.

(2) 存在量词命题的否定

对含有一个量词的存在量词命题的否定, 有下面的结论: 存在量词命题 $p: \exists x \in M, p(x)$, 它的否定 $\neg p$: $\forall x \in M, p(x)$ 不成立.

存在量词命题的否定是全称量词命题.

(3) 在书写这两种命题的否定时, 相应地 存在量词 变为全称量词, 全称量词变为 存在量词.

专题 03 复数

考点 1 复数的定义

复数: 一般地, 当 a 与 b 都是实数时, 称 $a + bi$ 为 复数, 复数一般用小写字母 z 表示, 即 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, 其中 a 称为 z 的 实部, b 称为 z 的 虚部. 任意一个复数都由它的实部与虚部唯一确定.

考点2 虚数单位与周期

i 叫做虚数单位, 规定 $i^2 = \underline{-1}$; 虚数单位可以与实数进行 四则运算

特别地, $i^{4n+1} = \underline{i}$, $i^{4n+2} = \underline{-1}$, $i^{4n+3} = \underline{-i}$, $i^{4n} = \underline{1}$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$.

考点3 复数的分类

对于复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, 复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, z 为实数 $\Leftrightarrow \underline{b = 0}$; z 为虚数 \Leftrightarrow

$\underline{b \neq 0}$; z 为纯虚数 $\Leftrightarrow \underline{\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}}$; z 为非纯虚数 $\Leftrightarrow \underline{\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}}$.

即复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} \text{实数} (b = 0) \\ \text{虚数} (b \neq 0) \end{cases} \begin{cases} \text{纯虚数} (a = 0) \\ \text{非纯虚数} (a \neq 0) \end{cases}$

考点4 复数相等

如果 a, b, c, d 都是实数, 那么 $a + bi = c + di \Leftrightarrow \underline{a = c \text{ 且 } b = d}$. 特别地, 当 a, b 都是实数时, $a + bi = 0$ 的充要条件是 $a = 0$ 且 $b = 0$.

考点5 共轭复数及其性质

如果两个复数的实部 相等, 而虚部 互为相反数 时, 则称这两个复数互为共轭复数. 复数 z 的共轭复数用 \bar{z} 表示, 即如果 $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, 那么 $\bar{z} = \underline{a - bi}$.

共轭复数的性质

设 z 的共轭复数为 \bar{z} , 则

$$(1) z\bar{z} = \underline{|z|^2} = |\bar{z}|^2.$$

$$(2) \overline{z^2} = (\bar{z})^2.$$

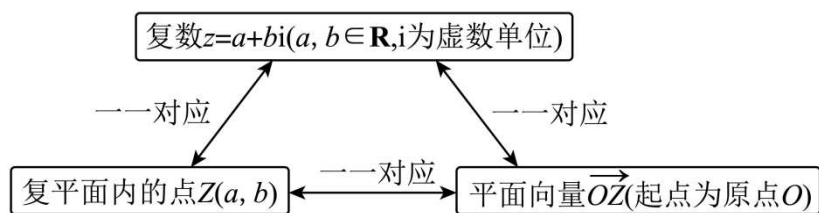
$$(3) z_1 \overline{z_2} = \bar{z}_1 z_2.$$

考点6 复平面及复数的几何意义

复平面: 在平面上建立直角坐标系, 以坐标为 (a, b) 的点 Z 表示复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, 就可在平面上的点的集合与复数集合之间建立一个一一对应, 这样用来表示复数的平面 叫做复平面, 这里的 x 轴叫做 实轴, y 轴叫做 虚轴.

注意: (1) 表示实数的点都在实轴上, 表示纯虚数的点都在虚轴上, 原点表示实数 0.

(2) 每一个复数, 在复平面内有唯一的点和它对应; 反过来, 复平面内的每一个点, 都有唯一的一个复数和它对应, 即复数集中的元素和复平面内所有的点所组成的集合是一一对应的.



复平面上两点 P, Q 关于 x 轴对称 \Leftrightarrow 它们所对应的复数相互 共轭。

考点 7 复数的向量表示

复平面内的点 $Z(a, b)$ 表示复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)，连接 OZ ，向量 \overrightarrow{OZ} 由点 Z 唯一确定；反过来，点 Z 也可以由向量 \overrightarrow{OZ} 唯一确定。这样，复数集 \mathbb{C} 中的元素和复平面上以原点为起始点的向量 \overrightarrow{OZ} 也是 一一 对应的（实数 0 与零向量对应）。

考点 8 复数的模

复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 在复平面上所对应的点 $Z(a, b)$ 到原点的距离 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 叫做复数 z 的模（或绝对值），记作 $|z|$ ，由模的定义可知 $|z| = |a + bi| = \underline{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

复数的模与该复数所对应的向量的模是 一致 的，复数的模为该复数在复平面上所对应点到 原点 的距离。

考点 9 复数的加、减、乘、除运算法则

设 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$)，则

(1) 加法: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = \underline{(a + c) + (b + d)i}$ 。

(2) 减法: $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = \underline{(a - c) + (b - d)i}$ 。

(3) 乘法: $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = \underline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$ 。

(4) 除法: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ ($c + di \neq 0$)。

考点 10 复数乘法的运算律

(1) 对任意复数 z_1, z_2, z_3 ，有

交换律	$z_1 z_2 = \underline{z_2 z_1}$
结合律	$(z_1 z_2) z_3 = \underline{z_1 (z_2 z_3)}$
乘法对加法的分配律	$z_1 (z_2 + z_3) = \underline{z_1 z_2 + z_1 z_3}$

(2) n 个相同的复数 z 相乘时，仍称为 z 的 n 次方（或 n 次幂），并记作 z^n ，即 $z^n = \underbrace{z \times z \times \cdots \times z}_{n \text{ 个}}$ 。可以验证，

当 m, n 均为正整数时， $z^m z^n = \underline{z^{m+n}}$ ， $(z^m)^n = \underline{z^{mn}}$ ， $(z_1 z_2)^n = \underline{z_1^n z_2^n}$ 。

专题 04 平面向量

考点 1 平面向量的定义与表示

(1) 向量：在数学中，我们把既有__大小__又有__方向__的量叫做向量.

(2) 向量的表示

①表示工具——有向线段.

有向线段包含三个要素：__起点__，__方向__，__长度__.

②表示方法：

向量可以用__有向线段 \vec{AB} __表示，向量 \vec{AB} 的大小称为向量 \vec{AB} 的__长度__(或称模)，记作__ $|\vec{AB}|$ __.向

量可以用字母 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , ...表示，也可以用有向线段的起点和终点字母表示，如： \vec{AB} , \vec{CD} .

考点 2 平面向量的有关概念

(1)零向量：长度为 0 的向量，其方向是任意的.

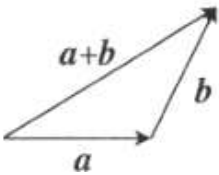
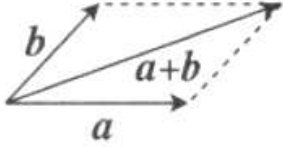
(2)单位向量：长度等于 1 个单位的向量.

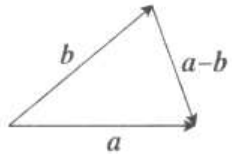
(3)平行向量：方向相同或相反的非零向量，又叫共线向量，规定： $\mathbf{0}$ 与任一向量平行.

(4)相等向量：长度相等且方向相同的向量.

(5)相反向量：长度相等且方向相反的向量.

考点 3 平面向量的线性运算

向量运算	定义	法则（或几何意义）
加法	求两个向量和的运算	<div> __三角形__法则</div> <div> __平行四边形__法则</div>

减法	求 \vec{a} 与 \vec{b} 的相反向量 $-\vec{b}$ 的和的运算	 __三角形__法则
数乘	求实数 λ 与向量 \vec{a} 的积的运算	<p>(1) $\lambda\vec{a} = \lambda \vec{a}$;</p> <p>(2) 当$\lambda > 0$时, $\lambda\vec{a}$的方向与\vec{a}的方向__相同__; 当$\lambda < 0$时, $\lambda\vec{a}$的方向与\vec{a}的方向__相反__; 当$\lambda = 0$时, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$</p>

考点4 平面向量线性运算的运算律

1. 向量加法的运算律

- (1) 交换律: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- (2) 结合律: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

2. 向量减法的运算律

几何意义: $\vec{a} - \vec{b}$ 可以表示为从向量 \vec{b} 的__终点__指向向量 \vec{a} 的__终点__的向量.

定义: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, 即减去一个向量相当于加上这个向量的__相反__向量.

3. $|\vec{a} - \vec{b}|$ 与 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ 之间的关系

- (1) 对于任意向量 \vec{a} , \vec{b} , 都有 $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$;
- (2) 当 \vec{a} , \vec{b} 共线, 且同向时, 有 $|\vec{a} - \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||$ 或 $|\vec{b}| - |\vec{a}|$;
- (3) 当 \vec{a} , \vec{b} 共线, 且反向时, 有 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

4. 数乘运算律

一般地, 设 \vec{a} , \vec{b} 是任意向量, x , y 是任意实数, 则如下运算律成立:

- (1) 对实数加法的分配律: $(x + y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}$.
- (2) 对实数乘法的结合律: $x(y\vec{a}) = (xy)\vec{a}$.
- (3) 对向量加法的分配律: $x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}$.

考点5 平面向量共线定理

向量 $\vec{a} (\vec{a} \neq \vec{0})$ 与 \vec{b} 共线的充要条件是: 存在__唯一一个__实数 λ , 使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

给定四点 O, P, A, B , 其中 O, A, B 为不共线的三点, 且 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$, 则 A, P, B 三点共线的充要条件是__

$$x + y = 1$$

考点 6 平面向量基本定理

条件	\vec{e}_1, \vec{e}_2 是同一平面内的两个 <u>不共线向量</u>
结论	对于这一平面内的任一向量 \vec{a} , 有且只有一对实数 λ_1, λ_2 , 使 <u>$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$</u>
基底	若 \vec{e}_1, \vec{e}_2 不共线, 把 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 叫做表示这一平面内所有向量的一个基底

考点 7 平面向量的坐标表示

设平面上建立了直角坐标系, 则平面上每个向量 $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ 都可用从原点 O 出发的有向线段 \overrightarrow{OP} 表示. 原点 O 到 $E_1(1,0), E_2(0,1)$ 的向量 $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ 分别是 x 轴正方向和 y 轴正方向上的单位向量, 组成标准正交基, 则 $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ 的坐标 (x, y) 视为 \vec{v} 在这组基下的坐标, 等于向量终点 $P(x, y)$ 的坐标.

考点 8 平面向量线性运算的坐标表示

已知 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$, 则:

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2),$$

即两个向量和(差)的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和(差).

(2) 若点 A 坐标为 (x_1, y_1) , 点 B 坐标为 (x_2, y_2) , O 为坐标原点,

$$\text{则 } \overrightarrow{OA} = (x_1, y_1), \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2), \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) =$$

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1), \text{ 即一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标.}$$

(3) 实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的 相应坐标;

$$(4) \text{ 设向量 } \vec{a} = (x_1, y_1), \text{ 则 } \lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

(5) 中点坐标公式: 若 P_1, P_2 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 线段 P_1P_2 的中点 P 的坐标为 (x, y) , 则

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

考点 9 平面向量平行(共线)的坐标表示

设 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$, 其中 $\vec{b} \neq \vec{0}$. 向量 $\vec{a}, \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0})$ 共线的充要条件是 $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

考点 10 平面向量的数量积的定义及性质

(1) 数量积的定义

一般地, 当 \vec{a} 与 \vec{b} 都是非零向量时, 称 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ 为向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的数量积 (也称内积), 记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, 即 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.

(2) 数量积的性质

① $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

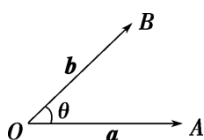
② $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, 即 $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

③ $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

考点 11 平面向量的夹角及其公式

定义: 已知两个非零向量 \vec{a}, \vec{b} , O 是平面上的任意一点, 作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 则 $\angle AOB = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)叫做向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角.

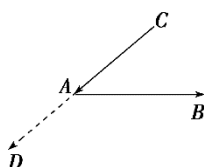
注意: ①当 $\theta = 0$ 时, 向量 \vec{a} 与 \vec{b} **同向**;



②当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 向量 \vec{a} 与 \vec{b} **垂直**, 记作 $\vec{a}\perp\vec{b}$;

③当 $\theta = \pi$ 时, 向量 \vec{a} 与 \vec{b} **反向**.

注意: 只有两个向量的起点重合时所对应的角才是两向量的夹角, 如图所示, $\angle BAC$ 不是向量 \overrightarrow{CA} 与 \overrightarrow{AB} 的夹角. 作 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$, 则 $\angle BAD$ 才是向量 \overrightarrow{CA} 与 \overrightarrow{AB} 的夹角.



向量的夹角公式: $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

考点 12 平面向量数量积的运算律

已知向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 和实数 λ , 则

(1) 交换律: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

(2) 数乘结合律: $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$;

(3) 分配律: $(\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$.

注意: (1) 向量的数量积不满足消去律; 若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 均为非零向量, 且 $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c}$, 但得不到 $\vec{a} = \vec{b}$.

(2) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} \neq \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$, 因为 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ 是数量积, 是实数, 不是向量, 所以 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$ 与向量 \vec{c} 共线, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$ 与向量 \vec{a} 共线, 因此, $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$ 在一般情况下不成立.

(3) 推论: $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

考点 13 平面向量数量积中的坐标运算

若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 θ . 则:

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{x_1 x_2 + y_1 y_2}$, 即两个向量的数量积等于它们对应坐标的 乘积的和;

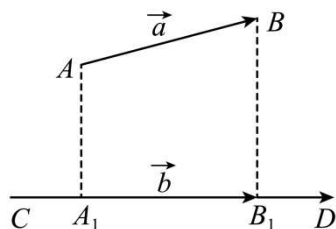
(2) $|\vec{a}|^2 = \underline{x_1^2 + y_1^2}$, 或 $|\vec{a}| = \underline{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$;

(3) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \underline{x_1 x_2 + y_1 y_2} = 0$;

(4) 若 \vec{a}, \vec{b} 为非零向量, 则 $\cos \theta = \underline{\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}} = \underline{\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}}$.

考点 14 投影向量

向量的投影



① 定义: 如图, 设 a, b 是两个非零向量, $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{CD} = b$, 作如下的变换: 过 \overrightarrow{AB} 的起点 A 和终点 B , 分别作 \overrightarrow{CD} 所在直线的垂线, 垂足分别为 A_1, B_1 , 得到 $\overrightarrow{A_1 B_1}$, 则称上述变换为向量 a 向向量 b 投影, $\overrightarrow{A_1 B_1}$ 叫做向量 a 在向量 b 上的投影向量.

② 计算: 设与 b 方向相同的单位向量为 e , a 与 b 的夹角为 θ , 则向量 a 在向量 b 上的投影向量是 $|a|\cos \theta e$.

专题 05 等式与不等式的性质

考点 1 等式的性质

性质 1 如果 $a = b$, 那么 $b = a$; 性质 2 如果 $a = b, b = c$, 那么 $a = c$;

性质 3 如果 $a = b$, 那么 $a \pm c = b \pm c$; 性质 4 如果 $a = b$, 那么 $ac = bc$;

性质 5 如果 $a = b, c \neq 0$, 那么 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$;

考点 2 比较两个实数大小

两个实数的大小是用实数的运算性质来定义的, 有:

$$a-b>0 \Leftrightarrow \underline{a>b}; \quad a-b=0 \Leftrightarrow \underline{a=b}; \quad a-b<0 \Leftrightarrow \underline{a<b}$$

另外，若 $b>0$ ，则有 $\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b$ ； $\frac{a}{b}=1 \Leftrightarrow a=b$ ； $\frac{a}{b}<1 \Leftrightarrow a<b$ 。

考点 3 不等式的性质

性质	别名	性质内容
1	对称性	$a>b \Leftrightarrow b \underline{<} a$
2	传递性	$a>b, b>c \Rightarrow a \underline{>} c$
3	可加性	$a>b \Leftrightarrow a+c \underline{>} b+c$ 推论 1: $a+b>c \Leftrightarrow a>c-b$; 推论 2: $a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$
4	可乘性	$a>b, c>0 \Rightarrow ac \underline{>} bc$ $a>b, c<0 \Rightarrow ac < bc$; 推论 3: $a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$; 推论 4: $a>b>0 \Rightarrow a^n \underline{>} b^n$ ($n \in N, n \geq 2$) ; 推论 5: $a>b>0 \Rightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}$
5	取倒数	$a>b, ab>0 \Rightarrow \frac{1}{a} \underline{<} \frac{1}{b}$ $a>b, ab<0 \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

专题 06 基本不等式

考点 1 基本不等式

如果 $a \geq 0, b \geq 0$ ，那么 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ （当且仅当 $\underline{a=b}$ 时取“=”）。

说明：

- ①对于非负数 a, b ，我们把 $\frac{a+b}{2}$ 称为 a, b 的 算术平均数， \sqrt{ab} 称为 a, b 的 几何平均数。
- ②我们把不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a \geq 0, b \geq 0)$ 称为基本不等式，我们也可以把基本不等式表述为：两个非负数的几何平均数不大于它们的算术平均数。
- ③“当且仅当 $a=b$ 时取“=”号”这句话的含义是：一方面是当 $\underline{a=b}$ 时，有 $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ ；另一方面当 $\underline{\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}}$ 时，有 $a=b$ 。
- ④ 结构特点：和式与积式的关系。

考点2 利用基本不等式求最值

①已知 x, y 是正数, 如果积 xy 等于定值 P , 那么当且仅当 $x = y$ 时, 和 $x + y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$;

②已知 x, y 是正数, 如果和 $x + y$ 等于定值 S , 那么当且仅当 $x = y$ 时, 积 xy 有最大值. $\frac{S^2}{4}$

考点3 几个重要不等式

(1) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a, b \in \mathbf{R}$) (当且仅当 $a = b$ 时取等号).

变形式: $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ ($a, b \in \mathbf{R}$) (当且仅当 $a = b$ 时取等号).

(2) 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ($a > 0, b > 0$) (当且仅当 $a = b$ 时取等号).

变形式: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ($a > 0, b > 0$), $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ($a, b \in \mathbf{R}$) (当且仅当 $a = b$ 时等号成立).

(3) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$) (当且仅当 $a = b = c$ 时取等号).

(4) 若 $ab > 0$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$, $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ (当且仅当 $a = b$ 时取等号).

