

概率难点大题归纳

热点内容解读

近三年：

1、以数学建模与概率思维为核心本体。

概率题的本质是引导学生“用数学眼光观察世界”，这一理念在近几年得到彻底贯彻。题目多设置真实的、具有时代特征的情境，如体育比赛（乒乓球、篮球、卡片对战）、科技应用（神经网络激活函数）、生态治理（空气尘埃检测）、经济决策（服务器租赁）等。这要求学生能剥离情境表象，从中抽象出等可能事件、独立重复试验、离散型随机变量等数学模型，并灵活运用分类与讨论思想、转化与化归思想进行求解。概率的考查已从“算概率”升级为“建立概率模型并决策”。

2、知识内部的深度交叉与创新融合。

概率题不再是孤立的古典概型或分布列计算。在近三年，特别是 2025 年的压轴题中，概率与数列（递推）的深度融合成为最大亮点。例如 2025 年全国二卷第 19 题乒乓球模型，要求学生构建并求解复杂的概率递推关系；2023 年新高考 I 卷的投篮问题，同样涉及用递推数列求解概率。此外，概率与排列组合、函数、不等式、导数的结合也日趋紧密，使得题目综合性、探究性大大增强，完全突破了传统“套路题”的范畴。

3、设问方式的层次化与反套路化。

概率大题的设问遵循“由易到难，层层递进”的原则，但后一问往往需要基于前一问的结论进行深度推理或创新证明。这种设计旨在区分不同思维层次的学生，其中压轴小问常需要创造性地运用数学工具，有效考查创新思维。

4、概率统计题已从常规中档题晋升为压轴题的常客。例如 2025 年全国二卷，概率题（第 19 题）取代传统导数题成为新压轴，释放出强烈信号。题干背景紧密联系科技前沿、社会热点与国家战略（如人工智能、生态保护、“东数西算”），信息量和阅读量增大，对信息筛选与理解能力提出新要求。解题需综合运用分解随机变量（如 2025 年一卷第 14 题）、全概率公式、数列递推与数学归纳法等多种工具，单纯套公式已无法应对。

预测 2026 年：

基于以上分析，“在新颖、复杂、真实的跨学科情境中，构建概率模型并完成逻辑严密的探究与决策”的能力，将是 2026 年高考概率大题的决胜关键。概率统计的核心价值在于，它是最能体现数学应用性、思维性与时代性的板块之一，其“反套路、反刷题”的命题导向与当前高考选拔创新人才的目标准确契合。

概率难点大题归纳

题型01 马尔科夫链

题型02 离散型分布列为等比数列

题型03 二项分布列概率最大项

题型04 概率与函数、导数求最值

题型05 概率与决策性问题

热点题型突破

题型1 马尔科夫链

解|题|策|略

把全概率公式与过程的马尔科夫性(无记忆性)结合:当前状态的概率只与上一步状态有关,因此可以按上一步的所有可能情况对当前概率进行分解。

常见背景:通常为多轮次的概率问题,涉及状态转移(如比赛得分、传球、闯关等);游走时首次到达某点的概率;每一阶段状态随机变化,求 n 次后处于某个状态的概率;期望步数问题(此时是求期望数列的递推)

1. (25-26 高三上·云南昆明·月考) 甲、乙两名同学都准备参加某知识竞答活动,该竞答活动会逐一给出 n 道不同的题目供参赛者回答,每道题目的回答只有正确或错误两种情况,各道题目回答情况不会相互影响。

(1) 如果参赛者须回答5道问题,当连续答对4道时,即可赢得挑战,若甲同学对于即将给出的各道题目,均有 $\frac{1}{3}$ 的概率答对,求甲赢得挑战的概率;

(2) 若乙同学对于即将给出的各道题目,均有 $\frac{2}{3}$ 的概率答对. 记 P_n 为乙同学回答 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 道题目后,没有出现连续答对至少4道题目这一情形的概率。

(i) 求 P_4, P_6 ;

(ii) 证明: $P_{100} \leq P_{99}$.

【答案】(1) $\frac{5}{243}$ (2) (i) $P_4 = \frac{65}{81}$, $P_6 = \frac{163}{243}$ (ii) 证明见解析

【分析】(1) 利用相互独立事件的概率乘法公式计算即可;

(2) (i) 利用正难则反思想计算 P_4 ,利用分类讨论结合正难则反思想计算 P_6 ; (ii) 分类讨论结合全概率公式得 $P_n = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}P_{n-2} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}P_{n-3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}P_{n-4}$,利用递推关系作差即可证明。

【详解】(1) 甲赢得挑战有两种情况,连续答对前四题或第一题答错后四题都答对,

其概率为: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{243}$;

(2) (i) $P_4 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81}$;

当乙同学回答完6道题目后,出现连续答对至少4道题这一情形,

可能的情况为:6道都答对、连续答对5道(第1道或者第6道答错)、

连续答对4道(1~4道答对,第5道答错,第6道答对或者答错;

第1道答错,2~5道答对,第6道答错;第1道答对或答错,第2道答错,3~6道答对),

故 $P_6 = 1 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^6 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \right) \right] = \frac{163}{243}$;

(ii) 乙同学答完 n 道题后,如果没有出现连续答对至少4道题的情形,

则由题意可如下分类:

① 第 n 题答错,且前 $n-1$ 题未出现连续答对至少4道题的情形,此时概率为 $\frac{1}{3}P_{n-1}$;

② 第 n 题答对,第 $n-1$ 题答错,且前 $n-2$ 题未出现连续答对至少4道题的情形,

此时概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} P_{n-2}$;

③第 n 题答对, 第 $n-1$ 题答对, 第 $n-2$ 题答错,

且前 $n-3$ 题未出现连续答对至少 4 道题的情形, 此时概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} P_{n-3}$;

④第 n 题答对, 第 $n-1$ 题答对, 第 $n-2$ 题答对, 第 $n-3$ 题答错,

且前 $n-4$ 题未出现连续答对至少 4 道题的情形, 此时概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} P_{n-4}$,

由全概率公式: $P_n = \frac{1}{3} P_{n-1} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} P_{n-2} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} P_{n-3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} P_{n-4} (n \geq 6, n \in N^*)$ ①,

因此 $P_{n-1} = \frac{1}{3} P_{n-2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} P_{n-3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} P_{n-4} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} P_{n-5} (n \geq 6, n \in N^*)$ ②,

① - $\frac{2}{3}$ ②: $P_n - P_{n-1} = -\frac{16}{243} P_{n-5} \leq 0 (n \geq 6, n \in N^*)$,

所以当 $n \geq 6, n \in N^*$ 时, $P_n \leq P_{n-1}$, 故 $P_{100} \leq P_{99}$.

2. (2026·湖北·模拟预测) 某校为丰富学生的课外活动特举办了一次篮球投篮比赛活动, 现已知刘翔同学每次投篮投中的概率为 $\frac{3}{4}$, 投不中的概率为 $\frac{1}{4}$. 为激励学生运动的积极性, 规定: 投中一次得 2 分, 投不中得 1 分. 刘翔同学投篮若干次, 每次投中与否互不影响, 各次得分之和作为最终得分.

(1) 若投篮 2 次, 最终得分为 X , 求随机变量 X 的分布列和期望;

(2) 设最终得分为 n 的概率为 P_n , 证明: 数列 $\{P_{n+1} - P_n\}$ 为等比数列, 并求数列 $\{P_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) 分布列见解析, $E(X) = \frac{7}{2}$

(2) 证明见解析, $P_n = \frac{1}{4} + \frac{9}{28} \left[1 - \left(-\frac{3}{4} \right)^{n-1} \right]$

【分析】(1) 由题意可知: 最终得分 X 的可能取值为 2, 3, 4, 结合二项分布求分布列和期望;

(2) 根据独立事件概率乘法公式可得 $P_1 = \frac{1}{4}$, $P_2 = \frac{13}{16}$, 且 $P_{n+2} = \frac{1}{4} P_{n+1} + \frac{3}{4} P_n$, 根据等比数列的定义结合累加法求通项公式.