考点4 基本不等式链

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} (a, b \in \mathbf{R}, a, b > 0)$$

专题07 三角函数与诱导公式、三角恒等变换

考点1 扇形的弧长及面积公式

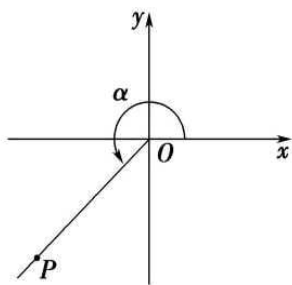
设扇形的半径为 R , 弧长为 l , 圆心角为 α ($0 < \alpha < 2\pi$), 则

度量单位类别	α 为弧度制
扇形的弧长	$l = \alpha R$
扇形的面积	$S = \frac{1}{2}lR = \frac{1}{2}\alpha \cdot R^2$

考点2 三角函数的定义

如图所示, 设 α 是一个任意角, 它的终边上任意一点 P (不与原点 O 重合) 的坐标为 (x, y) , 点 P 与原点的

距离为 r , 则 $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$. 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$



考点3 特殊角的三角函数值

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0

考点4 同角三角函数基本关系式的变形

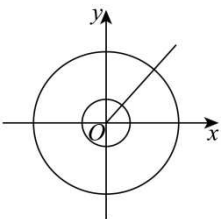
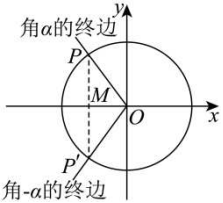
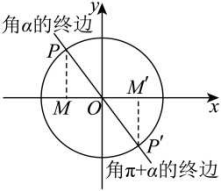
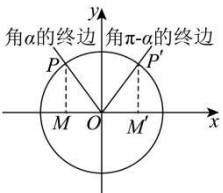
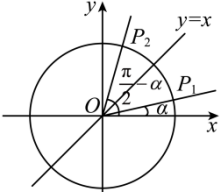
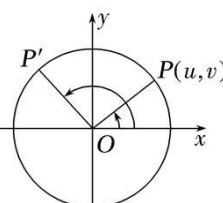
$$(1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = \underline{\hspace{2cm}}; \\ \cos^2 \alpha = \underline{\hspace{2cm}}; \\ \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm 2\sin \alpha \cos \alpha \end{cases}.$$

$$(2) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}}. \\ \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}. \end{cases}$$

【答案】 $1 - \cos^2 \alpha$; $1 - \sin^2 \alpha$; $\tan \alpha \cos \alpha$

考点5 诱导公式

	终边关系	图示	公式
--	------	----	----

公式一	角 $\alpha + 2k\pi$ 与角 α 的终边相同		$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$, 其中 $k \in \mathbf{Z}$
公式二	角 $-\alpha$ 与角 α 的终边关于 <u> x </u> 轴对称		$\sin(-\alpha) = \underline{\hspace{1cm}} -\sin \alpha \underline{\hspace{1cm}}$, $\cos(-\alpha) = \underline{\hspace{1cm}} \cos \alpha \underline{\hspace{1cm}}$,
公式三	角 $\pi + \alpha$ 与角 α 的终边关于 <u> 原点 </u> 对称		$\sin(\pi + \alpha) = \underline{\hspace{1cm}} -\sin \alpha \underline{\hspace{1cm}}$, $\cos(\pi + \alpha) = \underline{\hspace{1cm}} -\cos \alpha \underline{\hspace{1cm}}$,
公式四	角 $\pi - \alpha$ 与角 α 的终边关于 <u> y </u> 轴对称		$\sin(\pi - \alpha) = \underline{\hspace{1cm}} \sin \alpha \underline{\hspace{1cm}}$, $\cos(\pi - \alpha) = \underline{\hspace{1cm}} -\cos \alpha \underline{\hspace{1cm}}$,
公式五	角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 与角 α 的终边关于 $y = x$ 对称		$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{1cm}} \cos \alpha \underline{\hspace{1cm}}$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{1cm}} \sin \alpha \underline{\hspace{1cm}}$
公式六	角 $\frac{\pi}{2} + \alpha$ 的终边可以看作角 α 的终边逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$		$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{1cm}} \cos \alpha \underline{\hspace{1cm}}$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{1cm}} -\sin \alpha \underline{\hspace{1cm}}$

考点 6 两角和与差的正、余弦、正切公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \underline{\hspace{1cm}} \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \underline{\hspace{1cm}} ;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \underline{\hspace{1cm}} \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \underline{\hspace{1cm}} ;$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{\underline{\hspace{1cm}} 1 \mp \tan \alpha \tan \beta \underline{\hspace{1cm}}} .$$

考点7 倍角公式

$$\sin 2\alpha = \underline{\hspace{1cm}} 2 \sin \alpha \cos \alpha \underline{\hspace{1cm}};$$

$$\cos 2\alpha = \underline{\hspace{1cm}} 2 \sin \alpha \cos \alpha \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} 1 - 2 \sin^2 \alpha \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} 2 \cos^2 \alpha - 1 \underline{\hspace{1cm}};$$

$$\tan 2\alpha = \underline{\hspace{1cm}} \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \underline{\hspace{1cm}}.$$

$$\text{降幂公式: } \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

考点8 半角公式

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \underline{\hspace{1cm}} \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \underline{\hspace{1cm}}, \quad \textcircled{1}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \underline{\hspace{1cm}} \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \underline{\hspace{1cm}}, \quad \textcircled{2}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \underline{\hspace{1cm}} \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \underline{\hspace{1cm}} \text{ (无理形式)}. \quad \textcircled{3}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \underline{\hspace{1cm}} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \underline{\hspace{1cm}}. \text{ (有理形式)}.$$

上面的公式①②③统称为半角公式，分别简记为 $S_{\frac{\alpha}{2}}$, $C_{\frac{\alpha}{2}}$, $T_{\frac{\alpha}{2}}$. 半角公式的符号需要根据角 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限来判断.

考点9 辅助角公式

$$y = a \sin x + b \cos x = \underline{\hspace{1cm}} \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta) \underline{\hspace{1cm}}. \quad (\text{其中 } 0 \leq \theta < 2\pi, \tan \theta = \frac{b}{a})$$

考点10 和差化积公式

$$\sin \alpha + \sin \beta = \underline{\hspace{1cm}} 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \underline{\hspace{1cm}};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = \underline{\hspace{1cm}} 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \underline{\hspace{1cm}};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \underline{\hspace{1cm}} 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \underline{\hspace{1cm}};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \underline{\hspace{1cm}} -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \underline{\hspace{1cm}}.$$

考点11 积化和差公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \underline{\hspace{1cm}} \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \underline{\hspace{1cm}};$$

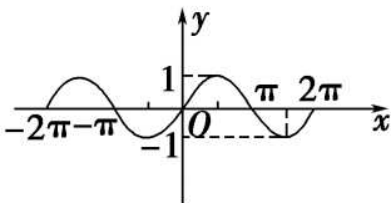
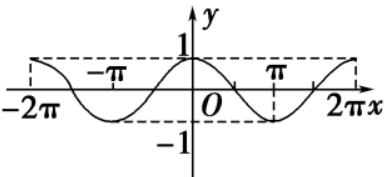
$$\cos \alpha \sin \beta = \underline{\hspace{1cm}} \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \underline{\hspace{1cm}};$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \underline{\hspace{1cm}} \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \underline{\hspace{1cm}};$$

$\sin \alpha \sin \beta = \underline{\hspace{1cm}} - \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)] \underline{\hspace{1cm}}.$

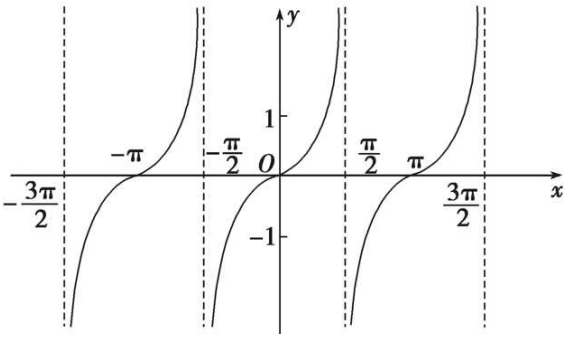
专题 08 三角函数的图象及性质

考点 1 正弦函数、余弦函数的图象、性质对比

函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$
图象		
定义域	$\underline{\hspace{1cm}} \mathbf{R} \underline{\hspace{1cm}}$	$\underline{\hspace{1cm}} \mathbf{R} \underline{\hspace{1cm}}$
值域	$\underline{\hspace{1cm}} [-1, 1] \underline{\hspace{1cm}}$	$\underline{\hspace{1cm}} [-1, 1] \underline{\hspace{1cm}}$
奇偶性	$\underline{\hspace{1cm}} \text{奇函数} \underline{\hspace{1cm}}$	$\underline{\hspace{1cm}} \text{偶函数} \underline{\hspace{1cm}}$
周期性	最小正周期: $\underline{\hspace{1cm}} 2\pi \underline{\hspace{1cm}}$	最小正周期: $\underline{\hspace{1cm}} 2\pi \underline{\hspace{1cm}}$
最值	当 $\underline{\hspace{1cm}} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}) \underline{\hspace{1cm}}$ 时, $y_{\max} = 1$; 当 $\underline{\hspace{1cm}}$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}) \underline{\hspace{1cm}}$ 时, $y_{\min} = -1$	当 $\underline{\hspace{1cm}} x = 2k\pi (k \in \mathbf{Z}) \underline{\hspace{1cm}}$ 时, $y_{\max} = 1$; 当 $\underline{\hspace{1cm}} x = \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}) \underline{\hspace{1cm}}$ 时, $y_{\min} = -1$
单调性	在 $\underline{\hspace{1cm}}$ $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$ $\underline{\hspace{1cm}}$ 上单调递增; 在 $\underline{\hspace{1cm}}$ $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z}) \underline{\hspace{1cm}}$ 上 单调递减	在 $\underline{\hspace{1cm}} [-\pi + 2k\pi, 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ $\underline{\hspace{1cm}}$ 上单调递增; 在 $\underline{\hspace{1cm}}$ $[2k\pi, \pi + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ $\underline{\hspace{1cm}}$ 上单调递减

零点	$k\pi, k \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
对称轴	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$	$x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$
对称中心	$(k\pi, 0) (k \in \mathbf{Z})$	$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$

考点2 正切函数的图象与性质

解析式	$y = \tan x$
图像	
定义域	$\left\{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{ 且 } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$
值域	\mathbf{R}
最小正周期	<u> π </u>
奇偶性	<u> 奇 </u> 函数
单调性	在每一个区间 <u> $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ </u> 上都单调递增
对称性	对称中心 <u> $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$ </u>

考点3 三角函数的伸缩偏移变换及三角函数型的图象与性质

函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$ 的图象变换	<div> <div> <p>方法一(先平移后伸缩)</p> <p>画出$y = \sin x$的图象</p> <p>向左($\varphi > 0$)或向右($\varphi < 0$) 平移①_____个单位长度</p> <p>得到$y = \sin(x + \varphi)$的图象</p> <p>横坐标变成原来的②_____倍</p> <p>得到$y = \sin(\omega x + \varphi)$的图象</p> <p>纵坐标变成原来的③_____倍</p> <p>得到$y = A \sin(\omega x + \varphi)$的图象</p> </div> <div> <p>方法二(先伸缩后平移)</p> <p>画出$y = \sin x$的图象</p> <p>横坐标变成原来的④_____倍</p> <p>得到$y = \sin \omega x$的图象</p> <p>向左($\varphi > 0$)或向右($\varphi < 0$) 平移⑤_____个单位长度</p> <p>得到$y = \sin(\omega x + \varphi)$的图象</p> <p>纵坐标变成原来的⑥_____倍</p> <p>得到$y = A \sin(\omega x + \varphi)$的图象</p> </div> </div>																
函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ ($A > 0, \omega > 0$)的图象 性质	<table> <tr> <td>函数</td><td>$y = A \sin(\omega x + \varphi) + B (A > 0, \omega > 0)$</td></tr> <tr> <td>定义域</td><td>\mathbf{R}</td></tr> <tr> <td>值域</td><td>⑦_____</td></tr> <tr> <td>最值</td><td> 由$\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得$y_{\max} = A + B$ 由$\omega x + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得$y_{\min} = -A + B$ </td></tr> <tr> <td>最小正周期</td><td>⑧ $T =$ _____</td></tr> <tr> <td>奇偶性</td><td> 当$\varphi =$⑨_____ ($k \in \mathbf{Z}$), 且$B = 0$时, 函数为奇函数; 当$\varphi =$⑩_____ ($k \in \mathbf{Z}$)时, 函数为偶函数 </td></tr> <tr> <td>单调性</td><td> 当$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$时, 函数⑪_____ 当$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$时, 函数⑫_____ </td></tr> <tr> <td>对称性</td><td> 由$\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$解得对称轴; 由$\omega x + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 解得对称中心横坐标, 对称中心纵坐标为⑬_____ </td></tr> </table>	函数	$y = A \sin(\omega x + \varphi) + B (A > 0, \omega > 0)$	定义域	\mathbf{R}	值域	⑦_____	最值	由 $\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $y_{\max} = A + B$ 由 $\omega x + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $y_{\min} = -A + B$	最小正周期	⑧ $T =$ _____	奇偶性	当 $\varphi =$ ⑨_____ ($k \in \mathbf{Z}$), 且 $B = 0$ 时, 函数为奇函数; 当 $\varphi =$ ⑩_____ ($k \in \mathbf{Z}$)时, 函数为偶函数	单调性	当 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, 函数⑪_____ 当 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, 函数⑫_____	对称性	由 $\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 解得对称轴; 由 $\omega x + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 解得对称中心横坐标, 对称中心纵坐标为⑬_____
函数	$y = A \sin(\omega x + \varphi) + B (A > 0, \omega > 0)$																
定义域	\mathbf{R}																
值域	⑦_____																
最值	由 $\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $y_{\max} = A + B$ 由 $\omega x + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $y_{\min} = -A + B$																
最小正周期	⑧ $T =$ _____																
奇偶性	当 $\varphi =$ ⑨_____ ($k \in \mathbf{Z}$), 且 $B = 0$ 时, 函数为奇函数; 当 $\varphi =$ ⑩_____ ($k \in \mathbf{Z}$)时, 函数为偶函数																
单调性	当 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, 函数⑪_____ 当 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, 函数⑫_____																
对称性	由 $\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 解得对称轴; 由 $\omega x + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 解得对称中心横坐标, 对称中心纵坐标为⑬_____																

【答案】① $|\varphi|$; ② $\frac{1}{\omega}$; ③ A ; ④ $\frac{1}{\omega}$; ⑤ $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$; ⑥ A ; ⑦ $[-A + B, A + B]$; ⑧ $\frac{2\pi}{\omega}$; ⑨ $k\pi$; ⑩ $\frac{\pi}{2} + k\pi$; ⑪单调递增; ⑫单调递减; ⑬ B

专题 09 解三角形

考点 1 正弦定理、余弦定理

在 $\triangle ABC$ 中,若角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c,R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径,则

	正弦定理	余弦定理
文字语言	在一个三角形中,各边和它所对角的 <u>正弦值</u> 的比相等,等于 <u>该三角形外接圆的直径</u> .	三角形中任何一边的平方,等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的 <u>两倍</u> .
公式	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
常见变形	(1) $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$. (2) $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$ (3) $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ (4) $a \sin B = b \sin A, b \sin C = c \sin B, a \sin C = c \sin A$.	$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$ $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$

考点 2 余弦定理及其推论的应用

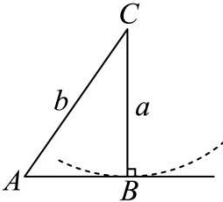
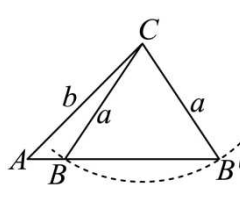
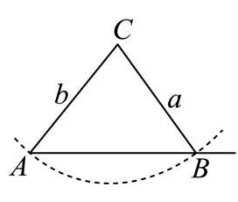
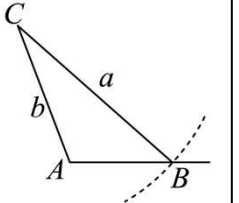
- (1) 利用余弦定理的变形判定角
- 在 $\triangle ABC$ 中, $c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow C$ 为直角; $c^2 > a^2 + b^2 \Leftrightarrow C$ 为钝角; $c^2 < a^2 + b^2 \Leftrightarrow C$ 为锐角.
- (2) 应用余弦定理我们可以解决两类解三角形问题.

①已知三边，求 三角。

②已知 两边 及 一角，求第三边和其他两个角。

考点3 解的情况

在 $\triangle ABC$ 中，已知 a 、 b 和 A 时，解的情况如下：

	A 为锐角			A 为钝角或直角
图形				
关系式	$a = b \sin A$	$b > a > b \sin A$	$a \geq b$	$a > b$ / $b < a$
解的个数	<u>一解</u>	两解	<u>一解</u>	一解

考点4 任意三角形的面积公式为

(1) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$ ，即任意三角形的面积等于任意两边与它们夹角的正弦的乘积的一半。

(2) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah$ ，其中 a 为 $\triangle ABC$ 的一边长，而 h 为该边上的高。

考点5 三角形中的三角变换

(1) 角的变换：因为在 $\triangle ABC$ 中， $A+B+C=\pi \Leftrightarrow C=\pi-(A+B) \Leftrightarrow \frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2} \Leftrightarrow 2C=2\pi-2(A+B)$ ，
所以 $\sin(A+B) = \sin C$ ， $\cos(A+B) = -\cos C$ ， $\tan(A+B) = -\tan C$ ，
 $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$ 。

(2) 三角形边角关系定理及面积公式： $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = r \cdot p = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 。（ r 为三角形内切圆半径， $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ）

专题 10 函数的概念及其表示

考点 1 函数的概念

设 A, B 是非空的数集, 如果按照某种确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的 任意一个数 x , 在集合 B 中都有 唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数, 记作 $y = f(x), x \in A$.

考点 2 函数三要素

(1) 一般地, 对于函数 $y = f(x), x \in A$, 则称 A 为函数的 定义域, 称集合 $\{y | y = f(x), x \in A\}$ 为函数的值域.

(2) 函数的三要素指: 定义域, 对应法则, 值域.

(3) 两个函数相同指两个函数的三要素全部相同.

考点 3 函数相等

一般地, 如果两个函数表达式表示的函数 定义域 相同, 对应关系 也相同 (即对自变量的每一个值, 两个函数表达式得到的函数值都相等), 则称这两个函数表达式表示的就是同一个函数

考点 4 具体函数的定义域问题

①: 分式函数: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, 定义域是 $g(x) \neq 0$, 分母不为 0.

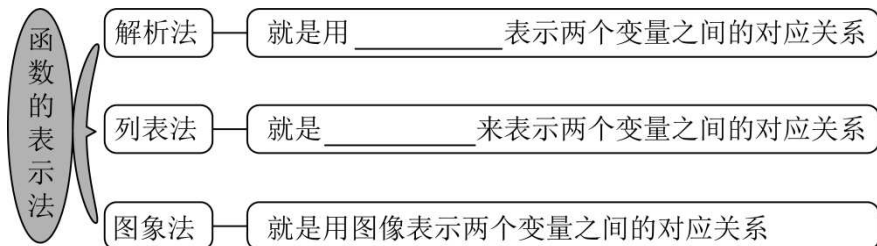
②: 0 次幂类型: $y = [f(x)]^0$, 定义域是 $f(x) \neq 0$, 底数不为 0.

③: 根式类型:

$\begin{cases} y = \sqrt[n]{f(x)}, \text{定义域为 } f(x) \geq 0, \text{偶次根式被开方数为非负数.} \\ y = \sqrt[n]{f(x)}, \text{定义域为 } R, \text{奇次根式被开方数为 } R. \end{cases}$

④: 对数函数: 真数大于 0

考点 5 函数的表示方法



解析式；列出表格

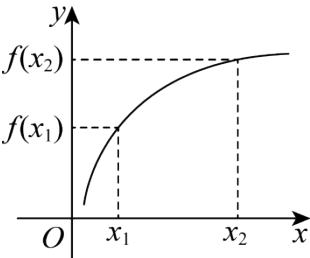
考点 6 分段函数

如果一个函数，在其定义域内，对于自变量的不同取值区间，有不同的对应方式，则称其为分段函数.

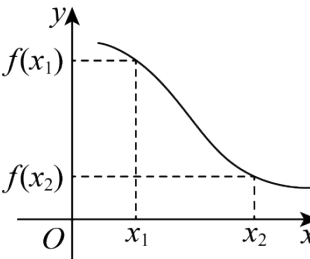
专题 11 函数的基本性质

考点 1 函数的单调性与单调区间

设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D ，区间 $I \subseteq D$ ，如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则称 $y = f(x)$ 在区间 I 上是增函数，（也称在区间 I 上单调递增），如图所示.



当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，则称 $y = f(x)$ 在区间 I 上是减函数，（也称在区间 I 上单调递减）如图所示.



两种情况下，都称函数在区间 I 上具有单调性（区间 I 称为函数的单调区间，也可分别称为单调递增区间和单调递减区间）

考点 2 函数的最值

最值	最大值	最小值
条件	函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I ，存在实数 M 满足：	
	(1) 对于任意的 $x \in I$ ，都有 <u>$f(x) \leq M$</u> (2) 存在 $x_0 \in I$ ，使 <u>$f(x_0) = M$</u>	(1) 对任意 $x \in I$ ，都有 <u>$f(x) \geq M$</u> (2) 存在 $x_0 \in I$ ，使 <u>$f(x_0) = M$</u>

结论	M 是函数 $y = f(x)$ 的最大值	M 是函数 $y = f(x)$ 的最小值
----	-------------------------	-------------------------

考点3 单调性的常见运算

(1) 单调性的运算

- ① 增函数 (↗) + 增函数 (↗) = 增函数 ↗
- ② 减函数 (↘) + 减函数 (↘) = 减函数 ↘
- ③ $f(x)$ 为 ↗, 则 $-f(x)$ 为 ↘, $\frac{1}{f(x)}$ 为 ↘
- ④ 增函数 (↗) - 减函数 (↘) = 增函数 ↗
- ⑤ 减函数 (↘) - 增函数 (↗) = 减函数 ↘
- ⑥ 增函数 (↗) + 减函数 (↘) = 未知 (导数)

(2) 复合函数的单调性

函数 $f(x) = h(g(x))$, 设 $u = g(x)$, 叫做内函数, 则 $f(x) = h(u)$ 叫做外函数,

$\begin{cases} \text{内函数} \uparrow, \text{外函数} \uparrow, \Rightarrow \text{复合函数} \uparrow \\ \text{内函数} \downarrow, \text{外函数} \downarrow, \Rightarrow \text{复合函数} \uparrow \\ \text{内函数} \uparrow, \text{外函数} \downarrow, \Rightarrow \text{复合函数} \downarrow \\ \text{内函数} \downarrow, \text{外函数} \uparrow, \Rightarrow \text{复合函数} \downarrow \end{cases} \Rightarrow \text{结论: 同增异减}$

考点4 函数的奇偶性

奇偶性	定义	图象特点
偶函数	一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果对 D 内任意一个 x , 都有 $-x \in D$, 且 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 是偶函数	关于 y 轴 对称
奇函数	一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果对 D 内任意一个 x , 都有 $-x \in D$, 且 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 是奇函数	关于 原点 对称

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$	$f(x)-g(x)$	$f(x)g(x)$	$f[g(x)]$
偶函数	偶函数	偶函数	偶函数	偶函数	偶函数
偶函数	奇函数	不能确定	不能确定	奇函数	偶函数
奇函数	偶函数	不能确定	不能确定	奇函数	偶函数
奇函数	奇函数	奇函数	奇函数	偶函数	奇函数

考点 5 函数的周期性

①周期函数：一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，如果存在一个____**非零常数 T** ____，使得对每一个 $x \in D$ 都有 $x+T \in D$ ，且____ **$f(x+T) = f(x)$** ____，那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数。____**非零常数 T** ____叫做这个函数的周期。

②最小正周期：如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的____**正数**____，那么这个最小____**正数**____就叫做 $f(x)$ 的____**最小正周期**____。

若 $f(x+a) = f(x)$ ，则 $f(x)$ 的周期为： $T = |a|$

若 $f(x+a) = f(x+b)$ ，则 $f(x)$ 的周期为： $T = |a-b|$

若 $f(x+a) = -f(x)$ ，则 $f(x)$ 的周期为： $T = |2a|$ （周期扩倍问题）

若 $f(x+a) = \pm \frac{1}{f(x)}$ ，则 $f(x)$ 的周期为： $T = |2a|$ （周期扩倍问题）

考点 6 函数的对称性

轴对称

①若 $f(x+a) = f(-x)$ ，则 $f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{a}{2}$

②若 $f(x+a) = f(-x+b)$ ，则 $f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{a+b}{2}$

点对称

①若 $f(x+a) = -f(-x)$ ，则 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

②若 $f(x+a) + f(-x+b) = c$ ，则 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

考点 7 周期性对称性综合问题

①若 $f(a+x)=f(a-x)$, $f(b+x)=f(b-x)$, 其中 $a \neq b$, 则 $f(x)$ 的周期为: $T=2|a-b|$

②若 $f(a+x)=-f(a-x)$, $f(b+x)=-f(b-x)$, 其中 $a \neq b$, 则 $f(x)$ 的周期为:

$$T=2|a-b|$$

③若 $f(a+x)=f(a-x)$, $f(b+x)=-f(b-x)$, 其中 $a \neq b$, 则 $f(x)$ 的周期为:

$$T=4|a-b|$$

考点 8 奇偶性对称性综合问题

①已知 $f(x)$ 为偶函数, $f(x+a)$ 为奇函数, 则 $f(x)$ 的周期为: $T=4|a|$

②已知 $f(x)$ 为奇函数, $f(x+a)$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 的周期为: $T=4|a|$

专题 12 指数对数幂函数

考点 1 根式的概念及性质

(1) 概念: 式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做 **根式**, 这里 n 叫做根指数, a 叫做被开方数.

(2) ① **负数** 没有偶次方根.

② 0 的任何次方根都是 0, 记作 $\sqrt[n]{0}=0$.

③ $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ($n \in N^*$, 且 $n > 1$).

④ $\sqrt[n]{a^n} = a$ (n 为大于 1 的奇数).

⑤ $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$ (n 为大于 1 的偶数).

考点 2 分数的指数幂的意义

分数指数幂	正分数指数幂	规定: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($a > 0, m, n \in N^*$, 且 $n > 1$)
	负分数指数幂	规定: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ ($a > 0, m, n \in N^*$, 且 $n > 1$)

	性质	0 的正分数指数幂等于 <u>0</u> ，0 的负分数指数幂 <u>无意义</u>
--	----	--

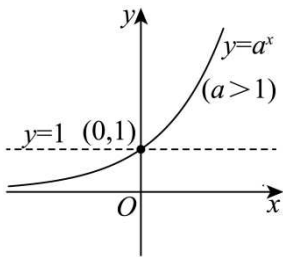
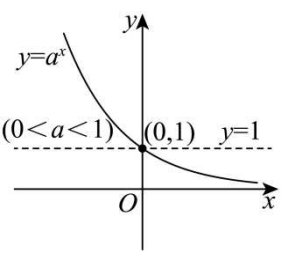
考点 3 实数指数幂的运算性质

- (1) $a^r a^s = \underline{a^{r+s}}$. ($a > 0, r, s \in \mathbf{R}$).
- (2) $(a^r)^s = \underline{a^{rs}}$. ($a > 0, r, s \in \mathbf{R}$).
- (3) $(ab)^r = \underline{a^r b^r}$. ($a > 0, b > 0, r \in \mathbf{R}$).

考点 4 指数函数的一般形式

9. 一般地，函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 叫做指数函数，其中 x 是自变量，定义域为 \mathbf{R} .

考点 5 指数函数的图象及性质

		$a > 1$	$0 < a < 1$
图象			
性质	定义域	\mathbf{R}	
	值域	$(0, +\infty)$	
	过定点	过点 <u>(0, 1)</u> ，即 $x = \underline{0}$ 时， $y = \underline{1}$	
	函数值的变化	当 $x > 0$ 时， <u>$y > 1$</u> 当 $x < 0$ 时， <u>$0 < y < 1$</u>	当 $x > 0$ 时， <u>$0 < y < 1$</u> 当 $x < 0$ 时， <u>$y > 1$</u>
	单调性	是 \mathbf{R} 上的 <u>增函数</u>	是 \mathbf{R} 上的 <u>减函数</u>

考点 6 解指数不等式

- (1) 指数不等式的类型为 $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$).
- ① 当 $a > 1$ 时， $f(x) > g(x)$ ；
- ② 当 $0 < a < 1$ 时， $f(x) < g(x)$.
- (2) 含指数式的不等式的一般解法：先将不等式的两边化成 同底 的指数式，再利用指数函数的单调


 **添加老师微信，领取2026初高全套资料**   

公众号：《低调的自学大王》



2026小、初、高最强教辅资料站
2026初、高实时网课、名师讲义
2026教辅、课件、题库、同步讲义
2026全国各地期中、期末、月考试
题
备战2026中考、高考讲义、真题

扫描二维码了解更多信息

 自学大王资料导航



手机扫一扫，查看文件

小猴云印

线上打印5分/页
海量资料随心印

自学大王

满2.9顺丰包邮
彩印黑白同价

五大自营工厂 就近发货



扫码打印 全国多地次日达
20点前下单当天发货

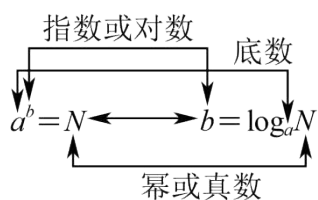
性去掉底数，转化为熟悉的不等式求解.

考点 7 比较大小的方法

- (1) 对于同底数不同指数的两个幂的大小，利用__**指数函数的单调性**__来判断；
- (2) 对于底数不同指数相同的两个幂的大小，利用__**指数函数的图象的变化规律**__来判断；
- (3) 对于底数不同指数也不同的两个幂的大小，则通过__**中间值**__来判断.

考点 8 对数的定义

如果 $a^b = N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)，那么 b 叫作以 a 为底，(正)数 N 的对数，记作__ **$b = \log_a N$** __，这里， a 叫作对数的__**底数**__， N 叫作对数的__**真数**__.



考点 9 常用对数与自然对数

通常将以 10 为底的对数叫作常用对数，并把 $\log_{10} N$ 记作__ **$\lg N$** __，以无理数 $e = 2.71828\cdots$ 为底数的对数称为自然对数，并且把 $\log_e N$ 记为__ **$\ln N$** __.

考点 10 对数的基本性质及对数恒等式

性质 1	__ 负数 __和__ 零 __没有对数
性质 2	1 的对数是__ 0 __，即 $\log_a 1 =$ __ 0 __ ($a > 0, a \neq 1$)
性质 3	底数的对数是__ 1 __即 $\log_a a =$ __ 1 __ ($a > 0, a \neq 1$)

对数恒等式: $a^{\log_a N} =$ __ **N** __, $\log_a a^N =$ __ **N** __

考点 11 对数的运算性质

如果 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, 那么:

- (1) $\log_a(MN) =$ __ **$\log_a M + \log_a N$** __;
- (2) $\log_a \frac{M}{N} =$ __ **$\log_a M - \log_a N$** __;
- (3) $\log_a M^n =$ __ **$n \log_a M$** ($n \in R$)__.

推广: $\log_a(N_1 N_2 \cdots N_k) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \cdots + \log_a N_k$ ($N_1, N_2, \cdots, N_k > 0$).

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b, \log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b, \log_{\frac{m}{a^n}} b = \log_a b^{\frac{n}{m}}$$

考点 12 换底公式

换底公式： $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$ ；

推广 1：对数的倒数式 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \Rightarrow \log_a b \cdot \log_b a = 1$

推广 2： $\log_a b \log_b c \log_c a = 1 \Rightarrow \log_a b \log_b c \log_c d = \log_a d$ 。

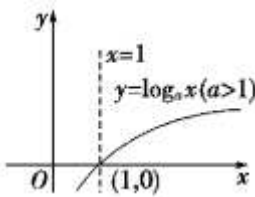
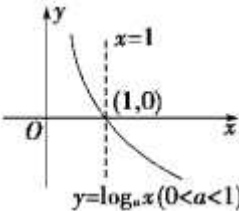
考点 13 对数函数的一般形式及定义域

一般地，函数 $y = \log_a x (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$ 叫作对数函数，其中 x 是自变量， x 的范围是 $(0, +\infty)$

对数函数的定义域

定义域是使解析式有意义的自变量的取值集合，求与对数函数有关的定义域问题时，要注意对数函数的概念，若自变量在真数上，则必须保证真数 **大于 0** ;若自变量在底数上，应保证底数 **大于 0 且不等于 1**

考点 14 对数函数的图象及性质

		$a > 1$	$0 < a < 1$
图象			
性 质	定义域	$(0, +\infty)$	
	值域	\mathbb{R}	
	过定点	过定点 (1,0) ，即 $x = 1$ 时， $y = 0$	
	函数值的	当 $0 < x < 1$ 时， $y < 0$	当 $0 < x < 1$ 时， $y > 0$

	变化	当 $x > 1$ 时, <u>$y > 0$</u>	当 $x > 1$ 时, <u>$y < 0$</u>
	单调性	是 $(0, +\infty)$ 上的 <u>增函数</u>	是 $(0, +\infty)$ 上的 <u>减函数</u>

考点 15 解对数不等式

(1) 形如 $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ 的不等式, 借助函数 $y = \log_a x$ 的单调性求解, 如果 a 的取值不确定, 需分 $a > 1$ 与 $0 < a < 1$ 两种情况讨论.

(2) 形如 $\log_a f(x) > b$ 的不等式, 应将 b 化为以 a 为底数的对数式的形式, 再借助函数 $y = \log_a x$ 的单调性求解.

(3) 形如 $\log_a f(x) > \log_b g(x)$ 的不等式, 基本方法是将不等式两边化为同底的两个对数值, 利用对数函数的单调性来脱去对数符号, 同时应保证真数大于零, 取交集作为不等式的解集.

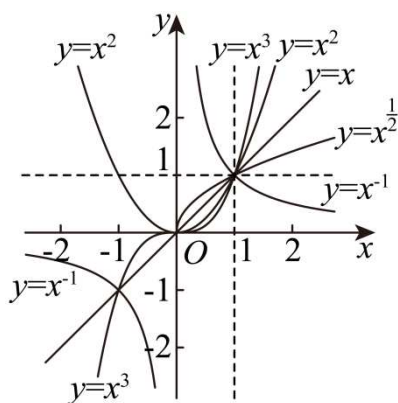
(4) 形如 $f(\log_a x) > 0$ 的不等式, 可用换元法 (令 $t = \log_a x$), 先解 $f(t) > 0$, 得到 t 的取值范围. 然后再解 x 的范围.

考点 16 幂函数的定义及一般形式

一般地, 函数 $y = x^\alpha$ 叫做幂函数, 其中 x 是自变量, α 是常数.

考点 17 幂函数的图象和性质

(1) 常见的五种幂函数的图象



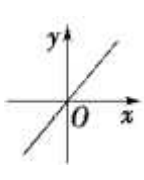
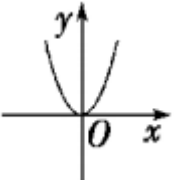
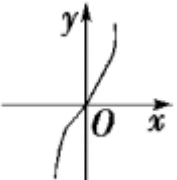
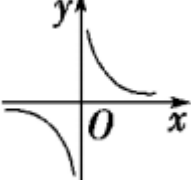
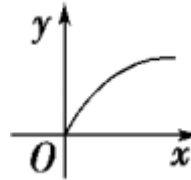
(2) 幂函数的性质

①所有的幂函数在区间 $(0, +\infty)$ 上都有定义, 因此在第一象限内都有图象, 并且图象都通过点 $(1,1)$.

②如果 $\alpha > 0$, 则幂函数的图象通过原点, 并且在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

③如果 $\alpha < 0$, 则幂函数在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 且在第一象限内: 当 x 从右边趋向于原点时, 图象在 y 轴右方且无限地逼近 y 轴; 当 x 无限增大时, 图象在 x 轴上方且无限地逼近 x 轴.

(3) 常见的五种幂函数的性质

解析式	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = \frac{1}{x}$	$y = x^{\frac{1}{2}}$
图象					
定义域	<u> \mathbf{R} </u>	<u> \mathbf{R} </u>	<u> \mathbf{R} </u>	<u> $\{x x \neq 0\}$ </u>	<u> $[0, +\infty)$ </u>
值域	<u> \mathbf{R} </u>	<u> $[0, +\infty)$ </u>	<u> \mathbf{R} </u>	<u> $\{y y \neq 0\}$ </u>	<u> $[0, +\infty)$ </u>
奇偶性	<u> 奇函数 </u>	<u> 偶函数 </u>	<u> 奇函数 </u>	<u> 奇函数 </u>	<u> 非奇非偶函数 </u>
单调性	<u> 增 </u>	<u> $(-\infty, 0]$上减, $(0, +\infty)$上增 </u>	<u> 增 </u>	<u> $(-\infty, 0)$上减, $(0, +\infty)$上减 </u>	<u> 增 </u>
定点	(1,1)				

考点 18 幂函数的奇偶性

$$f(x) = x^\alpha \begin{cases} \alpha \text{ 为整数} \begin{cases} \alpha \text{ 为偶数, } f(x) \text{ 为偶函数} \\ \alpha \text{ 为奇数, } f(x) \text{ 为奇函数} \end{cases} \\ \alpha \text{ 为分数, 设 } \alpha = \frac{q}{p} \begin{cases} p \text{ 为偶数时, } f(x) \text{ 为非奇非偶函数} \\ p \text{ 为奇数时} \begin{cases} q \text{ 为奇数, } f(x) \text{ 为奇函数} \\ q \text{ 为偶数, } f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

专题 13 函数的图象、函数与方程、函数模型

考点 1 函数图象的定义及描点法作图

将自变量的一个值 x_0 作为横坐标, 相应的函数值 $f(x_0)$ 作为纵坐标, 就得到了坐标平面上的一个点的坐标, 当自变量取遍定义域 A 内的每一个值时, 就得到一系列这样的点, 所有这些点组成的集合(点集)用符号表述为 $\{(x, y) | y=f(x), x \in A\}$, 所有这些点组成的图形就是函数的图象.

描点法作图

方法步骤: (1) 确定函数的定义域; (2) 化简函数的解析式; (3) 讨论函数的性质即奇偶性、周期性、单调性、最值(甚至变化趋势); (4) 描点连线, 画出函数的图象.

考点 2 图象问题解题思路 (判断奇偶性、特值、极限思想)

$$\textcircled{1} \sqrt{2} = 1.414, \sqrt{3} = 1.732, \sqrt{5} = 2.236, \sqrt{6} = 2.45, \sqrt{7} = 2.646$$

$$\textcircled{2} e = 2.71828, e^2 = 7.39, e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} = 1.65$$

$$\textcircled{3} \ln 1 = 0, \ln 2 = 0.69, \ln 3 = 1.1, \ln e = 1, \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{4} \sin 1 = 0.84, \cos 1 = 0.54, \sin 2 = 0.91, \cos 2 = -0.42$$

特别地: 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\sin x = x$

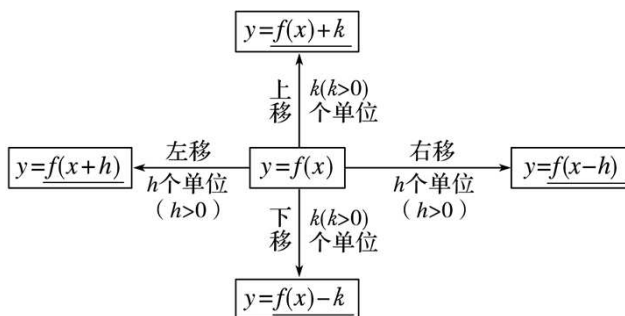
例如: $\sin 0.1 = 0.099 \approx 0.1$, $\sin 0.2 = 0.199 \approx 0.2$, $\sin 0.3 = 0.296 \approx 0.3$

当 $x \rightarrow 0$ 时 $\cos x = 1$

$$\cos 0.1 = 0.995 \approx 1, \cos(-0.2) = 0.980 \approx 1$$

考点 3 图象变换

(1) 平移变换



(2) 对称变换

① $y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{关于}x\text{轴对称}}$ $y=-f(x)$;

② $y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{关于}y\text{轴对称}}$ $y=f(-x)$;

③ $y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{关于原点对称}}$ $y=-f(-x)$;

④ $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) $\xrightarrow{\text{关于}y=x\text{对称}}$ $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$).