【详解】(1) 由题意可知: 最终得分 X 的可能取值为 2, 3, 4,

则 $P(X=2) = \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{16}$, $P(X=3) = C_2^1 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$, $P(X=4) = \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{16}$,

可得随机变量 X 的分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$

期望为 $E(X) = 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{9}{16} = \frac{7}{2}$.

(2) 由题意可知: $P_1 = \frac{1}{4}$, $P_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{13}{16}$, 且 $P_{n+2} = \frac{1}{4} P_{n+1} + \frac{3}{4} P_n$,

因为 $P_2 - P_1 = \frac{9}{16}$, 且 $\frac{P_{n+2} - P_{n+1}}{P_{n+1} - P_n} = \frac{\frac{1}{4} P_{n+1} + \frac{3}{4} P_n - P_{n+1}}{P_{n+1} - P_n} = -\frac{3}{4}$,

可知数列 $\{P_{n+1} - P_n\}$ 是以首项为 $\frac{9}{16}$, 公比为 $-\frac{3}{4}$ 的等比数列,

所以 $P_{n+1} - P_n = \frac{9}{16} \times \left(-\frac{3}{4} \right)^{n-1} = \left(-\frac{3}{4} \right)^{n+1}$,

当 $n \geq 2$ 时, 则 $P_2 - P_1 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2, P_3 - P_2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^3, \dots, P_n - P_{n-1} = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$,

累加可得 $P_n - P_1 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^3 + \dots + \left(-\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\frac{9}{16} \left[1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{9}{28} \left[1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]$,

则 $P_n = \frac{1}{4} + \frac{9}{28} \left[1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]$, 且 $n=1$ 时, $P_1 = \frac{1}{4}$ 符合上式,

所以 $P_n = \frac{1}{4} + \frac{9}{28} \left[1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]$.

3. (2025·四川绵阳·模拟预测) 甲乙两人参加单位组织的知识答题活动, 每轮活动由甲乙各答一个题, 已知甲、乙第一轮答对的概率都为 $\frac{1}{2}$. 甲如果第 $k (k \in N^*)$ 轮答对, 则他第 $k+1$ 轮也答对的概率为 $\frac{3}{4}$, 如果第 k 轮答错, 则他第 $k+1$ 轮也答错的概率为 $\frac{3}{4}$; 乙如果第 k 轮答对, 则他第 $k+1$ 轮也答对的概率为 $\frac{2}{3}$, 如果第 k 轮答错, 则他第 $k+1$ 轮也答错的概率为 $\frac{2}{3}$. 在每轮活动中, 甲乙答对与否互不影响.

(1) 若前两轮活动中第二轮甲乙都答对求两人第一轮也都答对的概率;

(2) 求证: $\forall k \in N^*$, 甲在第 k 轮答对的概率为定值;

【答案】(1) $\frac{1}{2}$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 根据给定条件, 利用互相独立事件、互斥事件的概率公式, 结合条件概率公式求解即可;

(2) 求出 A_k 的递推公式, 再利用构造法求出通项即可.

【详解】(1) 记事件 $A_k (k \in N^*)$ 表示甲第 k 轮答对, 记事件 $B_k (k \in N^*)$ 表示乙第 k 轮答对,

则 $A_2 = A_1 A_2 + \bar{A}_1 A_2$,

所以 $P(A_2) = P(A_1 A_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(A_2)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,

同理 $B_2 = B_1 B_2 + \bar{B}_1 B_2$,

$P(B_2) = P(B_1 B_2) + P(\bar{B}_1 B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) + P(B_2)P(B_2|\bar{B}_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$,

所以 $P(A_2 B_2) = P(A_2)P(B_2) = \frac{1}{4}$,

则 $P(A_1 B_1 | A_2 B_2) = \frac{P(A_1 B_1 A_2 B_2)}{P(A_2 B_2)} = \frac{P(A_1 A_2)P(B_1 B_2)}{P(A_2 B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$,

即若前两轮活动中第二轮甲乙都答对则两人第一轮也都答对的概率为 $\frac{1}{2}$.

(2) 由题意可知 $P(A_{k+1}) = P(A_k) \times \frac{3}{4} + (1 - P(A_k)) \times \frac{1}{4}$, 即 $P(A_{k+1}) = \frac{1}{2} P(A_k) + \frac{1}{4}$,

所以 $P(A_{k+1}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(P(A_k) - \frac{1}{2}\right)$,

因为 $P(A_1) - \frac{1}{2} = 0$, 所以数列 $\left\{P(A_k) - \frac{1}{2}\right\}$ 为常数列,

所以 $P(A_k) = \frac{1}{2}$ 为定值.

4. (25-26 高三上 ◆ 广东深圳 ◆ 期末) 某智慧城市在主干道部署了 5 个独立边缘计算节点, 初始时, 2 个节点在线, 3 个为宕机. 每个月系统随机等概率巡查 1 个节点: 若该节点为宕机, 则修复成功率为

$p(0 < p < 1)$; 若该节点已在线, 则仅进行维护, 用 X_n 表示第 n 个月后在线节点数, $E(X_n)$ 表示其期望, 且 $E(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{p}{5}\right)E(X_n) + p$.

(1) 当 $p = \frac{1}{3}$ 时, 求 $P(X_2=3)$;

(2) 已知每台宕机节点每个月造成 2 万元经济损失, 初始月份不考虑损失, 若要求从第 1 个月开始的总期望经济损失不超过 36 万元, 求 p 的最小值.

【答案】(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{5}{7}$

【分析】(1) 根据题意求 X_1 的可能取值以及相应的概率, 分析 $X_2=3$ 的可能情况, 进而运算求解;

(2) 先求得 $E(X_1) = 2 + \frac{3}{5}p$, 分析可知数列 $\{5 - E(X_n)\}$ 是以首项为 $3 - \frac{3}{5}p$, 公比为 $1 - \frac{p}{5}$ 的等比数列, 根据题意结合等比数列求和公式运算求解.

【详解】(1) 若 $p = \frac{1}{3}$, 由题意可知: $X_1 = 2, 3$,

因为 $X_1=3$ 表示巡查节点为宕机节点且修复成功, 则 $P(X_1=3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$,

可得 $P(X_1=2) = 1 - P(X_1=3) = \frac{4}{5}$;

又因为 $X_2=3$ 表示在 $X_1=2$ 的前提下, 巡查节点为宕机节点且修复成功的情况, 或在 $X_1=3$ 的前提下, 巡查节点为在线状态且无需修复的情况,

所以 $P(X_2=3) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \left(1 - \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

(2) 由题意可知: $X_1 = 2, 3$,

且 $P(X_1=3) = \frac{3}{5}p$, $P(X_1=2) = 1 - P(X_1=3) = 1 - \frac{3}{5}p$,

可得 $E(X_1) = 3 \times \frac{3}{5}p + 2 \left(1 - \frac{3}{5}p\right) = 2 + \frac{3}{5}p$,

因为 $0 < p < 1$, 则 $\frac{4}{5} < 1 - \frac{p}{5} < 1$,

因为 $E(X_n)$ 表示在线节点数的期望, 则 $5 - E(X_n)$ 表示宕机节点数的期望,

且 $E(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{p}{5}\right)E(X_n) + p$, 则 $5 - E(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{p}{5}\right)[5 - E(X_n)]$,

且 $5 - E(X_1) = 3 - \frac{3}{5}p \neq 0$, 可知数列 $\{5 - E(X_n)\}$ 是以首项为 $3 - \frac{3}{5}p$, 公比为 $1 - \frac{p}{5}$ 的等比数列,

则 $5 - E(X_n) = \left(3 - \frac{3}{5}p\right)\left(1 - \frac{p}{5}\right)^{n-1}$,

可得数列 $\{5 - E(X_n)\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{\left(3 - \frac{3}{5}p\right)\left[1 - \left(1 - \frac{p}{5}\right)^n\right]}{1 - \left(1 - \frac{p}{5}\right)} = \left(\frac{15}{p} - 3\right)\left[1 - \left(1 - \frac{p}{5}\right)^n\right]$,

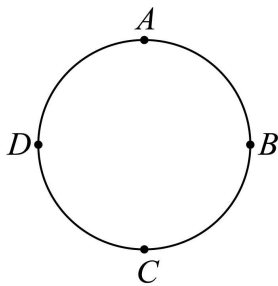
因为 $0 < p < 1$, 则 $\frac{15}{p} - 3 > 0$, $1 - \left(1 - \frac{p}{5}\right)^n < 1$,

可得 $S_n = \left(\frac{15}{p} - 3\right)\left[1 - \left(1 - \frac{p}{5}\right)^n\right] < \frac{15}{p} - 3$,

由题意可得: $2S_n < 2\left(\frac{15}{p} - 3\right) \leq 36$, 解得 $\frac{5}{7} \leq p < 1$,

所以 p 的最小值为 $\frac{5}{7}$.

5. (2025·广东佛山·三模) 如图, A, B, C, D 四人围成一圈玩成语接龙游戏, 游戏开始时随机抽取一个成语, 第1次由 A 接龙, 下一次接龙的人由掷硬币决定, 规则如下: 随机掷3枚硬币, 如果3枚硬币都是反面朝上, 则第2次由 A 接龙; 如果3枚硬币中仅有1枚正面朝上, 则第2次由 B 接龙; 如果3枚硬币中仅有2枚正面朝上, 则第2次由 C 接龙; 如果3枚硬币都是正面朝上, 则第2次由 D 接龙. 记第2次接龙的人 x (x 为 A 或 B 或 C 或 D), 再次掷3枚硬币决定下一次的接龙人, 若掷出的硬币中有 i 枚硬币正面朝上, 则按顺时针方向数, 下一次由 x 后面的第 i 个人接龙 (若 $i=0$, 则下一次由 x 接龙). 此后每次接龙以此类推.



- (1) 分别求出第2次由 A, B, C, D 接龙的概率;
- (2) 记前3次中由 A 接龙的次数为 X , 求 X 的分布列及期望;
- (3) 记第 n 次由 A 接龙的概率为 P_{A_n} , 证明 $P_{A_{n-1}} = \frac{1}{4} (n \geq 1, n \in N^*)$.

【答案】(1) $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$

(2) 分布列见解析, $\frac{11}{8}$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 根据二项分布可求第2次由 A, B, C, D 接龙的概率;

(2) X 的取值可能为 1, 2, 3, 根据独立事件的乘法公式可求 X 取相应值时对应的概率, 故可求其分布列和数学期望;

(3) 记第 n 次由 A 接龙的概率为 P_{A_n} , 第 n 次由 B 接龙的概率为 P_{B_n} , 第 n 次由 C 接龙的概率为 P_{C_n} , 第 n 次由 D 接龙的概率为 P_{D_n} , 利用全概率公式可得它们的递推关系, 结合构造法可证 $P_{A_{n-1}} = \frac{1}{4} (n \geq 1, n \in N^*)$.

【详解】(1) 记 P_i 为掷出的硬币中有 i 枚正面朝上的概率,

$$P_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, P_1 = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}, P_2 = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}, P_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

第2次由 A 接龙的概率 $P_{A_2} = \frac{1}{8}$, 第2次由 B 接龙的概率 $P_{B_2} = \frac{3}{8}$,

第2次由 C 接龙的概率 $P_{C_2} = \frac{3}{8}$, 第2次由 D 接龙的概率 $P_{D_2} = \frac{1}{8}$.

(2) X 的取值可能为 1, 2, 3

前3次中 A 接龙的次数为 3, 即第2, 3次均由 A 进行接龙,

其概率为 $P(X=3) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$

前3次中 A 接龙的次数为 1, 即 A 第2, 3次均没有接龙,

分三种情况: 第2次 B 接龙且第3次 A 没有接龙; 第2次 C 接龙且第3次 A 没有接龙;

第2次 D 接龙且第3次 A 没有接龙.

其概率为 $P(X=1) = \frac{3}{8} \times \left(1 - \frac{1}{8}\right) + \frac{3}{8} \times \left(1 - \frac{3}{8}\right) + \frac{1}{8} \times \left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{41}{64}$,

前3次中A接龙的次数为2的概率为 $P(X=2) = 1 - P(X=1) - P(X=3) = \frac{11}{32}$,

X的分布列为如下:

X	1	2	3
P	$\frac{41}{64}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{1}{64}$

$$E(X) = 1 \times \frac{41}{64} + 2 \times \frac{11}{32} + 3 \times \frac{1}{64} = \frac{11}{8}.$$

(3) 证明: 记第n次由A接龙的概率为 P_{A_n} , 第n次由B接龙的概率为 P_{B_n} ,

第n次由C接龙的概率为 P_{C_n} , 第n次由D接龙的概率为 P_{D_n} , 则

$$P_{A_{n+1}} = P_{A_n} \times \frac{1}{8} + P_{B_n} \times \frac{1}{8} + P_{C_n} \times \frac{3}{8} + P_{D_n} \times \frac{3}{8} \quad ①^\circ \quad P_{B_{n+1}} = P_{A_n} \times \frac{3}{8} + P_{B_n} \times \frac{1}{8} + P_{C_n} \times \frac{1}{8} + P_{D_n} \times \frac{3}{8} \quad ②$$

$$P_{C_{n+1}} = P_{A_n} \times \frac{3}{8} + P_{B_n} \times \frac{3}{8} + P_{C_n} \times \frac{1}{8} + P_{D_n} \times \frac{1}{8} \quad ③^\circ \quad P_{D_{n+1}} = P_{A_n} \times \frac{1}{8} + P_{B_n} \times \frac{3}{8} + P_{C_n} \times \frac{3}{8} + P_{D_n} \times \frac{1}{8} \quad ④$$

$$① + ③ \text{ 得 } P_{A_{n+1}} + P_{C_{n+1}} = \frac{1}{2} (P_{A_n} + P_{B_n} + P_{C_n} + P_{D_n}), \text{ 因为 } P_{A_n} + P_{B_n} + P_{C_n} + P_{D_n} = 1$$

$$\text{所以 } P_{A_{n+1}} + P_{C_{n+1}} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } P_{B_{n+1}} + P_{D_{n+1}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{下证若 } P_{A_n} = \frac{1}{4}, \text{ 则 } P_{A_{n+1}} = \frac{1}{4},$$

$$① + ② \text{ 得 } P_{A_{n+1}} + P_{B_{n+1}} = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} P_{B_n} \quad ⑤$$

$$① + ④ \text{ 得 } P_{A_{n+1}} + P_{D_{n+1}} = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} P_{A_n}, \text{ 代入 } P_{B_{n+1}} + P_{D_{n+1}} = \frac{1}{2}, \text{ 得 } P_{A_{n+1}} - P_{B_{n+1}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} P_{A_n} \quad ⑥$$

$$⑤ - ⑥ \text{ 得 } 2P_{B_{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (P_{B_n} - P_{A_n}), \text{ 所以 } 2P_{B_{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (P_{B_n} - P_{A_n}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} P_{A_n} - \frac{1}{8} \right)$$

$$\text{因此, 若 } P_{A_n} = \frac{1}{4}, \text{ 则 } P_{B_{n+1}} = \frac{1}{4}$$

$$⑤ + ⑥ \text{ 得 } 2P_{A_{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} (P_{B_n} + P_{A_n}), \text{ 所以 } 2P_{A_{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} (P_{B_{n+1}} + P_{A_{n+1}}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{2} P_{B_n} \right)$$

$$\text{因此, 若 } P_{B_n} = \frac{1}{4}, \text{ 则 } P_{A_{n+1}} = \frac{1}{4}, \text{ 因此若 } P_{A_n} = \frac{1}{4}, \text{ 则 } P_{A_{n+1}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{因为 } P_{A_3} = P_{A_2} \times \frac{1}{8} + P_{B_2} \times \frac{1}{8} + P_{C_2} \times \frac{3}{8} + P_{D_2} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\text{所以 } P_{A_{4n-1}} = P_{A_{3+4(n-1)}} = \frac{1}{4} (n \geq 1, n \in N^*)$$