(3) 伸缩变换

① 把函数 $y=f(x)$ 图象的纵坐标不变, 横坐标伸长到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍得 $y=f(\omega x)$ ($0<\omega<1$)

② 把函数 $y=f(x)$ 图象的纵坐标不变, 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍得 $y=f(\omega x)$ ($\omega>1$)

③ 把函数 $y=f(x)$ 图象的横坐标不变, 纵坐标伸长到原来的 ω 倍得 $y=\omega f(x)$ ($\omega>1$)

④ 把函数 $y=f(x)$ 图象的横坐标不变, 纵坐标缩短到原来的 ω 倍得 $y=\omega f(x)$ ($0<\omega<1$)

(4) 翻折变换

① $y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{保留}x\text{轴上方图象, 将}x\text{轴下方图象翻折上去}}$ $y=|f(x)|$.

② $y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{保留}y\text{轴右边图象, 并作其关于}y\text{轴对称的图象}}$ $y=f(|x|)$.

考点 4 函数零点的定义

一般地, 对于函数 $y=f(x)$, 把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫作函数 $y=f(x)$ 的零点. 函数 $y=f(x)$ 的零点就是方程 $f(x)=0$ 的实数解, 也就是函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标.

方程、函数、函数图象之间的关系:

方程 $f(x)=0$ 有实数解 \Leftrightarrow 函数 $y=f(x)$ 的图象 与 x 轴有公共点 \Leftrightarrow 函数 $y=f(x)$ 有零点.

考点 5 函数零点存在性定理

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是 连续不断 的一条曲线, 且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内 至少有一个 零点, 即存在 $c \in (a,b)$, 使得 $f(c)=0$, 这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的解.

考点 6 函数单调性对零点个数的影响

如果一个连续函数是单调函数, 那么它的零点至多有一个. 因此分析一个函数零点的个数前, 可尝试判断函数是否单调

考点7 几个“不一定”与“一定”（假设在区间连续）

(1) 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，则 $f(x)$ “一定”存在零点，但“不一定”只有一个零点。要分析 $f(x)$ 的性质与图象，如果 $f(x)$ 单调，则“一定”只有一个零点

(2) 若 $f(a) \cdot f(b) > 0$ ，则 $f(x)$ “不一定”存在零点，也“不一定”没有零点。如果 $f(x)$ 单调，那么“一定”没有零点

(3) 如果 $f(x)$ 在区间 (a, b) 中存在零点，则 $f(a) \cdot f(b)$ 的符号是“不确定”的，受函数性质与图象影响。
如果 $f(x)$ 单调，则 $f(a) \cdot f(b)$ 一定小于 0

考点8 零点与单调性配合可确定函数的符号

$f(x)$ 是一个在 (a, b) 单增连续函数， $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的零点，且 $x_0 \in (a, b)$ ，则 $x \in (a, x_0)$ 时，
 $f(x) < 0$ ； $x \in (x_0, b)$ 时， $f(x) > 0$

考点9 证明零点存在的步骤

- (1) 将所证等式中的所有项移至等号一侧，以便于构造函数
- (2) 判断是否要对表达式进行合理变形，然后将表达式设为函数 $f(x)$
- (3) 分析函数 $f(x)$ 的性质，并考虑在已知范围内寻找端点函数值异号的区间
- (4) 利用零点存在性定理证明零点存在

考点10 三种函数模型的性质

函数 性质	$y=a^x$ ($a>1$)	$y=\log_a x$ ($a>1$)	$y=x^n$ ($n>0$)
在 $(0, +\infty)$ 上的增减性	单调递增	单调递增	单调递增
增长速度	越来越快	越来越慢	相对平稳
图象的变化	随 x 的增大逐渐表现为与 y 轴平行	随 x 的增大逐渐表现为与 x 轴平行	随 n 值变化而各有不同

考点11 常见的函数模型

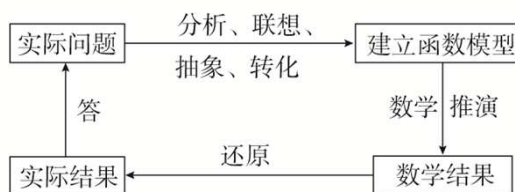
函数模型	函数解析式
一次函数模型	$f(x)=ax+b$ (a, b 为常数, $a \neq 0$)

二次函数模型	$f(x)=ax^2+bx+c(a, b, c \text{ 为常数}, a \neq 0)$
反比例函数模型	$f(x)=\frac{k}{x}+b(k, b \text{ 为常数且 } k \neq 0)$
指数函数模型	$f(x)=ba^x+c(a, b, c \text{ 为常数}, a>0 \text{ 且 } a \neq 1, b \neq 0)$
对数函数模型	$f(x)=b\log_a x+c(a, b, c \text{ 为常数}, a>0 \text{ 且 } a \neq 1, b \neq 0)$
幂函数模型	$f(x)=ax^\alpha+b(a, b, \alpha \text{ 为常数}, a \neq 0, \alpha \neq 0)$

考点 12 解函数模型问题的步骤

- (1)审题：弄清题意，分清条件和结论，理顺数量关系，初步选择数学模型.
- (2)建模：将自然语言转化为数学语言，将文字语言转化为符号语言，利用数学知识，建立相应的数学模型.
- (3)解模：求解数学模型，得出数学结论.
- (4)还原：将数学问题还原为实际问题.

以上过程用框图表示如下：



专题 14 导数

考点 1 平均变化率

对于函数 $y = f(x)$ ，设自变量 x 从 x_0 变化到 $x_0 + \Delta x$ ，相应地，函数值 y 从 $f(x_0)$ 变为 $f(x_0 + \Delta x)$ ，这时， x 的变化量为 Δx ， y 的变化量为 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。我们把比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ，即 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 叫做函数 $y = f(x)$ 从 x_0 到 $x_0 + \Delta x$ 的平均变化率。

考点 2 瞬时变化率

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 附近有定义，自变量在 $x = x_0$ 处的改变量为 Δx ，当 Δx 无限接近于 0 时，若平均变化率

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 无限接近于一个常数 k ，那么称常数 k 为函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率。

记作：当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时， $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow k$ 。

上述过程，通常也记作 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k$ 。

考点3 导数的定义

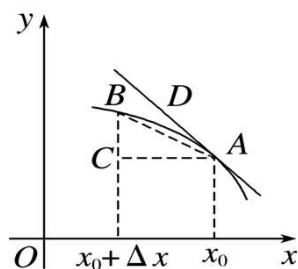
函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数定义式： $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

实质：函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数即函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的__瞬时变化率__.

考点4 割线斜率与切线斜率

设函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示，直线 AB 是过点 $A(x_0, f(x_0))$ 与点 $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ 的一条割线，此割

线的斜率是 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$



当点 B 沿曲线趋近于点 A 时，割线 AB 绕点 A 转动，它的极限位置为直线 AD ，直线 AD 叫做此曲线在点 A 处的__切线__。于是，当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，割线 AB 的斜率无限趋近于过点 A 的切线 AD 的斜率 k ，即 $k = \underline{f'}$

(x_0) _____ $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

考点5 导数的几何意义

$f'(x_0)$ 就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ （也称 $x = x_0$ 处）处的切线的__斜率__，从而根据直线的点斜式方程可知，切线的方程是__ $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ __.

考点6 常用基本初等函数的求导公式

原函数	导函数
$f(x) = c$ (c 为常数)	$f'(x) = \underline{0}$
$f(x) = x^a$	$f'(x) = \underline{ax^{a-1}}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \underline{\cos x}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = \underline{-\sin x}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \underline{a^x \ln a}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)
$f(x) = e^x$	$f'(x) = \underline{e^x}$

$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

考点 7 导数的运算法则

已知 $f(x), g(x)$ 为可导函数, 且 $g(x) \neq 0$.

- (1) $[f(x) \pm g(x)]' = \underline{f'(x) \pm g'(x)}$.
- (2) $[f(x)g(x)]' = \underline{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$, 特别地, $[Cf(x)]' = \underline{Cf'(x)}$.
- (3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, 特别地, $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

考点 8 复合函数的导数

- (1) 复合函数的概念

一般地, 对于两个函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$, 如果通过中间变量 u , y 可以表示成 x 的函数, 那么称这个函数为函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的复合函数, 记作 $y = \underline{f(g(x))}$.

- (2) 复合函数的求导法则

一般地, 对于由函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合而成的函数 $y = f(g(x))$, 它的导数与函数 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x = \underline{y'_u \cdot u'_x}$, 即 y 对 x 的导数等于 $\underline{y \text{ 对 } u \text{ 的导数与 } u \text{ 对 } x \text{ 的导数的乘积}}$.

考点 9 导函数与原函数的关系

条件	恒有	结论
函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上可导	$f'(x) > 0$	$f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增
	$f'(x) < 0$	$f(x)$ 在 (a, b) 上单调递减
	$f'(x) = 0$	$f(x)$ 在 (a, b) 上是常数函数

考点 10 利用导数判断函数单调性的步骤

第 1 步, 确定函数的定义域;

第 2 步, 求出导函数 $f'(x)$ 的零点;

第 3 步, 用 $f'(x)$ 的零点将 $f(x)$ 的定义域划分为若干个区间, 列表给出 $f'(x)$ 在各区间上的正负, 由此得出函数 $y=f(x)$ 在定义域内的单调性.

[常用结论]

1.若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增, 则 $x \in (a, b)$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立; 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递减, 则 $x \in (a, b)$ 时, $f'(x) \leq 0$ 恒成立.

2.若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上存在单调递增区间, 则 $x \in (a, b)$ 时, $f'(x) > 0$ 有解; 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上存在单调递减区间, 则 $x \in (a, b)$ 时, $f'(x) < 0$ 有解.

考点 11 极值的定义

极大值: 函数 $y = f(x)$ 在点 $x = b$ 的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x = b$ 附近其他点的函数值都 大, $f'(b) = 0$. 而且在点 $x = b$ 附近的左侧 $f'(x) > 0$, 右侧 $f'(x) < 0$. 我们把 b 叫做函数 $y = f(x)$ 的极大值点, $f(b)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的极大值.

极小值: 函数 $y = f(x)$ 在点 $x = a$ 的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x = a$ 附近其他点的函数值都 小, $f'(a) = 0$; 而且在点 $x = a$ 附近的左侧 $f'(x) < 0$, 右侧 $f'(x) > 0$, 我们把 a 叫做函数 $y = f(x)$ 的极小值点, $f(a)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的极小值.

求可导函数 $f(x)$ 的极值的步骤

- (1) 确定函数的定义域, 求导数 $f'(x)$;
- (2) 求方程 $f'(x) = 0$ 的根;
- (3) 列表;
- (4) 利用 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 随 x 的变化情况表, 根据极值点左右两侧单调性的变化情况求极值.

考点 12 极值与导数的关系

$f(x)$ 是极值点 $\Rightarrow f'(x) = 0$

$f'(x) = 0 \nRightarrow f(x)$ 是极值点, 即: $f'(x) = 0$ 是 $f(x)$ 为极值点的必要非充分条件

考点 13 函数的最值与导数

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 求 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值的步骤如下:

- (1) 求函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的 极值;
- (2) 将函数 $y = f(x)$ 的各 极值 与 端点 处的函数值 $f(a)$ 、 $f(b)$ 比较, 其中最大的一个为最大值, 最小的一个为最小值.

专题 15 数列

考点 1 数列的相关概念

- (1) 数列：按照__ **一定次序** __排成的一列数叫作数列.
- (2) 数列的项：数列中的每一个数都称为这个数列的__**项**__，各项依次称为这个数列的第 1 项（__**首项**__），第 2 项.....
- (3) 项数：组成数列的__**项的个数**__称为数列的项数

考点 2 数列的通项与通项公式

- (1) 通项：数列从首项起，每一项都与__**正整数**__对应，所以数列的一般形式可以写成 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ，其中 a_n 表示数列的第 n 项（也称 n 为 a_n 的序号），称为数列的__**通项**__，一般将整个数列简记为__ $\{a_n\}$ __.
- (2) 通项公式：如果数列第 n 项 a_n 与序号 n 之间的关系可以用 $a_n = f(n)$ 来表示，其中 $f(n)$ 是关于 n 的不含其他未知数的表达式，那么这个公式叫做这个数列的__**通项公式**__.

考点 3 数列的表示方法

列表法		列表格表示 n 与 a_n 的对应关系
图象法		把点 (n, a_n) 画在平面直角坐标系中
公式法	通项公式	把数列的通项使用公式表示的方法
	递推公式	使用初始值 a_1 和 $a_{n+1}=f(a_n)$ 或 a_1, a_2 和 $a_{n+1}=f(a_n, a_{n-1})$ 等表示数列的方法

考点 4 数列的分类

- 一般地，项数__**有限**__的数列称为有穷数列，项数__**无限**__的数列称为无穷数列. 有穷数列的最后一项一般也称为这个数列的__**末项**__.
- 判断数列的单调性，则需要从第 2 项起，观察每一项与它的前一项的大小关系，若满足__ $a_n < a_{n+1}$ __，则是递增数列；若满足__ $a_n > a_{n+1}$ __，则是递减数列；若满足__ $a_n = a_{n+1}$ __，则是常数列.

考点 5 最大 (小) 项问题

- (1) 利用数列单调性可以求数列中的最大 (小) 项问题的常见方法：
- ① 构造函数，确定函数的__**单调性**__，进一步求出数列的最值.
- ② 利用__ $\begin{cases} a_n \geq a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n-1} \end{cases} (n \geq 2)$ __求数列中的最大项 a_n ；利用__ $\begin{cases} a_n \leq a_{n+1} \\ a_n \leq a_{n-1} \end{cases} (n \geq 2)$ __求数列中的最小项 a_n . 当解不唯一时，比较各解大小即可确定.

(2) 利用数列的单调性确定变量的取值范围, 常利用以下等价关系:

数列 $\{a_n\}$ 递增 \Leftrightarrow $a_{n+1} > a_n$ 恒成立; 数列 $\{a_n\}$ 递减 \Leftrightarrow $a_{n+1} < a_n$ 恒成立, 通过分离变量转化为代数式的最值来解决.

考点 6 数列前 n 项和的定义及 a_n 与 S_n 的关系

一般地, 给定数列 $\{a_n\}$, 称 $S_n =$ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

检验 $n = 1$ 时的 a_1 是否满足 $n \geq 2$ 时的通项公式:

将 $n = 1$ 代入 $n \geq 2$ 时得到的通项公式 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 中, 如果计算结果与步骤 1 中求出的 a_1 相等, 那么数列的通项公式可以统一写成 $n \geq 2$ 时的表达式; 如果不相等, 则数列的通项公式需要用分段函数的形式表示, 即

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

考点 7 数列的递推关系

已知数列的首项(或前几项), 且数列的相邻两项或两项以上的关系都可以用一个公式来表示,

则称这个公式为数列的递推关系(递推公式或递归公式).

考点 8 累加法求通项公式

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + f(n)$, 其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数, 且 $f(n)$ 的前 n 项和可求, 就可以考虑使用累加法求通项公式.

考点 9 累乘法求通项公式

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n \cdot g(n)$, 其中 $g(n)$ 是关于 n 的函数, 且 $g(n)$ 的前 n 项积可求, 就可以考虑使用累乘法求通项公式.

考点 10 等差数列的定义

一般地, 如果数列 $\{a_n\}$ 从第2项起, 每一项与它的前一项之差都等于同一个常数 d , 即 $a_{n+1} - a_n = d$ 恒成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其中 d 称为等差数列的公差.

考点 11 等差数列通项公式的变形及推广

(1) $a_n = a_1 + (n-1)d (n \in \mathbb{N}^*)$,

(2) $a_n = a_m +$ $(n-m)d$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$)

(3) $d =$ $\frac{a_n - a_m}{n-m}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$, 且 $m \neq n$).

考点 12 等差中项

若 a, A, b 成等差数列, 则 A 是 a 与 b 的等差中项, 且有 $2A = \underline{a + b/b + a}$ 或 $A = \underline{\frac{a+b}{2}}$, 即如果三个数成等差数列, 那么等差中项等于另两项的算术平均数.

考点 13 下标性质

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $m + n = p + q (m, n, p, q \in N_+)$, 则 $a_m + a_n = \underline{a_p + a_q/a_q + a_p}$. 特别地, 若 $m + n = 2p (m, n, p \in N_+)$, 则有 $a_m + a_n = 2a_p$.

考点 14 等差数列构造新等差数列的性质

(1) 若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别是公差为 d, d' 的等差数列, 则有

数列	结论
$\{c + a_n\}$	公差为 <u>d</u> 的等差数列 (c 为任一常数)
$\{c \cdot a_n\}$	公差为 <u>cd</u> 的等差数列 (c 为任一常数)
$\{a_n + a_{n-k}\}$	公差为 <u>$2d$</u> 的等差数列 (k 为常数, $k \in N^*$)
$\{pa_n + qb_n\}$	公差为 <u>$pd + qd'$</u> 的等差数列 (p, q 为常数)

(2) 从等差数列中, 每隔一定的距离抽取一项, 组成的数列仍为 等差 数列.

考点 15 等差数列通项公式与函数关系

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = dn + (a_1 - d)$$

令 $K = d, B = a_1 - d, \Rightarrow a_n = Kn + B \Rightarrow$ 等差数列 $\{a_n\}$ 为一次函数

考点 16 等差数列的前 n 项和公式

已知量	首项、末项与项数	首项、公差与项数
求和公式	$S_n = \underline{\frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$	$S_n = \underline{na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}}$

考点 17 知三求二

等差数列的通项公式和前 n 项和公式中有五个量 a_1, d, n, a_n 和 S_n , 这五个量可以 " 知三求二 ". 一般是利用公式列出 基本量 a_1 和 d 的方程组, 解出 a_1 和 d , 便可解决问题. 解题时注意整体代换的思想.

考点 18 等差数列前 n 项和的性质

①等差数列中依次 k 项之和 $S_k, S_{2k}-S_k, S_{3k}-S_{2k}, \dots$ 组成公差为 k^2d 的等差数列.

②记 $S_{\text{偶}}$ 为所有偶数项的和, $S_{\text{奇}}$ 为所有奇数项的和. 若等差数列的项数为 $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则 $S_{2n} = n(a_n + a_{n+1})$, $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd$, $\frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ($S_{\text{奇}} \neq 0$); 若等差数列的项数为 $2n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$ (a_n 是数列的中间项), $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_n$, $\frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{n-1}{n}$ ($S_{\text{奇}} \neq 0$).

③ $\{a_n\}$ 为等差数列 $\Rightarrow \left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列.

④两个等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n, T_n 之间的关系为 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$ ($b_n \neq 0, T_{2n-1} \neq 0$).