题型2 离散型分布列为等比数列

解|题|策|略

离散型分布列为等比数列的题型, 用错位相减法求期望 (或其它求和)。这类题不涉及多轮递推, 而是单次试验中某个离散随机变量的概率分布呈现等比规律, 求和时往往要计算形如 $E(X) =$

$\sum_n n \cdot P(X=n)$ 其中 $P(X=n)$ 是等比数列。

6. (2026·重庆·一模) 元旦晚会上, 班委为了活跃氛围, 特准备了“丢沙包”游戏, 参与者在指定范围内投掷沙包入框, 并制定了两个小游戏, 且每位参与者只能参加其中一项游戏, 规则如下:

游戏一: 参与者进行投掷, 若在投掷过程中累计命中次数达到2次, 则游戏立即结束并获奖, 若投掷n次 ($n \geq 2$ 且 $n \in N$) 后仍未累计命中2次, 则游戏结束, 无法获奖;

游戏二:参与者进行投掷,不限投掷次数,若每次投掷中,命中记 1 分,未命中记 -1 分,当累计得分达到 3 分,则游戏立即结束并获奖,当累计得分达到 -3 分,游戏立即结束,无法获奖.

现有甲、乙两位同学分别参加游戏,且每位同学每次投掷是否命中相互独立. 已知甲同学参加游戏一,且每次命中率为 $\frac{1}{3}$;乙同学参加游戏二,每次命中率为 $p(0 < p < 1)$.

(1) 当 $n=4$ 时,记甲同学投掷次数为 X ,求 X 的分布列及期望;

(2) 当 $n=k(k \geq 2 \text{ 且 } k \in \mathbb{N})$ 时,求甲同学获奖的概率(用含 k 的表达式表示);

(3) 记甲同学获奖时,投掷次数不超过 4 次的概率为 p_0 ;若乙同学获奖概率不小于 p_0 ,求 p 的最小值.

【答案】(1) 分布列见解析,期望为 $\frac{98}{27}$;

$$(2) P(A) = 1 - \frac{k+2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1};$$

$$(3) \frac{1}{2\sqrt[3]{\frac{2}{11}} + 1}.$$

【分析】(1) 写出 X 的取值可能为 2, 3, 4, 再分别计算其概率,最后利用期望公式即可得到答案;

(2) 计算出 $P(Y=i)$ 的表达式,从而得到 $\sum_{i=2}^k P(Y=i)$ 的表达式,再利用错位相减法即可得到答案;

(3) 记 Z 表示乙同学的得分, $Z = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, 计算出对应的概率,根据 $P(B) \geq p_0$ 得到不等式,解出即可得到最小值.

【详解】(1) 由题可知: X 的取值可能为 2, 3, 4,

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

$$P(X=3) = C_2^1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27},$$

$$P(X=4) = 1 - \frac{3}{27} - \frac{4}{27} = \frac{20}{27},$$

故 X 的分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{20}{27}$

$$\text{所以 } E(X) = \frac{1}{9} \times 2 + \frac{4}{27} \times 3 + \frac{20}{27} \times 4 = \frac{98}{27}.$$

(2) 记事件 A : 甲同学获奖,

显然, $k \geq 2$, 设 Y 表示甲投掷的次数, 若甲投掷 $i(2 \leq i \leq k)$ 次并获奖,

$$\text{则 } P(Y=i) = C_{i-1}^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{i-2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}(i-1)\left(\frac{2}{3}\right)^i,$$

$$\text{所以 } \sum_{i=2}^k P(Y=i) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + (k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^k \right],$$

$$\text{令 } S = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + (k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^k,$$

$$\text{所以 } \frac{2}{3}S = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \cdots + (k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1},$$

$$\text{两式相减: } \frac{1}{3}S = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^k - (k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1},$$

$$\frac{1}{3}S = \frac{\frac{4}{9}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right]}{1 - \frac{2}{3}} - (k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - (k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1},$$

$$\text{即 } S = 4 - \frac{4(k+2)}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1},$$

$$\text{所以 } P(A) = \frac{1}{4}S = 1 - \frac{k+2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

(3) 记 Z 表示乙同学的得分, $Z = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$,

记事件 B : 乙同学获奖, $P(Z=k)$ 表示乙同学得分为 k 分时, 最终获奖的概率,

显然 $P(B) = P(Z=0)$, 又 $P(Z=3) = 1, P(Z=-3) = 0$,

由全概率公式知: $P(Z=k) = p \cdot P(Z=k+1) + (1-p) \cdot P(Z=k-1), k = -2, -1, 0, 1, 2$,

$$\text{所以 } P(Z=k+1) - P(Z=k) = \left(\frac{1}{p} - 1\right)[P(Z=k) - P(Z=k-1)],$$

$$\text{那么 } P(Z=3) - P(Z=2) = \left(\frac{1}{p} - 1\right)[P(Z=2) - P(Z=1)] = \left(\frac{1}{p} - 1\right)^2[P(Z=1) - P(Z=0)]$$

$$= \cdots = \left(\frac{1}{p} - 1\right)^5[P(Z=-2) - P(Z=-3)] = \left(\frac{1}{p} - 1\right)^5 \cdot P(Z=-2),$$

$$\text{即 } P(Z=3) - P(Z=2) = \left(\frac{1}{p} - 1\right)^5 \cdot P(Z=-2),$$

$$\text{同理: } P(Z=2) - P(Z=1) = \left(\frac{1}{p} - 1\right)^4 \cdot P(Z=-2),$$

$$P(Z=1) - P(Z=0) = \left(\frac{1}{p} - 1\right)^3 \cdot P(Z=-2),$$

$$P(Z=0) - P(Z=-1) = \left(\frac{1}{p} - 1\right)^2 \cdot P(Z=-2),$$

$$P(Z=-1) - P(Z=-2) = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \cdot P(Z=-2),$$

$$\text{累加有 } P(Z=3) - P(Z=-2) = \left[\left(\frac{1}{p} - 1\right) + \left(\frac{1}{p} - 1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{p} - 1\right)^5\right] \cdot P(Z=-2),$$

$$\text{所以 } P(Z=3) = \left[1 + \left(\frac{1}{p} - 1\right) + \left(\frac{1}{p} - 1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{p} - 1\right)^5\right] \cdot P(Z=-2),$$

$$\text{即 } P(Z=3) = \frac{1 - \left(\frac{1}{p} - 1\right)^6}{1 - \left(\frac{1}{p} - 1\right)} \cdot P(Z=-2) = 1, \text{ 即 } P(Z=-2) = \frac{2 - \frac{1}{p}}{1 - \left(\frac{1}{p} - 1\right)^6},$$

$$\text{即 } P(B) = P(Z=0) = \left[1 + \left(\frac{1}{p} - 1\right) + \left(\frac{1}{p} - 1\right)^2\right] \cdot P(Z=-2) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{p} - 1\right)^3},$$

$$\text{由甲同学获奖时, 投掷次数不超过4次的概率为 } p_0 \text{ 得: } p_0 = 1 - \frac{4+2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{11}{27},$$

$$\text{由 } P(B) \geq p_0, \text{ 即 } \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{p} - 1\right)^3} \geq \frac{11}{27}, \text{ 解得 } p \geq \frac{1}{2\sqrt[3]{\frac{2}{11}} + 1},$$

$$\text{故 } p \text{ 的最小值为 } \frac{1}{2\sqrt[3]{\frac{2}{11}} + 1}.$$

7. (2025·广西河池·三模) 现有编号为 $1, 2, 3, \dots, n (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4)$ 的 n 名同学进行闯关游戏, 闯关游戏有两种方式可以选择, 游戏规则如下.