⑤ $S_{m+n} = S_m + S_n + mnd$

考点 19 等差数列前 n 项和的最值

(1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,

当 $a_1 > 0, d < 0$ 时, S_n 有 最大 值, 使 S_n 取得最值的 n 可由不等式组 $\begin{cases} a_n \geq 0, \\ a_{n+1} \leq 0 \end{cases}$ 确定; 当 $a_1 < 0, d > 0$ 时,

S_n 有 最小 值, 使 S_n 取到最值的 n 可由不等式组 $\begin{cases} a_n \leq 0, \\ a_{n+1} \geq 0 \end{cases}$ 确定.

(2) $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$, 若 $d \neq 0$, 则从二次函数的角度看: 当 $d > 0$ 时, S_n 有 最小 值; 当 $d < 0$ 时, S_n 有 最大 值. 当 n 取最接近对称轴的正整数时, S_n 取到最值.

考点 20 证明数列为等差数列的方法

(1) $a_{n+1} - a_n = c$ (c 为常数) $\Rightarrow \{a_n\}$ 为等差数列

(2) 通项公式: $a_n = Kn + B$ (一次函数), 前 n 项和: $S_n = An^2 + Bn$ (无常数项的二次函数)

(3) 若 $2B = A + C$, 则 A, B, C 三个数成等差数列

考点 21 等比数列的定义

一般地, 如果数列 $\{a_n\}$ 从第 2 项起, 每一项与它的前一项之 比 都等于 同一个常数 q , 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ 恒成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 其中 q 称为等比数列的 公比.

考点 22 等比数列的通项公式及其推广

1、等比数列的通项公式: 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q ($q \neq 0$), 则通项公式为: $a_n = a_1 q^{n-1}$

2、通项公式的推广: $a_n = a_m q^{n-m}$ 或 $q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$

考点 23 等比中项

1、等比中项定义: 如果在 a 与 b 中间插入一个数 G , 使 a, G, b 成等比数列, 那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项, 即 G 是 a 与 b 的等比中项 $\Leftrightarrow a, G, b$ 成等比数列 \Leftrightarrow $G^2 = ab$

2、对等比中项概念的理解

(1) G 是 a 与 b 的等比中项, 则 a 与 b 的符号相同, 符号相反的两个实数不存在等比中项. 此时, $G = \pm \sqrt{ab}$, 即等比中项有两个, 且互为相反数.

(2) $G^2 = ab$ 时, G 不一定是 a 与 b 的等比中项. 例如 $0^2 = 5 \times 0$, 但 $0, 0, 5$ 不是等比数列;

(3) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 从第2项起, 每一项是它相邻两项的等比中项;

(4) 与等比数列中的任一项“等距离”的两项之积等于该项的平方, 即在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$

3、等差中项与等比中项区别

(1) 任意两数都存在等差中项, 但并不是任意两数都存在等比中项, 当且仅当两数同号且均不为0时才存在等比中项;

(2) 任意两数的等差中项是唯一的, 而若两数有等比中项, 则等比中项有两个, 且互为相反数.

考点 24 “下标和” 性质

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $m+n=p+q(m, n, p, q \in \mathbb{N}^*)$, 则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$;

(1) 特别地, $m+n=2k(m, n, k \in \mathbb{N}^*)$ 时, $a_m \cdot a_n = a_k^2$;

当 $m+n+s=p+q+t(m, n, p, q, s, t \in \mathbb{N}^*)$ 时, $a_m \cdot a_n \cdot a_s = a_p \cdot a_q \cdot a_t$

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是有穷数列, 则与首末两项“等距离”的两项的积等于首末两项的积, 即 $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \dots = a_k \cdot a_{n-k+1} = \dots$

考点 25 等比数列的性质拓展

(1) 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比为 q , 则数列 $\{\lambda a_n\}(\lambda \neq 0), \{\frac{1}{a_n}\}, \{a_n^2\}$ 都是等比数列, 且公比分别是 q , $\frac{1}{q}$, q^2 .

(2) 两等比数列合成数列的性质: 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是项数相同的等比数列, $\{a_n \cdot b_n\}$ 也是等比数列.

(3) 对于无穷等比数列 $\{a_n\}$, 若将其前 k 项去掉, 剩余各项仍为等比数列, 首项为 a_{k+1} , 公比为 q ;

若取出所有的 k 的倍数项, 组成的数列仍为等比数列, 首项为 a_k , 公比为 q^k ;

(4) 相隔等距离的项组成的数列仍是等比数列, 即 $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots$ 仍是等比数列, 公比为 q^m

$$(k, m \in \mathbb{N}^*)$$

考点 26 等比数列的前 n 项和公式

已知量	首项, 公比与项数	首项, 公比与末项
求和公式	$S_n = \begin{cases} na_1, q = 1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1 \end{cases}$	$S_n = \begin{cases} na_1, q = 1 \\ \frac{a_1-a_nq}{1-q}, q \neq 1 \end{cases}$

考点 27 等比数列前 n 项和公式的函数特征

(1) 当公比 $q \neq 1$ 时, 设 $A = \frac{a_1}{q-1}$, 等比数列的前 n 项和公式是 $S_n = A(q^n - 1)$, 即 S_n 是 n 的 指数型函数 (2)

当公比 $q = 1$ 时, 因为 $a_1 \neq 0$, 所以 $S_n = na_1$, S_n 是 n 的 正比例函数.

温馨提醒: 当 $q \neq 1$, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n$, 所以 $S_n = A - A \cdot q^n$ 的结构形式.

考点 28 等比数列前 n 项和的性质

已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 公比为 q , S_n 为其前 n 项和.

- (1) 若 $S_n = Aq^n + B$ ($A \neq 0, q \neq 0, q \neq 1$), 则 $A + B =$ 0;
- (2) 当 $S_n \neq 0$ 时, S_n , $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 为等比数列;
- (3) 若等比数列 $\{a_n\}$ 共 $2k$ 项, 记 $S_{\text{奇}}$ 为诸奇数项和, $S_{\text{偶}}$ 为诸偶数项和, 则 $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} =$ $-\frac{1}{q}/q^{-1}$;
- (4) 若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 $S_{n+m} = S_n +$ $q^n S_m$ ($n, m \in N_+$).

考点 29 证明数列为等比数列的方法

- (1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = c$ (c 为常数) $\Rightarrow \{a_n\}$ 为等比数列
- (2) 若 $B^2 = AC \Rightarrow B = \pm\sqrt{AC}$, 则 A, B, C 三个数成等比数列

考点 30 公式法求和

(1) 等差数列的前 n 项和公式 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

(2) 等比数列的前 n 项和公式 ① 当 $q = 1$ 时, $S_n = na_1$; ② 当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_nq}{1-q}$.

考点 31 倒序相加法求和

如果一个数列 $\{a_n\}$ 与首末两端等“距离”的两项的和 相等或等于同一个常数, 那么求这个数列的前 n 项和即可用倒序相加法求解.

考点 32 分组转化法求和

一个数列的通项公式是_____若干个等差或等比或可求和的数列_____组成的, 则求和时可用分组求和法, 分别求和后相加减.

考点 33 裂项相消法求和

把数列的通项拆成_____两项之差_____, 在求和时中间的一些项可以相互抵消, 从而求得前 n 项和.

考点 34 常见的裂项技巧

$$(1) \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right);$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n});$$

$$(3) \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$(4) \frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} = \frac{(2^{n+1}-1)-(2^n-1)}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}$$

$$(5) \text{指数型 } (a-1)a^n = a^{n+1} - a^n;$$

$$(6) \text{对数型 } \log_a \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log_a a_{n+1} - \log_a a_n.$$

$$(7) \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

$$(8) \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$(9) \frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}$$

$$(10) \frac{n+2}{n(n+1) \cdot 2^n} = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \text{ 等}$$

考点 35 错位相减法求和

如果一个数列的各项是由_____一个等差数列和一个等比数列的对应项之积_____构成的, 那么求这个数列的前 n 项和即可用错位相减法求解.

考点 36 万能公式法求和

形如 $c_n = (an+b) \cdot q^{n-1} (q \neq 1)$ 的数列求和为 $S_n = (An+B)q^n + C (q \neq 1)$,

其中 $A = \frac{a}{q-1}$, $B = \frac{b-A}{q-1}$, $C = -B$

考点 37 奇偶并项法求和

一个数列的前 n 项和中，可两两结合求解，则称之为并项求和. 形如 $a_n = (-1)^n f(n)$ 类型，可采用两项合并求解. 奇偶并项可采用两大类合并求解.

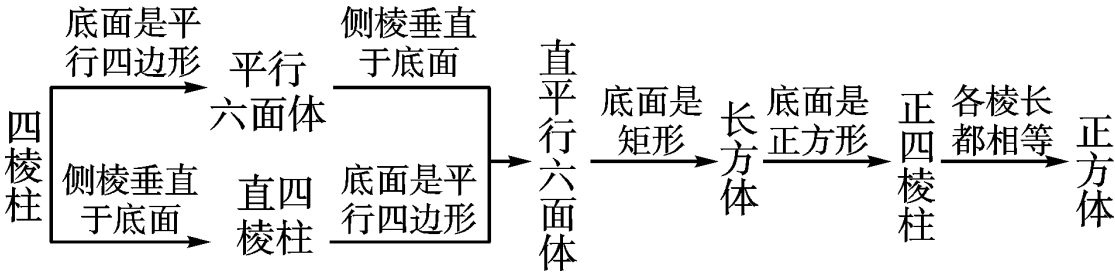
专题 16 立体几何

考点 1 棱柱、棱锥、棱台的结构特征

	棱柱	棱锥	棱台
图形			
定义	有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体	有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的多面体	用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面和截面之间那部分多面体
结构特征	底面互相平行且全等；侧面都是平行四边形；侧棱都相等且互相平行	底面是一个多边形；侧面都是三角形；侧面有一个公共顶点	上、下底面互相平行且相似；各侧棱延长线交于一点；各侧面为梯形
分类	<p>①按底面多边形的边数：三棱柱、四棱柱、五棱柱...</p> <p>②按侧棱与底面的关系：侧棱垂直于底面的棱柱叫做直棱柱，否则叫做斜棱柱. 底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱. 底面是平行四</p>	<p>①按底面多边形的边数：三棱锥、四棱锥、五棱锥...</p> <p>②正棱锥：底面是正多边形，并且顶点与底面中心的连线垂直</p>	<p>①按底面多边形的边数：三棱台、四棱台、五棱台...</p> <p>②正棱台：由正棱锥截得的棱台</p>

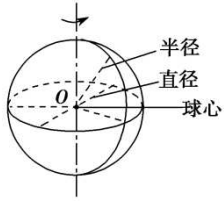
	边形的四棱柱也叫做平行六面体	于底面的棱锥	
--	----------------	--------	--

[注意]常见的几种四棱柱的结构特征及其之间的关系

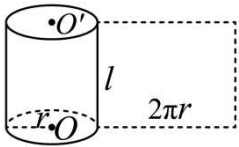
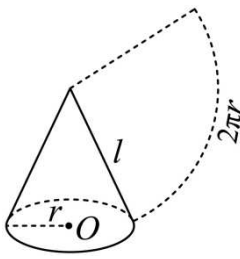
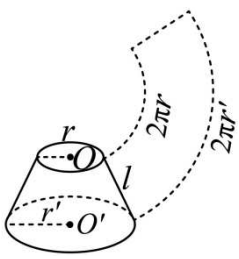


考点 2 圆柱、圆锥、圆台、球体的结构特征

分类	定义	图形及表示	表示
圆柱	以____ 矩形的一边所在直线 ____为旋转轴，其余三边旋转一周形成的面所围成的旋转体叫做圆柱．旋转轴叫做圆柱的轴； ____ 垂直 ____于轴的边旋转而成的圆面叫做圆柱的底面；____ 平行 ____于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的侧面；无论旋转到什么位置，平行于轴的边都叫做圆柱侧面的母线		圆柱用表示它的轴的字母表示，左图记作____ 圆柱OO' ____
圆锥	以____ 直角三角形的一条直角边 ____所在直线为旋转轴，其余两边旋转一周形成的面所围成的旋转体叫做圆锥		用表示圆锥轴的字母表示圆锥，左图记作____ 圆锥SO ____
圆台	用平行于____ 圆锥底面 ____的平面去截圆锥，底面与截面之间的部分叫做圆台		用表示它的轴的字母表示，左图记作____ 圆台O'O ____

球	半圆以它的___ 直径 ___所在直线为旋转轴，旋转一周形成的曲面叫做___ 球面 ___，球面所围成的旋转体叫做___ 球体 ___，简称球。半圆的圆心叫做球的___ 球心 ___；连接球心和球面上任意一点的线段叫做球的半径；连接球面上两点并且经过球心的线段叫做球的直径		球常用球心字母进行表示，左图可表示为___ 球 O ___
---	--	--	--------------------------------------

考点 3 圆柱、圆锥、圆台的展开图及侧面积

	圆柱	圆锥	圆台
侧面展开图			
侧面积公式	$S_{\text{圆柱侧}} = \underline{\underline{2\pi rl}}$	$S_{\text{圆锥侧}} = \underline{\underline{\pi rl}}$	$S_{\text{圆台侧}} = \underline{\underline{\pi(r+r')l}}$

其中 r, r' 为底面半径， l 为母线长。

[注意] ①几何体的侧面积是指（各个）侧面面积之和，而表面积是侧面积与所有底面面积之和；

②圆台、圆柱、圆锥的转化：当圆台的上底面半径与下底面半径相等时，得到圆柱；当圆台的上底面半径为零时，得到圆锥，由此可得 $S_{\text{圆柱侧}} = 2\pi r l r' = r S_{\text{圆台侧}} = \pi(r+r') l r' = 0 S_{\text{圆锥侧}} = \pi r l$ 。

考点 4 柱体、锥体、台体、球体的表面积和体积

几何体	表面积	体积（ S 是底面积， h 是高）
柱体（棱柱和圆柱）	$S_{\text{表面积}} = S_{\text{侧}} + 2S_{\text{底}}$	$V = Sh$
锥体（棱锥和圆锥）	$S_{\text{表面积}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}}$	$V = \frac{1}{3}Sh$

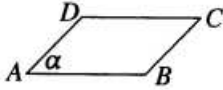

台体（棱台和圆台）	$S_{\text{表面积}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{上}} + S_{\text{下}}$	$V = \frac{1}{3}(S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}}S_{\text{下}}})h$
球（ R 是半径）	$S = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

考点 5 平面的概念与平面的表示方法

几何里所说的“平面”，是从课桌面、黑板面、平静的水面这样的一些物体中抽象出来的．几何里的平面是向四周**无限延展**的．

平面的画法与表示

（1）平面的画法

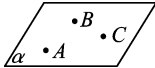
画法	我们常用矩形的直观图，即平行四边形来表示平面	
	当平面水平放置时，常把平行四边形的一边画成 横向	当平面竖直放置时，常把平行四边形的一边画成 竖向
图示		

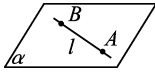
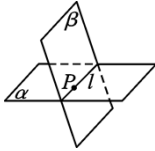
（2）平面的表示方法

- ①用希腊字母 α, β, γ 等表示平面，如平面 α 、平面 β 、平面 γ 等．
- ②用代表平面的平行四边形的四个顶点的大写英文字母表示，如平面 $ABCD$ ．
- ③用代表平面的平行四边形的相对的两个顶，点的大写英文字母表示，如平面 AC ，平面 BD ．

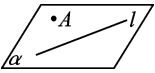
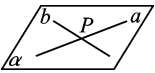
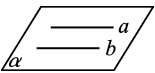
考点 6 平面的基本事实与推论

（1）基本性质

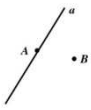
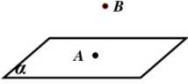
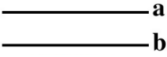
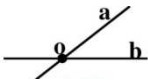
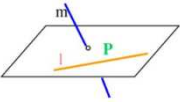
基本事实	文字语言	图形语言	符号语言	作用
基本事实 1	过 不在一条直线上 的三个点，有且只有一个平面		A, B, C 三点不共线 \Rightarrow 存在唯一的平面 α 使 $A, B, C \in \alpha$	确定平面；判定点线共面

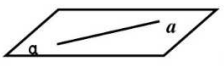
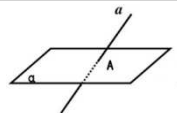
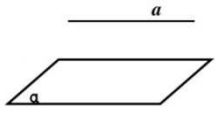

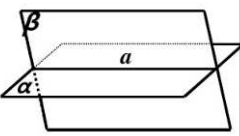
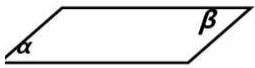
基本事实 2	如果一条直线上的 —— 两个点 ——在一个平面内，那么这条直线在这个平面内		$A \in l, B \in l, \text{ 且 } A \in \alpha, B \in \alpha \Rightarrow l \subset \alpha$	确定直线在平面内； 判定点在平面内
基本事实 3	如果两个不重合的平面有一个 公共点 ，那么它们有且只有一条过该点的公共直线		$P \in \alpha, \text{ 且 } P \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = l, \text{ 且 } P \in l$	判定两平面相交； 判定点在直线上

(2) 基本事实 1 与 2 的推论

推论	文字语言	图形语言	符号语言
推论 1	经过一条直线和这条直线外一点，有且只有一个 平面		$A \notin l \Rightarrow \text{有且只有一个平面 } \alpha, \text{ 使 } A \in \alpha, l \subset \alpha$
推论 2	经过 两条相交直线 ，有且只有一个平面		$a \cap b = P \Rightarrow \text{有且只有一个平面 } \alpha, \text{ 使 } a \subset \alpha, b \subset \alpha$
推论 3	经过 两条平行直线 ，有且只有一个平面		$a \parallel b \Rightarrow \text{有且只有一个平面 } \alpha, \text{ 使 } a \subset \alpha, b \subset \alpha$

考点 7 空间中点线面的位置关系及其表示

点与直线的位置关系	点在直线上	点不在直线上	
	$A \in a$	$B \notin a$	
点与面的位置关系	点在平面上	点不在平面上	
	$A \in \alpha$	$B \notin \alpha$	
线与线的位置关系			

	平行, $a \parallel b$	相交, $a \cap b = o$	l, m 异面
线与面的位置关系			
	$a \subset \alpha$	$a \cap \alpha = A$	$a \parallel \alpha$
面与面的位置关系			
	平行, $\alpha \parallel \beta$	相交, $\alpha \cap \beta = a$	α 与 β 重合

考点 8 平行直线的传递性、等角定理

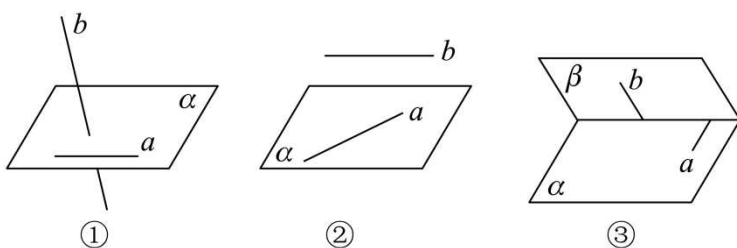
(1) 平行直线的传递性：平行于同一条直线的两条直线互相 **平行**，用符号可表示为：如果 $a \parallel b, a \parallel c$ ，则 **$b \parallel c$** 。

(2) 等角定理：如果一个角的两边与另一个角的两边分别对应 **平行**，并且方向相同，那么这两个角 **相等**。

考点 9 异面直线及所成角

(1) 定义：空间中既不 **平行** 也不 **相交** 的直线。

(2) 异面直线的画法。



(3) 异面直线所成的角

定义：一般地，如果 a, b 是空间中的两条异面直线，过空间中任意一点，分别作与 a, b **平行或重合** 的直线 a', b' ，则 a' 与 b' 所成角的大小，称为异面直线 a 与 b 所成角的大小。

范围： **$0^\circ < \theta \leq 90^\circ$** 。特别地，当 $\theta =$ **90°** 时， a 与 b 互相垂直，记作 **$a \perp b$** 。

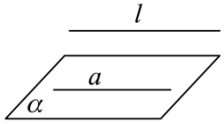
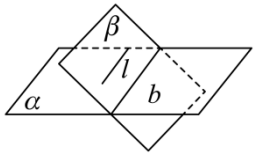
考点 10 证明线线平行的方法

① 三角形、四边形的中位线与第三边平行，

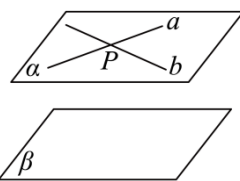
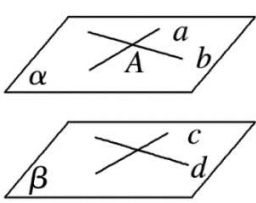
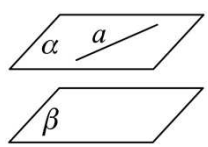
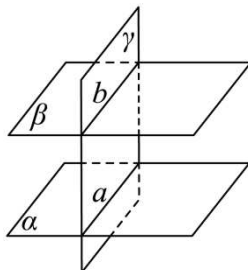
② 平行四边形的性质（对边平行且相等）

③ 内错角、同位角相等，两直线平行；同旁内角互补，两直线平行

考点 11 直线与平面平行的判定定理和性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	如果__平面外__的一条直线与__平面内__的一条直线平行, 那么这条直线与这个平面平行		$l // \alpha, a \subset \alpha,$ $l \not\subset \alpha \Rightarrow l // \alpha$
性质定理	如果一条直线与一个平面__平行__, 且经过这条直线的平面与这个平面相交, 那么这条直线就与两平面的__交线__平行		$l // \alpha, l \subset \beta,$ $\alpha \cap \beta = b \Rightarrow l // b$

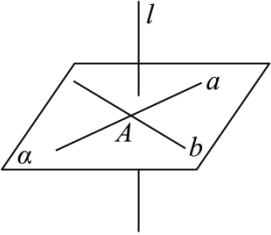
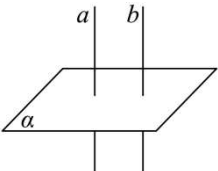
考点 12 平面与平面平行的判定定理和性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理 1	如果一个平面内有两条__相交直线__分别平行于另一个平面, 那么这两个平面平行.		$a // \beta, b // \beta,$ $a \cap b = P,$ $a \subset \alpha, b \subset \alpha \Rightarrow \alpha // \beta$
判定定理 2	如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面内的__两条直线__, 则这两个平面平行.		$a // c, b // d,$ $a \cap b = A, a, b \subset \alpha,$ $c, d \subset \beta \Rightarrow \alpha // \beta$
性质定理 1	两个平面平行, 则其中一个平面内的直线__平行__于另一个平面		$\alpha // \beta, a \subset \alpha \Rightarrow a // \beta$
性质定理 2	如果两个平行平面同时与第三个平面__相交__, 那么它们的__交线__平行		$\alpha // \beta, \alpha \cap \gamma = a,$ $\beta \cap \gamma = b \Rightarrow a // b$

考点 13 证明线线垂直的方法

- ①等腰三角形（等边三角形）的三线合一证线线垂直
- ②勾股定理的逆定理证线线垂直
- ③菱形、正方形的对角线互相垂直
- ④线面垂直、面面垂直的性质定理可证线线垂直

考点 14 线面垂直的判定定理与性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	如果一条直线与一个平面内的____ 两条相交直线 ____垂直, 则这条直线与这个平面垂直		若 $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $l \perp a$, $l \perp b$, $a \cap b = A$ ____, 则 $l \perp \alpha$
性质定理	如果两条直线垂直于同一个平面, 那么这两条直线____ 平行 ____		若 $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, 则____ $a \parallel b$ ____

考点 15 三垂线定理及其逆定理

(1) 射影:

已知空间中的平面 α 以及点 A , 过 A 作 α 的____**垂线**____ l , 设 l 与 α 相交于点 A' , 则 A' 就是点 A 在平面 α 内的____**射影**____(也称为投影); 空间中, 图形 F 上____**所有点**____在平面 α 内的____**射影**____所组成的集合 F' , 称为图形 F 在平面 α 内的射影.

(2) 三垂线定理:

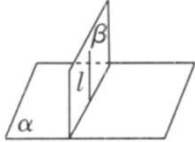
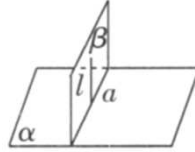
如果平面内的____**一条直线**____与平面的一条斜线在该平面内的____**射影**____垂直, 则它也和这条斜线垂直.

(3) 三垂线定理的逆定理:

如果平面内的一条直线和这个平面的一条____**斜线**____垂直, 则它也和这条斜线在该平面内的射影垂直.

考点 16 面面垂直的判定定理与性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
--	------	------	------

判定定理	一个平面过另一个平面的__ 垂 线 __, 则这两个平面垂直		$\left. \begin{matrix} l \perp \alpha \\ l \subset \beta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$
性质定理	两个平面垂直, 则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直		$\left. \begin{matrix} \alpha \perp \beta \\ l \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = a \\ l \perp a \end{matrix} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha$

考点 17 空间向量的定义、表示及有关概念

1. 空间向量的有关概念

(1) 定义: 空间中__**既有大小又有方向**__的量称为空间向量.

(2) 表示法:

①符号表示法: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \overrightarrow{AB}$.

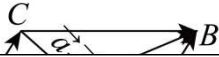
②几何表示法: 有向线段.

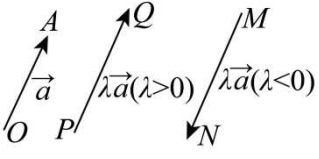
(3) 向量的模: 空间向量 \vec{a} 的大小(或长度)称为 \vec{a} 的模, 记为__ **$|\vec{a}|$** __.

(4) 几类特殊向量

概念	定义
单位向量	长度为__ 1 __的向量
零向量	模为__ 0 __的向量, 记作__ $\vec{0}$ __零向量的方向可以是任意的
相等向量	方向__ 相同 __且长度__ 相等 __的向量
相反向量	方向相反、长度相等的向量
共线向量(平行向量)	对于空间任意两个向量 $\vec{a}, \vec{b}(\vec{a} \neq \vec{0})$, 若__ $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ __, 其中 λ 为实数, 则 \vec{b} 与 \vec{a} 共线或平行, 记作__ $\vec{b} \parallel \vec{a}$ __. 零向量与任意向量__ 共线 __
共面向量	空间中的多个向量, 如果表示它们的有向线段通过平移后, 都能在同一平面内, 则称这些向量共面

考点 18 空间向量的线性运算

空间	加法	$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \underline{\underline{\overrightarrow{OB}}}$	
----	----	---	--

向量的线性运算	减法	$\vec{a} - \vec{b} = \vec{OA} - \vec{OC} = \underline{\vec{CA}}$	
	数乘	当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{OA} = \vec{PQ}$; 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{OA} = \vec{MN}$; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda \vec{a} = \vec{0}$	
运算律		(1) 交换律: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; (2) 结合律: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \underline{\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})}$, $\lambda(\mu \vec{a}) = \underline{(\lambda\mu) \vec{a}}$; (3) 分配律: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \underline{\lambda \vec{a} + \mu \vec{a}}$, $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \underline{\lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}}$	

考点 19 空间向量的数量积

(1) 空间向量的夹角及其表示

给定两个非零向量 \vec{a}, \vec{b} , 任意在空间中选定一点 O , 作 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 则大小在 $[0, \pi]$ 内的 $\angle AOB$ 称为 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角, 记作 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

特别地, 若 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$, 则称 \vec{a} 与 \vec{b} 垂直, 记作 $\vec{a} \perp \vec{b}$.

(2) 向量的数量积

两个非零向量 \vec{a}, \vec{b} 的数量积定义为 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

(3) 数量积的性质:

- ① $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; ② $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$;
 ③ $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$; ④ $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
 ⑤ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (交换律); ⑥ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (分配律).

考点 20 空间向量的有关定理

空间向量的有关定理

(1) 共线向量定理: 如果 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 且 $\vec{b} \parallel \vec{a}$, 则存在唯一的实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

(2) 共面向量定理: 如果两个向量 \vec{a}, \vec{b} 不共线, 则向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充要条件是, 存在唯一的实数对 (x, y) , 使 $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

由共面向量定理可得判断空间中四点是否共面的方法: 如果 A, B, C 三点不共线, 则点 P 在平面 ABC 内的充要条件是, 存在唯一的实数对 (x, y) , 使 $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$.

(3) 空间向量基本定理：如果空间中的三个向量 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 不共面，那么对空间中的任意一个向量 \vec{p} ，存在唯一的有序实数组 (x,y,z) ，使得 $\vec{p} = \underline{x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}}$ 。其中， $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 称为空间向量的一组基底。

考点 21 空间向量的坐标运算

已知空间向量 \vec{a} , \vec{b} ，其坐标形式为 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

向量运算	向量表示	坐标表示
加法	$\vec{a} + \vec{b}$	$\vec{a} + \vec{b} = \underline{(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)}$
减法	$\vec{a} - \vec{b}$	$\vec{a} - \vec{b} = \underline{(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)}$
数乘	$\lambda \vec{a}$	$\lambda \vec{a} = \underline{(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
数量积	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$
夹角余弦值	$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$	$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \underline{\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}$
模长	$ \vec{a} $	$ \vec{a} = \underline{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$

考点 22 空间向量平行与垂直

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，则

平行($\vec{a} \parallel \vec{b}$)	$\vec{a} \parallel \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{a_1 = \lambda b_1} \\ \underline{a_2 = \lambda b_2} \\ \underline{a_3 = \lambda b_3} \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$
垂直($\vec{a} \perp \vec{b}$)	$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \underline{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0}$ ____ (\vec{a} , \vec{b} 均为非零向量)

考点 23 直线的方向向量和平面的法向量

1. 直线的方向向量和平面的法向量

(1) 直线的方向向量：如果 l 是空间中的一条直线， \vec{v} 是空间中的一个非零向量，且表示 \vec{v} 的有向线段所在的直线与 l 平行或重合，则称 \vec{v} 为直线 l 的一个**方向向量**。

(2) 平面的法向量：如果 α 是空间中的一个平面， \vec{n} 是空间中的一个非零向量，且表示 \vec{n} 的有向线段所在的直线与平面 α 垂直，则称 \vec{n} 为平面 α 的一个**法向量**，此时也称 \vec{n} 与平面 α 垂直，记作 $\vec{n} \perp \alpha$ 。

2. 求平面法向量的步骤：

- (1) 设向量：设平面的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$.
- (2) 选向量：在平面内选取两个不共线向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
- (3) 列方程组：由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ 列出方程组.
- (4) 解方程组 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$.
- (5) 赋非零值：取 x, y, z 的其中一个为 **非零值** (常取 ± 1).
- (6) 得结论：得到平面的一个法向量.

考点 24 空间中的平行、垂直的位置关系的向量表示

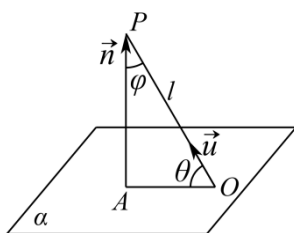
设 \vec{u}_1, \vec{u}_2 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, \vec{n}_1, \vec{n}_2 分别是平面 α, β 的法向量.	
线线平行	$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 // \vec{u}_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2$ 注: 此处不考虑线线重合的情况. 但用向量方法证明线线平行时, 必须说明两直线不重合.
线面平行	$l_1 // \alpha \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{n}_1 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0$ 注: 证明线面平行时, 必须说明直线不在平面内;
面面平行	$\alpha // \beta \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$ 注: 证明面面平行时, 必须说明两个平面不重合.
线线垂直	$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$
线面垂直	$l_1 \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{u}_1 // \vec{n}_1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \vec{u}_1 = \lambda \vec{n}_1$
面面垂直	$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

考点 25 空间向量求空间角 (线线角、线面角、面面角)

- (1) 求异面直线所成的角

若两异面直线 l_1, l_2 所成角为 θ , 它们的方向向量分别为 \vec{u}_1, \vec{u}_2 , 则有 $\cos \theta = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|}$.

- (2) 求直线和平面所成的角



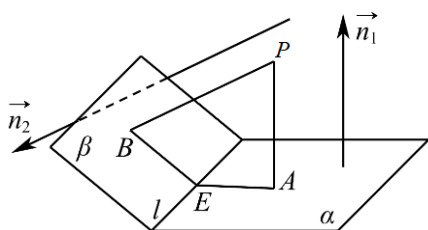
设直线 l 的方向向量为 \vec{u} ，平面 α 的法向量为 \vec{n} ，直线与平面所成的角为 θ ， \vec{u} 与 \vec{n} 的角为 φ ，则有 $\sin\theta = \underline{|\cos\varphi|}$
 $= \underline{\frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}}$.

(3) 求二面角

如图，若 $PA \perp \alpha$ 于 A ， $PB \perp \beta$ 于 B ，平面 PAB 交 l 于 E ，则 $\underline{\angle AEB}$ 为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，

$\angle AEB + \angle APB = 180^\circ$. 若二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角的大小为 θ ，其两个面 α, β 的法向量分别为 \vec{n}_1, \vec{n}_2 ，则 $|\cos\theta| = \underline{\quad}$

$$|\cos\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \underline{\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}}$$

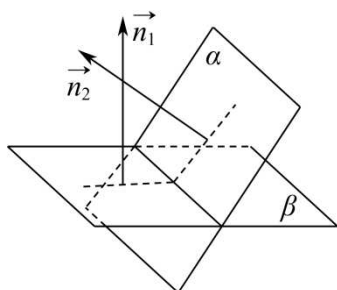


(4) 求平面与平面的夹角

平面与平面相交，形成四个二面角，把这四个二面角中不大于 90° 的二面角称为平面 α 与平面 β 的夹角 $\cos\theta = \underline{\quad}$

$$|\cos\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \underline{\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}}$$

_____.



考点 26 空间向量求空间距离集

(1) 点到直线的距离

已知直线 l 的单位方向向量为 \vec{u} ， A 是直线 l 上的定点， P 是直线 l 外一点，点 P 到直线 l 的距离为 $\underline{\quad}$

$$\underline{\sqrt{AP^2 - (\vec{AP} \cdot \vec{u})^2}}$$

(2) 两条平行直线之间的距离

求两条平行直线 l, m 之间的距离，可在其中一条直线 l 上任取一点 P ，则两条平行直线间的距离就等于 \underline{P}
 到直线 m 的距离 $\underline{\quad}$.

(3) 求点面距

- ① 求出该平面的一个 **法向量**；② 找出从该点出发的平面的任一条斜线段对应的向量；
③ 求出法向量与斜线段向量的数量积的绝对值再除以法向量的模，即可求出点到平面的距离。

即：点 A 到平面 α 的距离 $d = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ ，其中 $B \in \alpha$ ， \vec{n} 是平面 α 的一个法向量。

(4) 线面距、面面距均可转化为点面距离，用求点面距的方法进行求解

直线 a 与平面 α 之间的距离： $d = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ ，其中 $A \in a, B \in \alpha$ ， \vec{n} 是平面 α 的一个法向量。

两平行平面 α, β 之间的距离： $d = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ ，其中 $A \in \alpha, B \in \beta$ ， \vec{n} 是平面 α 的一个法向量。

考点 27 几何法求空间角与空间距离

异面直线所成角

1. 定义：已知两条异面直线 a, b ，经过空间任意一点 O 作直线 $a' // a, b' // b$ ，我们把 a' 与 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a 与 b 所成的角（或夹角）

2. 范围： $(0, \frac{\pi}{2}]$ 。

3. 平移两异面直线使它们相交，转化为相交直线所成角；

直线与平面所成角

1. 定义：平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫这条直线和这个平面所成的角。

2. 范围： $[0, \frac{\pi}{2}]$ 。

3. 求法：

(1) 由定义作出线面角的平面角，再求解；

(2) 在斜线上异于斜足取一点，求出该点到斜足的距离（设为 l ）和到平面的距离（设为 d ），则 $\sin \theta = \frac{d}{l}$ （ θ 为线面角）；

二面角

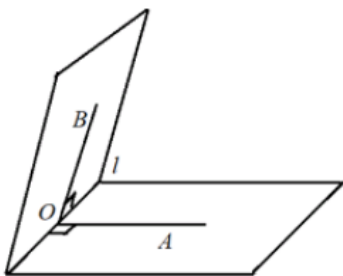
1. 定义：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角。在二面角的棱上任取一点，以该点为垂足，分别在两个半平面内作垂直于棱的射线，则两射线所成的角为二面角的平面角。

2. 范围： $[0, \pi]$ 。

3. 求法：

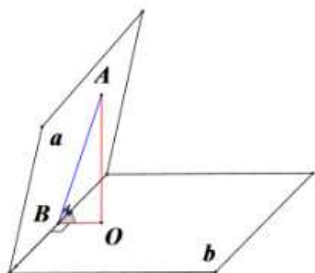
(1) 定义法：

利用二面角的平面角的定义，在二面角的棱上取一点(特殊点)，过该点在两个半平面内作垂直于棱的射线，两射线所成的角就是二面角的平面角，这是一种最基本的方法。要注意用二面角的平面角定义三个“主要特征”来找出平面角。



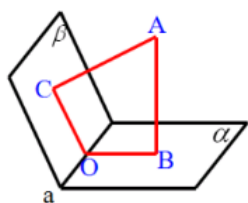
(2) 三垂线法:

已知二面角其中一个面内一点到一个面的垂线, 用三垂线定理或逆定理作出二面角的平面角。



(3) 垂面法:

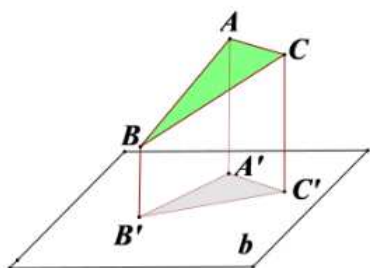
已知二面角内一点到两个面的垂线时, 过两垂线作平面与两个半平面的交线所成的角即为平面角, 由此可知, 二面角的平面角所在的平面与棱垂直。



(4) 射影面积法:

凡二面角的图形中含有可求原图形面积和该图形在另一个半平面上的射影图形面积的都可利用射影面积公

式 ($\cos\theta = \frac{S_{\text{射}}}{S_{\text{斜}}} = \frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}$, 如图) 求出二面角的大小



空间距离

点面距可转化为三棱锥等体积求解

专题 17 直线与圆

考点 1 直线倾斜角的定义及取值范围

1. 定义: x 轴 正向 与直线 向上 的方向之间所成的角叫作这条直线的倾斜角. 当直线与 x 轴平行或重合时, 规定它的倾斜角为 0° .