方式一: ①该游戏共设置第一关与第二关, 首先由编号为1的同学闯第一关;

- ②若编号为 $i(i=1,2,3,\cdots,n-1)$ 的同学第一关闯关成功,则该同学继续闯第二关,若编号为 i 的同学第一关闯关未成功,则由编号为 $i+1$ 的同学接替闯第一关;
- ③若编号为 $j(j=1,2,3,\cdots,n-1)$ 的同学第二关闯关成功,则闯关游戏结束,若编号为 j 的同学第二关闯关未成功,则由编号为 $j+1$ 的同学接替闯第二关;
- ④若闯关轮到编号为 n 的同学,无论编号为 n 的同学闯关成功与否,闯关游戏均结束.

方式二:①该游戏共设置第一关与第二关,首先由编号为 1 的同学闯第一关;

- ②若编号为 $i(i=1,2,3,\cdots,n-1)$ 的同学第一关闯关成功,则该同学继续闯第二关,若编号为 i 的同学第一关闯关未成功,则由编号为 $i+1$ 的同学接替闯第一关;
- ③若编号为 $j(j=1,2,3,\cdots,n-1)$ 的同学第二关闯关成功,则闯关游戏结束,若编号为 j 的同学第二关闯关未成功,则由编号为 $j+1$ 的同学接替闯关且从第一关重新开始闯关;
- ④若闯关轮到编号为 n 的同学,无论编号为 n 的同学闯关成功与否,闯关游戏均结束.

假设每位同学闯第一关成功的概率均为 $\frac{2}{3}$,闯第二关成功的概率均为 $\frac{3}{4}$,且每位同学闯关成功与否相互独立.

- (1) 若均选择方式一闯关,当闯关游戏结束时,求闯关人数不超过 2 的概率.
- (2) 设事件 C 表示“所有同学均按方式一闯关,恰好由编号为 3 的同学闯关后闯关游戏结束”,设事件 D 表示“所有同学均按方式二闯关,恰好由编号为 3 的同学闯关后闯关游戏结束”,分别求出事件 C 和事件 D 的概率,比较所求概率的大小,并判断应选择哪种方式闯关更合理.
- (3) 若均选择方式二闯关,记闯关游戏结束时闯关的总人数为 X ,求 X 的数学期望 $E(X)$.

【答案】(1) $\frac{19}{24}$

(2) $P(C) = \frac{37}{288}, P(D) = \frac{1}{8}, P(D) < P(C)$, 选择方式一闯关更合理

(3) $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

【分析】(1) 根据相互独立事件同时发生的概率计算公式即互斥事件概率计算公式进行计算即可;

(2) 根据相互独立事件同时发生的概率计算公式进行计算;

(3) 根据期望公式列出 $E(X)$, 利用错位相减求和即可.

【详解】(1) 若选择方式一,

$$\text{则 } P(X=1) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{24},$$

$$\text{所以闯关人数不超过 2 的概率为 } \frac{1}{2} + \frac{7}{24} = \frac{19}{24}.$$

(2) 根据题意

$$P(C) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{37}{288},$$

$$\text{若选择方式二,则每位同学闯关成功的概率为 } \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\text{闯关不成功的概率为 } 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } P(D) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

$P(D) < P(C)$, 所以选择方式一闯关更合理.

(3) 由 (2) 可知,

$$P(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, (k=1, 2, \dots, n-1),$$

$$P(X=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\text{则 } E(X) = \sum_{k=1}^{n-1} \left[k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \right] + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\text{设 } S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \right],$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + (n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{则 } \frac{1}{2} S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + (n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

两式作差得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_n &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - (n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - (n+1) \cdot \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } S_n = 2 - (n+1) \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\text{则 } E(X) = S_n + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 - (n+1) \frac{1}{2^{n-1}} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

8. (25-26 高三上·重庆·月考) 一个不透明的袋子中装有编号分别为 1, 2, 3, 4 的 4 个小球, 每次从袋中随机摸出 1 个小球并记录编号后放回袋中, 当连续两次摸出的小球编号相同时, 停止摸球, 设停止摸球时已摸球的次数为 X . 记第 k 次摸到的小球编号为 Y_k .

(1) 求 $P(X=2)$ 与 $P(X=3)$;

(2) 设 $P(X=n) = a_n$, 求 $a_2 + a_3 + \dots + a_n + 4a_{n+1}$ 与 $a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n$;

(3) 当 $X=n$ 时, S_n 为随机变量, 若 $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ 是奇数, 则 $S_n = 1$, 若 $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ 是偶数, 则 $S_n = 0$, 求 $P(S_n=0)$.

【答案】 (1) $P(X=2) = \frac{1}{4}$, $P(X=3) = \frac{3}{16}$

(2) $1, \frac{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{7}$

(3) 答案详见解析

【分析】 (1) 解法一: 利用独立事件的乘法公式, 讨论每次摸球的编号即可解题; 解法二: 利用计数原理得到样本点个数, 再利用古典概型可得答案.

(2) 解法一: 建立起关于 a_n 的递推公式, 再求出 a_n 通项公式, 再利用等比数列的前 n 项和公式求出 $(-1)^n a_n$ 的前 n 项和; 解法二: 摸球 n 次停止, 意思是除了最后 2 次摸球的编号一样, 其他的与前面一次摸球的编号都不一样, 利用这个规则, 可直接归纳出 a_n , 即可得答案.

(3) 利用“当 $n \geq 5$ 时, $S_n = 0$ 可分成两种情况: 当 $S_{n-2} = 0$ 时, Y_{n-3} 与 Y_{n-2} 同为奇数或同为偶数; 当 S_{n-2}

$=1$ 时, Y_{n-3} 与 Y_{n-2} 一奇一偶”可建立起 $P(S_n=0)$ 与 $P(S_{n-2}=0)$ 的关系, 进一步可讨论通项公式.

【详解】(1) 解法一: $P(X=2)=1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $P(X=3)=1 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$.

解法二: $P(X=2)=\frac{4 \times 1}{4 \times 4} = \frac{1}{4}$, $P(X=3)=\frac{4 \times 3 \times 1}{4 \times 4 \times 4} = \frac{3}{16}$.

(2) 解法一: 因为 $X \geq 2$, 所以 $n \geq 2$, 则 $P(X \geq n+1)=1-a_2-a_3-\cdots-a_n$.

若 $X=n+1$, 则 $X \geq n+1$ 且 $Y_n=Y_{n+1}$, 所以 $a_{n+1}=(1-a_2-a_3-\cdots-a_n) \times \frac{1}{4}$,

即 $a_2+a_3+\cdots+a_n+4a_{n+1}=1$,

所以 $a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}+4a_{n+2}=1$, 所以 $a_{n+1}+4a_{n+2}-4a_{n+1}=0$, 即 $a_{n+2}=\frac{3}{4}a_{n+1}$.

由 (1) 可知 $a_3=\frac{3}{16}$, 所以当 $n \geq 3$ 时, $a_n=\frac{3}{16} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}=\frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.