2. 倾斜角的取值范围

平面直角坐标系中的每一条直线都有 唯一 的倾斜角，倾斜角的取值范围是 $[0, \pi)$ 。

考点 2 直线的斜率

(1) 斜率的定义：

一般地，如果直线 l 的倾斜角为 θ ，则当 $\theta \neq 90^\circ$ 时，称 $k = \underline{\tan \theta}$ 为直线 l 的斜率；当 $\theta = 90^\circ$ 时，称直线 l 的斜率 不存在。

(2) 斜率的公式：

若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是直线 l 上两个不同的点，则当 $x_1 \neq x_2$ 时，直线 l 的斜率为 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ，当 $x_1 = x_2$ 时，直线 l 的斜率 不存在。

考点 3 直线方程的五种形式

名称	已知条件	方程	适用范围
点斜式	斜率 k 与点 (x_1, y_1)	<u>$y - y_1 = k(x - x_1)$</u>	不含直线 $x = x_1$
斜截式	斜率 k 与直线在 y 轴上的截距 b	<u>$y = kx + b$</u>	不含垂直于 x 轴的直线
两点式	两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$	<u>$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2)$</u>	不含直线 $x = x_1$ ($x_1 = x_2$) 和直线 $y = y_1$ ($y_1 = y_2$)
截距式	直线在 x 轴、 y 轴上的截距分别为 a, b	<u>$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 (a \neq 0, b \neq 0)$</u>	不含垂直于坐标轴和过原点的直线
一般式		<u>$Ax + By + C = 0 (A^2 + B^2 \neq 0)$</u>	平面直角坐标系内的直线都适用

考点 4 直线的方向向量的定义及有关结论

一般地，如果表示非零向量 \vec{a} 的有向线段所在的直线与直线 l 平行或重合，则称向量 \vec{a} 为直线 l 的一个方向向量，记作 $\vec{a} // l$ 。

直线方向向量的有关结论

- ①如果 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是直线 l 上两个不同的点，则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 是直线 l 的一个方向向量。
- ②如果直线 l 的斜率为 k ，则 $(1, k)$ 是直线 l 的一个方向向量。

③若直线的方向向量为 $\vec{a} = (x, y) (x \neq 0)$ ，则直线的斜率 $k = \frac{y}{x}$ 。

考点 5 直线的法向量的定义

一般地，如果表示非零向量 \vec{v} 的有向线段所在直线与直线 l 垂直，则称向量 v 为直线 l 的一个法向量，记作 $\vec{v} \perp l$ 。一条直线的方向向量与法向量互相垂直。

考点 6 两条直线的位置关系

方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ 的解	一组	无数组	无解
直线 l_1 与 l_2 的公共点的个数	一个	无数个	零个
直线 l_1 与 l_2 的位置关系	相交	重合	平行
位置关系	l_1, l_2 满足的条件	l_3, l_4 满足的条件	
平行	$k_1 = k_2$ ，且 $b_1 \neq b_2$	$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ 且 $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$	
垂直	$k_1 k_2 = -1$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$	
相交	$k_1 \neq k_2$	$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$	

考点 7 两直线的交点

点 P 的坐标既满足直线 l_1 的方程 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ，也满足直线 l_2 的方程 $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ，即点 P 的坐标是方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ 的解，解这个方程组就可以得到这两条直线的交点坐标。

考点 8 两点距离、点线距离、线线距离

三种距离	条件	公式
两点间的距离	$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$	$ AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
点到直线的距离	$P(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离为 d	$d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$

两平行线间的 距离	直线 $Ax + By + C_1 = 0$ 到直线 $Ax + By + C_2 = 0$ 的距离为 d ($C_1 \neq C_2$)	$d = \frac{ C_1 - C_2 }{\sqrt{A^2 + B^2}}$
--------------	--	--

考点 9 圆的定义

平面上到__**定点**__的距离等于__**定长**__的点的集合叫做圆，定点称为圆心，定长称为圆的半径。

考点 10 圆的标准方程

圆的标准方程是__ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ __ (其中 $r > 0$)，圆心的坐标是__ (a,b) __，半径是__ r __。

考点 11 圆的一般方程及表示圆的充要条件

当__ $D^2 + E^2 - 4F > 0$ __时，二元二次方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 叫做圆的一般方程。其中圆心为__ $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ __，圆的半径为 $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ 。

考点 12 点与圆的位置关系

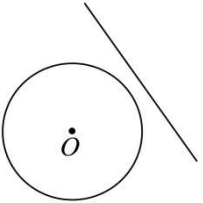
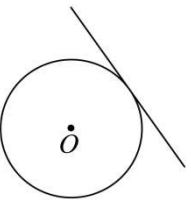
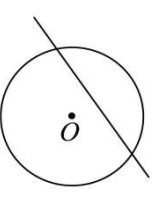
平面上的一点 $M(x_0, y_0)$ 与圆 $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 之间存在着下列关系：

- $|MC| > r \Leftrightarrow M$ 在__**圆外**__，即 $(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 > r^2 \Leftrightarrow M$ 在圆外；
- $|MC| = r \Leftrightarrow M$ 在__**圆上**__，即 $(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow M$ 在圆上；
- $|MC| < r \Leftrightarrow M$ 在__**圆内**__，即 $(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 < r^2 \Leftrightarrow M$ 在圆内。

考点 13 直线与圆的位置关系

设圆 $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ，直线 $l: Ax + By + C = 0$ ，圆心 $C(a,b)$ 到直线 l 的距离为 d 。由

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$ 消去 y (或 x)，得到关于 x (或 y)的一元二次方程，其判别式为 Δ 。

位置关系		相离	相切	相交
图形				
量化	方程观点	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
	几何观点	$d > r$	$d = r$	$d < r$

考点 14 直线被圆截得的弦长

(1) 几何法：弦心距 d 、半径 r 和弦长 $|AB|$ 的一半构成直角三角形，弦长 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$.

(2) 代数法：设直线 $y = kx + m$ 与圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 相交于点 M, N ，把直线方程代入圆方程，消去 y ，得关于 x 的一元二次方程，则 $|MN| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_M + x_N)^2 - 4x_M x_N}$.

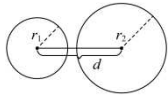
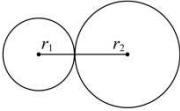
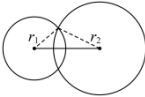
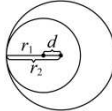
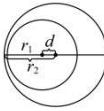
考点 15 圆与圆的位置关系

(1) 代数法：

联立两圆方程，消元得一元二次方程，则方程组解的个数与两圆的位置关系如下：

方程组解的个数	2 组	1 组	0 组
两圆的公共点个数	<u> 2 </u> 个	<u> 1 </u> 个	<u> 0 </u> 个
两圆的位置关系	<u> 相交 </u>	<u> 外切或内切 </u>	<u> 外离或内含 </u>

(2) 几何法：若两圆的半径分别为 r_1, r_2 ，两圆圆心的距离为 d ，则两圆的位置关系如下：

位置关系	外离	外切	相交	内切	内含
图示					
d 与 r_1, r_2 的关系	<u> $d > r_1 + r_2$ </u>	<u> $d = r_1 + r_2$ </u>	<u> $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ </u>	<u> $d = r_1 - r_2$ </u>	<u> $d < r_1 - r_2$ </u>

考点 16 圆中的最值问题

圆上一点到圆外一点的距离的最值

$$d_{\max} = \text{点到圆心的距离} + \text{半径}$$

$$d_{\min} = \text{点到圆心的距离} - \text{半径}$$

圆上一点到圆上一点的距离的最值

$$d_{\max} = \text{圆心到圆心的距离} + 2\text{半径}$$

$$d_{\min} = \text{圆心到圆心的距离} - 2\text{半径}$$

圆上一点到直线距离的最值

d_{\max} = 圆心到直线的距离 + 半径
 d_{\min} = 圆心到直线的距离 - 半径

过圆内一点的最长弦和最短弦

最长弦：直径；最短弦：垂直于直径

专题 18 圆锥曲线（椭圆、双曲线、抛物线）

考点 1 椭圆的定义

把平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的和等于 常数（大于 $|F_1F_2|$ ） 的点的轨迹叫做椭圆，这 两个定点 叫做椭圆的焦点，两焦点间的距离 叫做椭圆的焦距，焦距的 一半 称为半焦距.

集合 $P = \{M \mid |MF_1| + |MF_2| = 2a\}$ ， $|F_1F_2| = 2c$ ，其中 $a > 0$ ， $c > 0$ ，且 $a、c$ 为常数：

- (1) 若 $a > c$ ，则集合 P 表示椭圆；
- (2) 若 $a = c$ ，则集合 P 表示线段；
- (3) 若 $a < c$ ，则集合 P 为空集.

考点 2 椭圆的标准方程与几何性质

标准方程		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$
图像			
性质	对称性	对称轴：坐标轴 对称中心：原点	
	顶点	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a), B_1(-b, 0), B_2(b, 0)$

轴	长轴 A_1A_2 的长为 <u>$2a$</u> ，短轴 B_1B_2 的长为 <u>$2b$</u>	
范围	$-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$	$-b \leq x \leq b, -a \leq y \leq a$
a, b, c 的关系	$c^2 = \underline{a^2 - b^2}$	
离心率	<u>$e = \frac{c}{a} (0 < e < 1)$</u>	

注意：（1）长轴长是 $2a$ ，短轴长是 $2b$ ，长半轴长是 a ，短半轴长是 b 。

（2）椭圆的其他相关性质：

①椭圆上到中心距离最大的点是 长轴的两个端点，到中心距离最小的点是 短轴的两个端点；

②椭圆上到焦点距离最大和最小的点是 长轴的两个端点，最大、最小距离分别是 $a+c$ 、 $a-c$ ；

③ P 是椭圆上的点，当 P 点在 短轴端点 时， $\angle F_1PF_2$ 最大。

考点3 双曲线的定义

一般地，如果 F_1, F_2 是平面内的两个定点， a 是一个正常数，且 $2a < |F_1F_2|$ ，则平面上满足

$||PF_1| - |PF_2|| = 2a$ 的动点 P 的轨迹称为双曲线，其中，两个定点 F_1, F_2 称为

双曲线的 焦点，两个焦点的距离 $|F_1F_2|$ 称为双曲线的 焦距。

考点4 双曲线的标准方程与几何性质

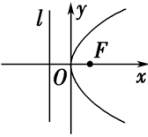
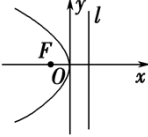
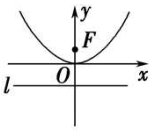
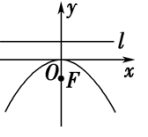
焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
图形		
标准方程	<u>$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$</u>	<u>$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$</u>

轴长	实轴长 $ A_1A_2 = \underline{\quad 2a \quad}$ ，虚轴长 $ B_1B_2 = \underline{\quad 2b \quad}$	
焦点	$\underline{\quad (\pm c, 0) \quad}$	$\underline{\quad (0, \pm c) \quad}$
焦距	$ F_1F_2 = 2c$	
范围	$x \geq a$ 或 $x \leq -a$ ， $y \in \mathbf{R}$	$x \in \mathbf{R}$ ， $y \leq -a$ 或 $y \geq a$
对称性	对称轴为 $\underline{\text{坐标轴}}$ ，对称中心为 $\underline{\text{坐标原点}}$	
顶点	$\underline{\quad (\pm a, 0) \quad}$	$\underline{\quad (0, \pm a) \quad}$
渐近线	$\underline{\quad y = \pm \frac{b}{a}x \quad}$	$\underline{\quad y = \pm \frac{a}{b}x \quad}$
离心率	$e = \underline{\quad \frac{c}{a} \quad} (e > 1)$	

考点 5 抛物线的定义

平面上到一个定点 F 和到一条定直线 l (F 不在 l 上) 距离 $\underline{\text{相等}}$ 的点的轨迹叫做抛物线. 点 F 叫做抛物线的 $\underline{\text{焦点}}$ ，定直线 l 叫做抛物线的 $\underline{\text{准线}}$.

考点 6 抛物线的标准方程与几何性质

标准方程		$y^2 = 2px (p > 0)$	$y^2 = -2px (p > 0)$	$x^2 = 2py (p > 0)$	$x^2 = -2py (p > 0)$
图形					
性质	焦点	$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{p}{2}\right)$	$\left(0, -\frac{p}{2}\right)$
	准线	$\underline{\quad x = -\frac{p}{2} \quad}$	$\underline{\quad x = \frac{p}{2} \quad}$	$\underline{\quad y = -\frac{p}{2} \quad}$	$\underline{\quad y = \frac{p}{2} \quad}$
	范围	$x \geq 0, y \in \mathbf{R}$	$x \leq 0, y \in \mathbf{R}$	$y \geq 0, x \in \mathbf{R}$	$y \leq 0, x \in \mathbf{R}$
	对称轴	$\underline{\text{x 轴}}$		$\underline{\text{y 轴}}$	

	顶点	<u> (0,0) </u>
	离心率	$e = $ <u> 1 </u>

考点 7 弦长公式

当直线 $y=kx+m(k \neq 0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的两交点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 时,

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \underline{\hspace{1cm}} \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \underline{\hspace{1cm}} \text{ 或 } |AB| = \underline{\hspace{1cm}} \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} \underline{\hspace{1cm}}.$$

专题 19 排列组合与二项式定理

考点 1 两个计数原理

分类加法计数原理

完成一件事有两类不同方案, 在第 1 类方案中有 m 种不同的方法, 在第 2 类方案中有 n 种不同的方法, 那么完成这件事共有 $N =$ $m+n$ 种不同的方法.

分步乘法计数原理

完成一件事需要两个步骤, 做第 1 步有 m 种不同的方法, 做第 2 步有 n 种不同的方法, 那么完成这件事共有 $N =$ $m \times n$ 种不同的方法.

考点 2 排列数及排列数公式

排列数的定义	从 n 个不同对象中取出 m 个对象的 <u> 所有排列 </u> 的个数, 称为从 n 个不同对象中取出 m 个对象的排列数	
排列数的表示	$A_n^m (n \in \mathbf{N}^*, m \in \mathbf{N}, m \leq n)$	
排列数公式	乘积式	$A_n^m = $ <u> $n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)$ </u>
	阶乘式	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
阶乘	$A_n^n = $ <u> $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ </u> $= $ <u> $n!$ </u>	

规定	$0! = \underline{\quad 1 \quad}$, $A_n^0 = \underline{\quad 1 \quad}$
----	--

考点3 组合数及组合数公式

组合数 定义	从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的 <u>所有不同的组合</u> 的个数, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数	
表示法	$\underline{\quad C_n^m \quad}$	
组合数 公式	乘积式	$C_n^m = \underline{\quad \frac{A_n^m}{A_m^m} \quad} = \underline{\quad \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)(m-2)\cdots 2 \cdot 1} \quad}$
	阶乘式	$C_n^m = \underline{\quad \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad}$
性质	$C_n^m = \underline{\quad C_n^{n-m} \quad}$, $C_{n+1}^m = \underline{\quad C_n^m + C_n^{m-1} \quad}$	
备注	$n, m \in \mathbf{N}^*$ 且 $m \leq n$; ②规定: $C_n^0 = 1$	

考点4 二项式定理

$$(a+b)^n = \underline{\quad C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n \quad} (n \in \mathbf{N}^*) \underline{\quad \quad}.$$

(1) 这个公式叫做二项式定理.

(2) 展开式: 等号右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式, 展开式中一共有 $n+1$ 项.

(3) 二项式系数: 各项的系数 C_n^k ($k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$) 叫做二项式系数.

二项展开式的通项

$$(a+b)^n \text{ 展开式的第 } \underline{k+1} \text{ 项叫做二项展开式的通项, 记作 } Tk_{+1} = \underline{\quad C_n^k a^{n-k} b^k \quad}.$$

二项式系数的性质

对称性	在 $(a+b)^n$ 的展开式中, 与首末两端“ <u>等距离</u> ”的两个二项式系数相等, 即 $C_n^m = \underline{\quad C_n^{n-m} \quad}$
增减性与最	增减性: 当 $k < \frac{n+1}{2}$ 时, 二项式系数是逐渐增大的;

大值	<p>当 $k > \frac{n+1}{2}$ 时, 二项式系数是逐渐 <u>减小的</u>;</p> <p>当 n 为偶数时, 中间一项的二项式系数 <u>$C_n^{\frac{n}{2}}$</u> 最大;</p> <p>当 n 为奇数时, 中间两项的二项式系数 <u>$C_n^{\frac{n-1}{2}}$</u>, <u>$C_n^{\frac{n+1}{2}}$</u> 相等, 且同时取得最大值</p>
各二项式系数的和	<p>(1) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$</p> <p>(2) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$</p>

专题 20 概率统计

考点 1 事件的分类

在一定条件下, 事先就能断定发生或不发生某种结果, 这种现象就是 确定性现象. 在一定条件下, 某种现象可能发生, 也可能不发生, 事先不能断定出现哪种结果, 这种现象是 随机现象.

对某随机现象进行的实验、观察称为 随机试验, 简称 试验.

把随机试验的每一个可能结果称为 样本点. 所有样本点组成的集合称为 样本空间, 记为 Ω .

样本空间的子集称为 随机事件, 简称 事件, 一般用 大写英文字母 表示. 当一个事件仅包含单一样本点时, 称该事件为 基本事件.

Ω (全集) 是 必然 事件; \emptyset (空集) 是 不可能 事件.

若事件 B 发生必导致事件 A 发生, 我们称 事件 A 包含事件 B (或 事件 B 包含于事件 A). 记作 $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$.

注意:

① 不可能事件记作 \emptyset , 显然 $C \supseteq \emptyset$ (C 为任一事件);

② 事件 A 也包含于事件 A , 即 $A \subseteq A$;

③ 事件 B 包含于事件 A , 其含义就是“事件 B 发生, 事件 A 一定发生, 而事件 A 发生, 事件 B 不一定发生”.

若事件 A 与 B 至少有一个发生即为事件 C 发生, 我们称 C 是 A 与 B 的 并, 也称 C 是 A 与 B 的 和, 记作 $C = A + B$.

若事件 A 与 B 同时发生即为事件 C 发生, 我们称 C 是 A 与 B 的 交, 也称 C 是 A 与 B 的 积.

_____, 记作 _____ $C = AB$ _____.

考点2 频率与概率

(1) 定义

在相同的条件下, 将一试验独立重复 n 次, 若用 $F_n(A)$ 表示事件 A 在这 n 次试验中发生的频率, 则当 n 增加时, $F_n(A)$ 将向一个固定的 _____ 数值 p _____ 靠近, 这个 _____ 数值 p _____ 就可看作事件 A 发生的 _____ 概率 $P(A)$ _____, 即 $F_n(A)$ 是 $P(A)$ 的估计.

(2) 频率与概率的区别与联系

频率和概率都是随机事件发生 _____ 可能性大小 _____ 的定量刻画, 但频率与 _____ 试验次数 _____ 及具体的试验有关, 因此频率具有 _____ 随机性 _____; 而概率是刻画随机事件发生 _____ 可能性大小 _____ 的数值, 是一个 _____ 固定的量 _____, 不具有 _____ 随机性 _____, 因此频率不能完全反映概率.

考点3 概率的性质

(1) 由于事件 A 中的样本点个数总是小于或等于样本空间 Ω 中的样本点个数, 因而根据古典概型的定义, 可知任何事件的概率在 _____ $0 \sim 1$ _____ 之间, 即 _____ $0 \leq P(A) \leq 1$ _____.

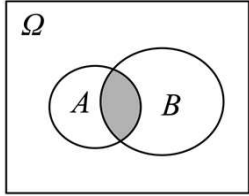
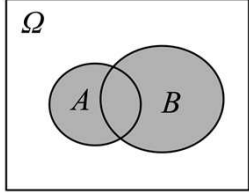
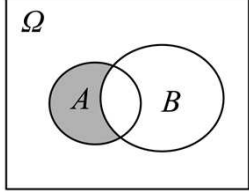
(2) 必然事件包含 Ω 中所有样本点, 因而 $P(\Omega) =$ _____ 1 _____.

(3) 不可能事件不包含任何样本点, 因而 $P(\emptyset) =$ _____ 0 _____.

性质 1	对任意的事件 A , 都有 $P(A) \geq 0$.
性质 2	必然事件的概率为 1, 不可能事件的概率为 0, 即 _____ $P(\Omega) = 1$ _____, $P(\emptyset) = 0$.
性质 3	如果事件 A 与事件 B 互斥, 那么 $P(A \cup B) =$ _____ $P(A) + P(B)$ _____. 推广: 如果事件 A_1, A_2, \dots, A_m 两两互斥, 那么事件 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ 发生的概率等于这 m 个事件分别发生的概率之和, 即 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m)$
性质 4	如果事件 A 与事件 B 互为对立事件, 那么 $P(B) =$ _____ $1 - P(A)$ _____,

	$P(A) = \underline{\hspace{1cm}} 1 - P(B) \underline{\hspace{1cm}}.$
性质 5	如果 $A \subseteq B$, 那么 $\underline{\hspace{1cm}} P(A) \leq P(B) \underline{\hspace{1cm}}.$
性质 6	设 A, B 是一个随机试验中的两个事件, 我们有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

考点 4 事件的积、和、差

	定义	表示法	图示
事件的交（或积） $\Omega \cap A = A$	如果某事件发生 <u>当且仅当事件 A 与事件 B 同时发生</u> , 则称该事件为事件 A 与 B 的交（或积）	$\underline{\hspace{1cm}} A \cap B \underline{\hspace{1cm}}$ （或 $\underline{\hspace{1cm}} AB \underline{\hspace{1cm}}$ ）	
事件的并（或和） $\emptyset \cup A = A$	如果某事件发生 <u>当且仅当事件 A 发生或事件 B 发生</u> , 则称该事件为事件 A 与 B 的并（或和）	$\underline{\hspace{1cm}} A \cup B \underline{\hspace{1cm}}$ （或 $A + B$ ）	
事件的差	如果某事件发生 <u>当且仅当事件 A 发生而事件 B 不发生</u> , 则称该事件为事件 A 与 B 的差	$A \setminus B$	

考点 5 古典概型

（1）定义：设试验的样本空间 Ω 有 n 个样本点，且每个样本点发生的 可能性相同。

当 Ω 中的事件 A 包含了 m 个样本点时，称 $P(A) = \underline{\hspace{1cm}} \frac{m}{n} \underline{\hspace{1cm}}$ 为事件 A 发生的概率，简称 A 的概率。把上述定义描述的概率模型称为古典概率模型，简称古典概型

（2）特点：

①样本空间中只有 有限个 样本点；

②每个样本点出现的 可能性相等。

考点6 相互独立事件

事件 A (或 B) 是否发生对事件 B (或 A) 发生的概率没有影响, 这样的两个事件叫作 相互独立事件。

两个相互独立事件同时发生的概率 $P(AB) = P(A)P(B)$ 。

考点7 二项分布

(1) 伯努利试验: 我们把只包含 两个 可能结果的试验叫做伯努利试验。我们将一个伯努利试验重复进行 n 次所组成的随机试验称为 n 重伯努利试验。显然, n 重伯努利试验具有共同特征: 同一个伯努利试验重复做 n 次, 且各次试验的结果 相互独立。

(2) 二项分布: 一般地, 在 n 重伯努利试验中, 设每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0 < p < 1)$, 用 X 表示事件 A 发生的次数, 则 X 的分布列为 $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$ 。如果随机变量 X 的分布列具有上式的形式, 则称随机变量 X 服从二项分布, 记作 $X \sim B(n, p)$, 且有 $E(X) = np$, $D(X) = np(1-p)$ 。

注: ① n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率与第 k 次才发生的概率计算公式分别是

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \text{ 与 } P_k = (1-p)^{k-1} p.$$

(3) 二项分布的增减性与最大值

记 $p_k = P(X = k)$, 则当 $k < (n+1)p$ 时, $p_k > p_{k-1}$, p_k 递增; 当 $k > (n+1)p$ 时, $p_k < p_{k-1}$, p_k 递减。故 p_k 最大值在 $k = (n+1)p$ 时取得 (此时 $p_k = p_{k-1}$, 两项均为最大值; 若 $(n+1)p$ 非整数, 则 k 取 $(n+1)p$ 的整数部分时, p_k 最大且唯一)。

考点8 超几何分布

分布列: 如果 $X \sim H(N, n, M)$ 且 $n + M - N \leq 0$, 则 X 的分布列如下表所示, 其中 s 为 X 的最大取值。

X	0	1	...	k	...	s
P	$\frac{C_M^0 C_{N-M}^n}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$...	$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$...	$\frac{C_M^s C_{N-M}^{n-s}}{C_N^n}$

				—		—
--	--	--	--	---	--	---

考点9 条件概率、全概率公式、贝叶斯公式

(1) 条件概率

①定义：一般地，设 A, B 为两个随机事件，且 $P(A) > 0$ ，我们称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率，简称 **条件概率**。

②概率的乘法公式：由条件概率的定义，对任意两个事件 A 与 B ，若 $P(A) > 0$ ，则 **$P(AB) = P(A)P(B|A)$** 。

(2) 条件概率的性质：设 $P(A) > 0$ ，则

① $P(\Omega|A) = 1$ ；

②如果 B 和 C 是两个互斥事件，则 $P((B \cup C)|A) = \mathbf{P(B|A) + P(C|A)}$ ；

③设 \bar{B} 和 B 互为对立事件，则 $P(\bar{B}|A) = \mathbf{1 - P(B|A)}$ 。

(3) 全概率公式：一般地，设 A_1, A_2, \dots, A_n 是一组两两互斥的事件， $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ，且 $P(A_i) > 0$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，则对任意的事件 $B \subseteq \Omega$ ，有 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$ ，我们称这个公式为全概率公式。

(4) 贝叶斯公式

设 A_1, A_2, \dots, A_n 是一组两两互斥的事件， $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ，且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$ ，则对任意事件

$B \subseteq \Omega, P(B) > 0$ ，有 $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。

考点10 离散型随机变量的数字特征

(1) 离散型随机变量的均值

①定义：一般地，若离散型随机变量 X 的分布列为

X	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_i	\dots	p_n

则称 $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ 为随机变量 X 的均值或 **数学期望**，数学期望简称 **期望**。

②意义：均值是随机变量可能取值关于取值概率的 **加权平均数**，它综合了随机变量的取值和取值

的概率，反映了随机变量取值的 平均水平。

③性质：若 X 为离散型随机变量，则 $Y=aX+b$ （其中 a, b 为常数）也是随机变量，且 $E(Y) = E(aX+b) = \underline{aE(X)+b}$ 。

(2) 离散型随机变量的方差

①定义：设离散型随机变量 X 的分布列为，

X	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_i	\dots	p_n

我们称 $D(X) = \underline{(x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \dots + (x_n - E(X))^2 p_n} = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P_i$ 为随

机变量 X 的方差，有时也记为 $Var(X)$ ，并称 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的 标准差，记为 $\sigma(X)$ 。

②意义：随机变量的方差，即是用偏差的平方 $(x_i - E(X))^2$ 关于取值概率的加权平均。随机变量的方差和标准差都可以度量随机变量取值与其均值的偏离程度，反映了随机变量取值的 离散程度。方差或标准差越小，随机变量的取值越 集中；方差或标准差越大，随机变量的取值越 分散。

③性质： $D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 P_i - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$ ； $D(aX+b) = a^2 D(X)$ 。

(3) 关于均值、方差的几个结论

① $E(k) = k$ ， $D(k) = 0$ ，其中 k 为常数；

② $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$ ；

③ 若 X_1, X_2 相互独立，则 $E(X_1 X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$ 。

考点 11 正态分布曲线及其性质

(1) 正态曲线：我们称 $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，其中 $\mu \in \mathbf{R}$ ， $\sigma > 0$ 时为参数，为正态密度函数，称

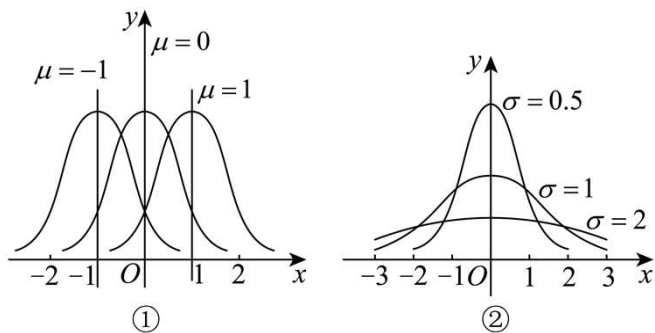
它的图象为正态密度曲线，简称正态曲线。

(2) 正态分布：若随机变量 X 的概率分布密度函数为 $f(x)$ ，则称随机变量 X 服从正态分布，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。特别地，当 $\mu = 0$ ， $\sigma = 1$ 时，称随机变量 X 服从 标准 正态分布。

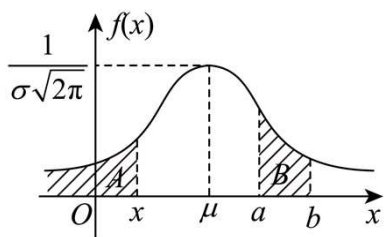
(3) 正态分布的期望与方差：若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $E(X) = \underline{\mu}$ ， $D(X) = \underline{\sigma^2}$ 。

(4) 正态曲线的特点:

- ①非负性: 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$, 它的图象在 x 轴的上方.
- ②定值性: 曲线与 x 轴之间的面积为 1.
- ③对称性: 曲线是单峰的, 它关于直线 $x = \mu$ 对称.
- ④最大值: 曲线在 $x = \mu$ 处达到峰值 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
- ⑤当 $|x|$ 无限增大时, 曲线无限接近 x 轴.
- ⑥当 σ 一定时, 曲线的位置由 μ 确定, 曲线随着 μ 的变化而沿 x 轴平移, 如图①.
- ⑦当 μ 一定时, 曲线的形状由 σ 确定, σ 较小时曲线“瘦高”, 表示随机变量 X 的分布比较集中; σ 较大时, 曲线“矮胖”, 表示随机变量 X 的分布比较分散, 如图②.



(5) 正态分布的几何意义: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 如图所示, X 取值不超过 x 的概率 $P(X \leq x)$ 为图中区域 A 的面积, 而 $P(a \leq X \leq b)$ 为区域 B 的面积.



(6) 正态总体在三个特殊区间内取值的概率值

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827; P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545; P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973.$$

考点 12 简单随机抽样与分层抽样

把总体中各个个体按照某种特征或某种规则划分为 互不交叉 的层, 然后对各层进行简单随机抽样, 这种抽样方法称为分层抽样.

抽样方法的对比

抽样类别	特点	适用范围	共同点
------	----	------	-----

简单随机抽样	从总体中随机抽取	总体中的个体差异不易分层	抽样过程中, 每个个体被抽到的可能性相同
分层抽样	将总体分层, 对各层进行简单随机抽样	总体由差异明显的几个互不交叉的部分组成	

考点 13 众数、中位数、平均数

数字特征	定义与求法	优点与缺点
众数	一组数据中出现次数最多的数	众数通常用于描述变量的中心位置, 但显然它对其他数据信息的忽视使得其无法客观地反映总体特征
中位数	把一组数据按大小顺序排列, 处在 <u> </u> 中间 <u> </u> 位置的一个数据 (或两个数据的平均数)	中位数是样本数据所占频率的等分线, 它不受少数几个极端值的影响, 这在某些情况下是优点, 但它对极端值的不敏感有时也会成为缺点
平均数	如果有 n 个数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, 那么这 n 个数的平均数 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$	平均数与每一个样本数据有关, 可以反映样本数据全体的信息, 但平均数受数据中的极端值的影响较大, 使平均数在估计总体时可靠性降低

(1) 总体均值: 一般地, 总体中有 N 个个体, 它们的变量值分别为 Y_1, Y_2, \dots, Y_N , 则 $\bar{Y} = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N}{N}$
 $= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$, 为总体均值, 又称总体平均数.

(2) 总体均值加权平均数的形式: 如果总体的 N 个变量值中, 不同的值共有 k 个 ($k \leq N$) 个, 不妨记为 Y_1, Y_2, \dots, Y_k , 其中 Y_i 出现的频数为 f_i ($i=1, 2, \dots, k$), 则总体均值还可以写成加权平均数的形式 $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (f_i Y_i)$.

(3) 样本均值：如果从总体中抽取一个容量为 n 的样本，它们的变量值分别为 y_1, y_2, \dots, y_n ，则称

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \text{ 为样本均值，又称样本平均数.}$$

(4) 在分层随机抽样中，如果层数分为 2 层，第 1 层和第 2 层包含的个体数分别为 M 和 N ，抽取的样本量

$$\text{分别为 } m \text{ 和 } n, \text{ 第 1 层和第 2 层样本的平均数分别为 } \bar{x} \text{ 和 } \bar{y}, \text{ 则样本的平均数 } \bar{w} = \frac{m}{m+n} \bar{x} + \frac{n}{m+n}$$

$$\bar{y} = \frac{M}{M+N} \bar{x} + \frac{N}{M+N} \bar{y}.$$

考点 14 方差

(1) 一组数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的方差和标准差

若数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数为 \bar{x} ，方差为 s^2 ，则数据 $mx_1 + a, mx_2 + a, \dots, mx_n + a$ 的平均数为 $m\bar{x} + a$ ，方差为 $m^2 s^2$ 。

$$\text{数据 } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ 的方差为 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2, \text{ 标准差为 } \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

(2) 分层抽样中的全部样本方差

如果将总体分为两层，第一、二层的样本量分别为 n_1, n_2 ，样本均值分别为 \bar{x}_1, \bar{x}_2 ，样本方差分别为 s_1^2, s_2^2 ，则全部样本方差为 $s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2} \{n_1 [s_1^2 + (\bar{x}_1 - \bar{x})^2] + n_2 [s_2^2 + (\bar{x}_2 - \bar{x})^2]\}$ 。

(2) 样本方差（方差）：若从总体中随机抽样，获得 n 个观测数据 x_1, x_2, \dots, x_n ，用 \bar{x} 表示这 n 个数据的

$$\text{均值，则称 } s^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ 为这 } n \text{ 个数据的样}$$

本方差，也简称为方差。

(4) 分层随机抽样的均值与方差

设样本中不同层的平均数分别为 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ ，方差分别为 $s_1^2, s_2^2, \dots, s_n^2$ ，相应的权重分别为 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ，则

$$\text{这个样本的平均数为 } \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{x}_i.$$

$$\text{这个样本的方差为 } s^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i [s_i^2 + (\bar{x}_i - \bar{x})^2].$$

考点 15 总体百分位数的估计

① 第 p 百分位数的定义：一般地，一组数据的第 p 百分位数是这样一个值，它使得这组数据中至少有 $p\%$ 的数据 小于或等于 这个值，且至少有 $(100 - p)\%$ 的数据大于或等于这个值。

②计算一组 n 个数据的第 P 百分位数的步骤：第1步，按从小到大排列原始数据；第2步，计算 $i = n \times p\%$ ；第3步，若 i 不是整数，而大于 i 的比邻整数为 j ，则第 P 百分位数为第 j 项数据；若 i 是整数，则第 P 百分位数为第 i 项与第 $(i+1)$ 项数据的 平均数。

③四分位数：常用的分位数有第25百分位数、第50百分位数、第75百分位数，这三个分位数把一组由小到大排列后的数据分成 四等份，因此称为 四分位数。其中第25百分位数也称为 第一四分位数 或下四分位数等，第75百分位数也称为第三四分位数或 上四分位数 等。

考点 16 一元线性回归模型及其应用

(1) 一元线性回归模型

在研究两个变量线性相关时，我们常利用成对样本数据建立统计模型，并利用模型进行预测。

$\begin{cases} Y = bx + a + e, \\ E(e) = 0, D(e) = \sigma^2. \end{cases}$ ①我们称①式为 Y 关于 x 的 一元线性回归模型。其中， Y 称为 因变量 或 响应变量， x 称为 自变量 或 解释变量； a 和 b 为模型的未知参数， a 称为 截距参数， b 称为 斜率参数； e 是 Y 与 $bx+a$ 之间的 随机误差。如果 $e=0$ ，那么 Y 与 x 之间的关系就可用一元线性函数模型来描述。

(2) 一元线性回归模型参数的最小二乘估计回归直线方程过样本点的中心 (\bar{x}, \bar{y}) ，是回归直线方程最常用的一个特征。

我们将 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 称为 Y 关于 x 的 线性回归方程，也称经验回归函数或经验回归公式，其图形称为经验回归直线。这种求经验回归方程的方法叫做 最小二乘法，求得的 \hat{b}, \hat{a} 叫做 b, a 的 最小二乘估计，其中

$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \\ \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}. \end{cases}$$

(3) 回归分析

①残差：对于响应变量 Y ，通过观测得到的数据称为 观测值，通过经验回归方程得到的 \hat{y} 称为预测值，观测值减去预测称为 残差。

②刻画回归效果的方式：一是残差图法，残差点比较均匀地落在水平的 带状区域 中，说明选用的模型比较合适，带状区域的宽度 越窄，说明模型拟合精度越高；二是残差平方和法， $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ 称为残差平方和，残差平方和 越小，模型的拟合效果越好；三是用决定系数 R^2 比较，

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$
， R^2 越大，模型的拟合效果 越好， R^2 越小，模型的拟合效果 越差。

考点 17 列联表与独立性检验

(1)分类变量与列联表

①分类变量:为了表述的方便,我们经常会使用一种特殊的随机变量,以区别不同的现象或性质,这类随机变量称为 分类变量。

②2×2列联表:一般地,假设两个分类变量 X 和 Y , 它们的取值为 $\{0,1\}$, 其样本频数列联表(也称为2×2列联表)为

X	Y		合计
	$Y=0$	$Y=1$	
$X=0$	a	b	<u>$a+b$</u>
$X=1$	c	d	<u>$c+d$</u>
合计	<u>$a+c$</u>	<u>$b+d$</u>	$n = $ <u>$a+b+c+d$</u>

(2)等高堆积条形图

等高条形图和表格相比,更能直观地反映出两个分类变量间是否相互影响,常用等高条形图展示列联表数据的频率特征,依据频率稳定于概率的原理,我们可以推断结果.

(3)独立性检验

① χ^2 计算公式: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$ 。

②临界值的定义:对于任何小概率值 α , 可以找到相应的正实数 x_α ，使得 $P(\chi^2 \geq x_\alpha) = \alpha$ 成立,我们称 x_α 为 α 的临界值,概率值 α 越小,临界值 x_α 越大。

③独立性检验: $H_0: P(Y=1|X=0) = P(Y=1|X=1)$, 通常称 H_0 为 零假设 或 原假设. 基于小概率值 α 的检验规则是:当 $\chi^2 \geq x_\alpha$ 时,我们就推断 H_0 不成立,即认为 X 和 Y 不独立,该推断犯错误的概率不超过 α ; 当 $\chi^2 < x_\alpha$ 时,我们没有充分证据推断 H_0 不成立,可以认为 X 和 Y 独立. 这种利用 χ^2 的取值推断分类变量 X 和 Y 是否独立的方法称为 χ^2 独立性检验, 读作“卡方独立性检验”, 简称 独立性检验。

④临界值表

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828