又因为 $a_2=\frac{1}{4}$, 所以 $a_n=\frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$,

所以 $a_2-a_3+a_4-\cdots+(-1)^na_n=\frac{1}{4} \times \left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{2-2}+\left(-\frac{3}{4}\right)^{3-2}+\cdots+\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-2}\right]$,

$$=\frac{1}{4} \times \frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{7}.$$

解法二: $P(X=n)=a_n=1 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}=\frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} (n \geq 2)$.

$$a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}+4a_{n+2}=\frac{1}{4} \times \left[1+\frac{3}{4}+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]+\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}+\left(\frac{3}{4}\right)^n=1,$$

所以 $a_2-a_3+a_4-\cdots+(-1)^na_n=\frac{1}{4} \times \left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{2-2}+\left(-\frac{3}{4}\right)^{3-2}+\cdots+\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-2}\right]$,

$$=\frac{1}{4} \times \frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{7}.$$

(3) 当 $X \geq n \geq 3$ 时, 设随机变量 T_n 满足: 若 $Y_1+Y_2+\cdots+Y_{n-2}$ 是奇数, 则 $S_n=1$, 若 $Y_1+Y_2+\cdots+Y_{n-2}$ 是偶数, 则 $S_n=0$. 设 $P(S_n=0)=b_n$.

当 $n=3$ 时, $S_3=0$ 即 Y_1 为偶数, 可得 $b_3=\frac{1}{2}$.

当 $n=4$ 时, $S_4=0$ 即 Y_1+Y_2 是偶数, 可得 $b_4=\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

当 $n \geq 5$ 时, $S_n=0$ 可分成两种情况: 当 $S_{n-2}=0$ 时, Y_{n-3} 与 Y_{n-2} 同为奇数或同为偶数; 当 $S_{n-2}=1$ 时, Y_{n-3} 与 Y_{n-2} 一奇一偶.

所以 $b_n=b_{n-2} \times \frac{1}{3} + (1-b_{n-2}) \times \left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}b_{n-2}$, 即 $b_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(b_{n-2} - \frac{1}{2}\right)$.

当 $n \geq 3$ 且 n 为奇数时, $b_n - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(b_3 - \frac{1}{2}\right)$, 即 $b_n = \frac{1}{2}$;

当 $n \geq 3$ 且 n 为偶数时, $b_n - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-4}{2}}\left(b_4 - \frac{1}{2}\right)$, 即 $b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-2}{2}}$.

当 $n=2$ 时, $Y_1=Y_2$, $P(S_n=0)=1$.

当 $n \geq 3$ 时, $P(S_n=0)=P(T_n=0)=b_n$.

综上可得, 当 $n \geq 2$ 且 n 为偶数时, $P(S_n=0)=\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-2}{2}}$; 当 $n \geq 2$ 且 n 为奇数时, $P(S_n=0)$

$$= \frac{1}{2}.$$

9. (2025·湖南长沙·模拟预测) 某中学国学小组共有 $n(n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$ 个同学, 分别编号为 $1, 2, 3, \dots, n$. 在一次小组活动中, 指导老师设计了两道问答题, 并给出如下两个答题规则.

规则一: ①第1号同学首先答第一题. ②若第 $i(i=1, 2, 3, \dots, n-1)$ 号同学答对第一题, 则该生继续答第二题; 若第 i 号同学答错或不会答第一题, 则由第 $i+1$ 号同学接替答第一题. ③若第 i 号同学答对第二题, 则答题活动结束; 若第 i 号同学答错或不会答第二题, 则由第 $i+1$ 号同学接替答第二题. ④若答题轮到第 n 号同学, 则当该生遇到答错或不会答的情况时, 答题活动也结束.

规则二: ①, ②同规则一. ③若第 i 号同学答对第二题, 则答题活动结束; 若第 i 号同学答错或不会答第二题, 则由第 $i+1$ 号同学接替答题, 且重新从第一题开始作答. ④同规则一.

假设每个同学答对第一题的概率都为 $\frac{2}{3}$, 答对第二题的概率都为 $\frac{1}{2}$, 且各同学的答题相互独立.

- (1) 若 $n \geq 3$, 且按规则一答题, 当答题活动结束后, 求答题人数不超过2人的概率;
- (2) 若 $n \geq 4$, 为使第3号同学答题后答题活动结束的概率较大, 应选择哪个规则答题;
- (3) 若按规则二答题, 记答题活动结束后参与答题的总人数为 X , $a_n = E(X-3)$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列.

【答案】(1) $\frac{11}{18}$

(2) 应选择规则一答题

(3) 证明见解析

【分析】(1) 设事件 $A =$ “答题人数为1人”, $B =$ “答题人数为2人”, 进而结合独立事件乘法公式、互斥事件概率求解即可;

(2) 结合题意, 分别求出按规则一答题和按规则二答题所对应的概率, 进而判断即可;

(3) 由题意可得 X 的可能取值为 $1, 2, 3, \dots, n$, 进而结合数学期望的公式、错位相减法求和求出 $E(X) = 3 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, 结合数学期望的性质可得 $a_n = E(X-3) = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, 进而求证即可.

【详解】(1) 当答题活动结束后, 设事件 $A =$ “答题人数为1人”, $B =$ “答题人数为2人”, 则 A 与 B 互斥.

由已知可得, $P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$,

则 $P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{5}{18} = \frac{11}{18}$, 所以答题人数不超过2人的概率为 $\frac{11}{18}$.

(2) 若按规则一答题, 则第3号队员答题后答题活动结束需进行4次答题,

其中前3次第1, 2号队员第一题至多答对1次,

第二题都答错或不会答, 第4次第3号队员答对第二题,

其概率为 $p_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} = \frac{19}{108}$.

若按规则二答题, 因为每个同学两题都答对的概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$,

则第3号队员答题后答题活动结束的概率为 $p_2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

因为 $p_2 = \frac{4}{27} = \frac{16}{108} < \frac{19}{108} = p_1$, 所以应选择规则一答题.

(3) 按规则二答题, X 的可能取值为 $1, 2, 3, \dots, n$,

当 $1 \leq k \leq n-1$ 时, $P(X=k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}$,

当 $k=n$ 时, $P(X=n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

则 $E(X) = \frac{1}{3} \left[1 + 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + (n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \right] + n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

设 $S = 1 + 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + (n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$,

则 $\frac{2}{3}S = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + (n-2) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + (n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,

两式相减, 得 $\frac{1}{3}S = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - (n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$= 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right] - (n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 3 - (n+2) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

所以 $E(X) = \frac{1}{3}S + n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 3 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

由题设, $a_n = E(X-3) = E(X) - 3 = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, 则 $a_1 = -2$,

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2}{3}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 -2 , 公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列.

10. (2025·四川成都·模拟预测) 一口袋中装有 10 个小球, 其中标有数字 1, 2, 3, 4, 5 的小球各两个, 这些小球除数字外其余均相同.

(1) 某人从中一次性摸出 4 个球, 设事件 A “摸出的 4 个球中至少有一个数字是 5”, 事件 B “摸出的 4 个球中恰有两个数字相同”; 分别求事件 A 和事件 B 的概率;

(2) 现有一游戏, 游戏规则是: 游戏玩家每次有放回地从袋中随机摸出一球, 若摸到 5 号球, 则游戏结束; 否则继续摸球, 当摸到第 $n (n \geq 2)$ 个球时, 无论摸出的是几号球游戏都结束. 设 X 表示摸球的次数

$(1 \leq X \leq n, X \in N^*)$, 求随机变量 X 的期望, 并比较期望与 1 的大小.

【答案】(1) $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}$;

(2) $5 - 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, 大于 1.

【分析】(1) 求出从中一次性摸出 4 个球方法的数目, 求出 $n(A)$ 和 $n(B)$, 即可求得相应的概率;

(2) 求出 X 的取值, 当 $1 \leq k \leq n-1$ 时, 求出 $P(X=k)$, 当 $k=n$ 时, 求出 $P(X=k)$, 列出列联表求出 $E(X)$, 得用错位相减, 即可求得解.

【详解】(1) 从中一次性摸出 4 个球有 $C_{10}^4 = 210$ 种方法,

$n(A) = 210 - C_8^4 = 140, n(B) = C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 = 120$

所以 $P(A) = \frac{140}{210} = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{120}{210} = \frac{4}{7}$;

(2) X 的取值可能为 1, 2, 3, \cdots, n ,

当 $1 \leq k \leq n-1$ 时, $P(X=k) = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5}$,

当 $k=n$ 时, $P(X=k) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$,

X	1	2	3	\cdots	k	\cdots	n
P	$\left(\frac{4}{5}\right)^0 \cdot \frac{1}{5}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^1 \cdot \frac{1}{5}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5}$	\cdots	$\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5}$	\cdots	$\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

$$\begin{aligned}
&\text{所以 } E(X) = 1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^0 \cdot \frac{1}{5} + 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 \cdot \frac{1}{5} + 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + \cdots + (n-1) \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{5} + n \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{4}{5}\right)^0 + 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 + 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cdots + (n-1) \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} \right] + n \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}, \\
&\text{令 } S = \left(\frac{4}{5}\right)^0 + 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 + 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cdots + (n-1) \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}, \\
&\text{则 } \frac{4}{5}S = \left(\frac{4}{5}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cdots + (n-2) \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} + (n-1) \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}, \\
&\text{相减得 } \frac{1}{5}S = \left(\frac{4}{5}\right)^0 + \left(\frac{4}{5}\right)^1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} - (n-1) \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{5}} - (n-1) \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \\
&= 5 - (n+4) \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}, \\
&\text{所以 } E(X) = 5 - 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}. \\
&\left\{ 5 - 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \right\} (n \geq 2) \text{ 为递增数列, 故 } E(X) > 5 - \frac{16}{5} > 1.
\end{aligned}$$

题型3 二项分布列概率最大项

解|题|策|略

对二项分布列 $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2,3 \cdots n$ $P(X=k)$ 取最大项时有:

$$\begin{cases} P(X=k) \geq P(X=k-1) \\ P(X=k) \geq P(X=k+1) \end{cases} \quad (\text{类似二项展开式中系数最大项})$$

可解得 $p(n+1) - 1 \leq k \leq p(n+1)$, k 取这个范围内整数, 当 k 由 0 增加到 n 时, $P(X=k)$ 的值先由小到大, 再由大到小.

11. (2026·重庆九龙坡·一模) 某企业为了提高生产效率和产品质量, 更新了机器设备, 为了检验新机器生产零件的质量, 该企业质检部门要对新机器生产的零件抽样检测.

(1) 在调试生产初期, 质检部门抽检该机器生产的 10 个零件中有 2 个为次品, 现从这 10 个零件中随机抽取 3 个零件, 设抽取的零件为次品的个数为 ξ , 求 ξ 的分布列和数学期望;

(2) 在正式生产后, 质检部门从新机器生产的一批零件中随机抽取 100 件进行检验, 其中有 3 件为次品. 用频率估计概率, 现从新机器生产的这批零件中随机抽取 $n (n \geq 2)$ 个零件, 记这 n 个零件中恰有 2 件为次品的概率为 P_n , 求 P_n 取得最大值时 n 的值.

【答案】(1) ξ 的分布列详见解析; $\frac{3}{5}$

(2) 66

【分析】(1) 根据分布列、数学期望及超几何分布概率计算公式求解即可.

(2) 根据二项分布求出 P_n , 比较 $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ 与 1 的大小关系, 判断数列的单调性, 从而找到最大值点.

【详解】(1) ξ 的可能取值为 0, 1, 2.

$$P(\xi=0) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}, P(\xi=1) = \frac{C_8^2 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}, P(\xi=2) = \frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{15}.$$

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
-------	---	---	---

P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$
-----	----------------	----------------	----------------

数学期望为 $E(\xi) = 0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5}$.

(2) 由频率估计概率, 单次抽到次品的概率为 $p = \frac{3}{100}$,

则 n 个零件中恰有 2 件次品的概率为 $P_n = C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} = C_n^2 \left(\frac{3}{100}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{100}\right)^{n-2}$.

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{C_{n+1}^2 \left(\frac{3}{100}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{100}\right)^{n-1}}{C_n^2 \left(\frac{3}{100}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{100}\right)^{n-2}} = \frac{97(n+1)}{100(n-1)}.$$

令 $\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1$, 即 $\frac{97(n+1)}{100(n-1)} > 1$, 解得 $n < \frac{197}{3} \approx 65.7$; 令 $\frac{P_{n+1}}{P_n} < 1$, 解得 $n > 65.7$.

因此, 当 $n = 65$ 时, $P_{66} > P_{65}$, 当 $n = 66$ 时, $P_{67} < P_{66}$, 所以 P_n 在 $n = 66$ 时取得最大值.

故 P_n 取得最大值时 n 的值为 66.

12. (25-26 高三上·江西抚州·期末) 某学校组织“学党史、强信念、跟党走”为主题的知识竞赛, 每位参加比赛的同学均可参加多轮答题活动, 每轮答题结果互不影响. 每轮比赛共有 A, B 两组题, 每组都随机抽取两道题作答, 先进行 A 组答题, 只有 A 组的两道题均答对, 方可进行 B 组答题, 否则本轮答题结束. 已知甲同学 A 组每道题答对的概率均为 $\frac{3}{4}$, B 组每道题答对的概率均为 $\frac{1}{3}$, A, B 两组题至少答对 3 道题才可获得一张奖券.

(1) 设甲同学在一轮比赛中答对的题目数量为 X , 求 X 的分布列与数学期望 $E(X)$;

(2) 若甲同学进行了 10 轮答题, 试问甲同学获得多少张奖券的概率最大? 并说明理由.

【答案】(1) 分布列见解析, $\frac{15}{8}$

(2) 同学获得 3 张奖券的概率最大, 理由见解析

【分析】(1) 利用相互独立事件乘法公式进行计算即可得分布列, 再求期望即可;

(2) 利用获得奖券数是服从二项分布, 利用二项分布概率公式来求最大概率即可.

【详解】(1) 甲同学在一轮比赛中答对的题目数量为 X 的可能取值有 0, 1, 2, 3, 4,

$$\text{则 } P(X=0) = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, P(X=1) = C_2^1 \frac{3}{4} \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8},$$

$$P(X=2) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}, P(X=3) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 C_2^1 \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4},$$

$$P(X=4) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{16} = \frac{15}{8};$$

(2) 由于 A, B 两组题至少答对 3 道题才可获得一张奖券,

则甲在一轮答题中获得一张奖券的概率为

$$P = P(X=3) + P(X=4) = \frac{5}{16},$$

所以甲同学进行了 10 轮答题, 获得的奖券数 $Y \sim B(10, \frac{5}{16})$,

可得奖券数 i 的概率为 $P(Y=i) = C_{10}^i (\frac{5}{16})^i (\frac{11}{16})^{10-i}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 10$,

假设甲同学获得 k 张奖券的概率最大,

$$\text{则有: } \begin{cases} C_{10}^k (\frac{5}{16})^k (\frac{11}{16})^{10-k} \geq C_{10}^{k-1} (\frac{5}{16})^{k-1} (\frac{11}{16})^{11-k} \\ C_{10}^k (\frac{5}{16})^k (\frac{11}{16})^{10-k} \geq C_{10}^{k+1} (\frac{5}{16})^{k+1} (\frac{11}{16})^{9-k} \end{cases}$$

$$\text{化简得: } \begin{cases} \frac{5}{16} \times \frac{1}{k} \geq \frac{11}{16} \times \frac{1}{11-k} \\ \frac{11}{16} \times \frac{1}{10-k} \geq \frac{1}{k+1} \times \frac{5}{16} \end{cases},$$

又因为 $k \in N$, 所以 $k = 3$, 即同学获得 3 张奖券的概率最大.

13. (2025·北京·三模) 投壶是中国古代传统礼仪游戏, 起源于春秋战国时期, 盛行于汉唐. 参与者将无镞箭矢投向特定壶具, 以入壶数量和姿态评判胜负, 兼具竞技与礼仪功能.

为发扬传统文化, 某校利用午休时间举办投壶比赛老师预设口径不同的三个壶, 学生可以根据自身情况, 选择不同壶进行挑战. 为方便统计, 投壶时, 仅统计“投中”与“未投中”两种结果.

活动中, 高三年级 500 名学生体验了投壶, 每位学生都只选择一个壶进行挑战. 现将投壶结果统计如下表.

	壶 1		壶 2		壶 3	
	投中	未投中	投中	未投中	投中	未投中
高三年级	40	160	90	60	60	90

假设用频率估计概率

(1) 若从所有选择投壶 2 的学生中, 随机选择一位学生, 求这位学生在活动中投中壶 2 的概率.

(2) 投壶活动结束后, 高三学生自发组织“过关比赛”比赛中, 学生手拿三支箭, 从壶 1 开始, 按照壶 1、壶 2、壶 3 的次序, 进行投壶挑战. 每次投壶时, 学生投一支箭, 若投中, 学生按照顺序投下一个投壶; 若未投中, 学生需要继续投该壶, 直到投中或箭矢耗尽当学生投完三支箭, 挑战结束.

某位高三学生即将参赛, 假设用高三年级学生投中各壶的频率估计这位学生投中各壶的概率, 求这位学生在“过关比赛”中仅投中一次的概率.

(3) 为锻炼投壶技巧, 某高三同学投壶 2, 一共投 20 次. 假设每次投壶的结果互不影响, 用高三年级学生投中壶 2 的频率估计这位学生投中壶 2 的概率, 那么在投完 20 次之后, 这位同学投中壶 2 多少次的概率最大?(只需写出结论).

【答案】(1) $\frac{3}{5}$

(2) $\frac{28}{125}$

(3) 12

【分析】(1) 利用古典概型的概率公式计算;

(2) 分别计算壶 1、壶 2 投中和未投中的概率, 再利用乘法公式和加法公式计算;

(3) 利用二项分布的概率最值计算.

【详解】(1) 由用频率估计概率可知, 从所有选择投壶 2 的学生中, 随机选择一位学生, 这位学生在活动中

投中壶2的概率为 $\frac{90}{90+60} = \frac{3}{5}$.

(2) 用高三年级学生投中各壶的频率估计这位学生投中各壶的概率,

则壶1投中的概率为 $\frac{40}{200} = \frac{1}{5}$, 壶1未投中的概率为 $\frac{4}{5}$,

壶2投中的概率为 $\frac{3}{5}$, 壶2未投中的概率为 $\frac{2}{5}$,

则这位学生在“过关比赛”中仅投中一次的概率为 $\frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{28}{125}$.

(3) 用 X 表示投完20次之后, 这位同学投中壶2的次数, 则 $X \sim B(20, \frac{3}{5})$,

则 $P(X=k) = C_{20}^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{20-k}, k=0, 1, \dots, 20$,

假设投中壶2的次数为 k 时最大, 则

$$\begin{cases} P(X=k) \geq P(X=k+1) \\ P(X=k) \geq P(X=k-1) \end{cases}, \text{即} \begin{cases} C_{20}^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{20-k} \geq C_{20}^{k+1} \left(\frac{3}{5}\right)^{k+1} \left(\frac{2}{5}\right)^{19-k} \\ C_{20}^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{20-k} \geq C_{20}^{k-1} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \left(\frac{2}{5}\right)^{21-k} \end{cases},$$

解得 $\frac{58}{5} \leq k \leq \frac{63}{5}$, 因 $k \in N$, 则 $k=12$,

故投完20次之后, 这位同学投中壶2的次数为12时, 概率最大.

题型4 概率与函数、导数求最值

解|题|策|略

根据题意, 将所求概率表示为关于变量 x 的函数 $P(x)$. 注意定义域 (结合实际问题或概率意义), 然后用函数、导数求最值的方法来求概率的最值与范围.

14. (25-26 高三上·重庆沙坪坝·月考) 已知袋中有 m_1 个白球, m_2 个红球, m_3 个黑球, 其中 $m_1, m_2, m_3 \in N^*$, 这些球除颜色外没有其他差异. 现每次从袋中不放回的随机取一个球, 直到所有小球全部取完.

(1) 若 $m_1=1, m_2=2, m_3=2$, 求在最后一次取出黑球的条件下, 白球最先被全部取出的概率;

(2) 记白球最先被全部取出的概率为 $P(m_1, m_2, m_3)$.

(i) 求 $P(m_1, m_2, m_3)$ (结果用 m_1, m_2, m_3 表示);

(ii) 已知 $k \in N^*$, 证明: $\sum_{k=1}^n P(10, 10, 10k) > \frac{7}{8} \ln n + \frac{1}{10}$. (参考数据: $\ln 2 \approx 0.693, \ln 3 \approx 1.099$)

【答案】(1) $\frac{2}{3}$;

(2) (i) $P(m_1, m_2, m_3) = \frac{m_2 m_3 (2m_1 + m_2 + m_3)}{(m_1 + m_2 + m_3)(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)}$; (ii) 证明见解析.

【分析】(1) 设事件, 再根据条件概率公式即可得到答案;

(2) (i) 根据全概率公式即可得到答案.

(ii) 变形得 $P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}$, 再裂项求和得 $\sum_{k=1}^n P(10, 10, 10k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$, 等价

转化为证明 $\frac{n}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{3}{5} > \frac{7}{8} \ln n$, 再构造函数 $f(x) = \frac{7}{8} \ln x - \frac{x}{2} - \frac{1}{x+2} + \frac{3}{5}, x > 0$, 求导得其最值即可证明;

【详解】(1) 记白球最先被全部取出的事件为 A , 最后取出红球的事件为 B , 最后取出黑球的事件为 C ,

$$P(A|C) = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{3}.$$

则概率为 $\frac{2}{3}$.

(2) (i) 显然事件 B 与事件 C 互斥, 则 $A = BA + CA$,

$$P(BA) = P(B)P(A|B) = \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3} \cdot \frac{m_3}{m_1+m_3},$$

$$P(CA) = P(C)P(A|C) = \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3} \cdot \frac{m_2}{m_1+m_2},$$

$$\text{所以 } P(A) = P(BA) + P(CA) = \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3} \cdot \frac{m_3}{m_1+m_3} + \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3} \cdot \frac{m_2}{m_1+m_2},$$

$$\text{整理得: } P(A) = \frac{m_2 m_3 (2m_1 + m_2 + m_3)}{(m_1 + m_2 + m_3)(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)}.$$

$$(ii) \text{ 由 (i) 得: } P(A) = \frac{k(k+3)}{2(k+1)(k+2)},$$

$$\text{所以 } P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}.$$

$$\text{所以: } \sum_{k=1}^n P(10, 10, 10k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right).$$

$$\text{裂项求和得: } \sum_{k=1}^n P(10, 10, 10k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{n+2}.$$

$$\text{下证: } \frac{n-1}{2} + \frac{1}{n+2} > \frac{7}{8} \ln n + \frac{1}{10}, \text{ 即证: } \frac{n}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{3}{5} > \frac{7}{8} \ln n \text{ ※}$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{7}{8} \ln x - \frac{x}{2} - \frac{1}{x+2} + \frac{3}{5}, x > 0,$$

$$\text{求导得: } f'(x) = \frac{7}{8x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{-4x^3 - 9x^2 + 20x + 28}{8x(x+2)^2},$$

$$\text{由 } -4x^3 - 9x^2 + 20x + 28 = (x-2)(-4x^2 - 17x - 14),$$

$$\text{令 } -4x^2 - 17x - 14 = 0, \text{ 解得 } x = \frac{17 \pm \sqrt{65}}{-8}, \text{ 两根均小于 } 0,$$

$$\text{因为 } x > 0, \text{ 所以当 } 0 < x < 2, f'(x) > 0, x > 2, f'(x) < 0,$$

$$\text{即 } f_{\max}(x) = f(2) = \frac{7}{8} \ln 2 - 1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{5} < \frac{7}{8} \times 0.7 - \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{80} < 0,$$

$$\text{所以: } \sum_{k=1}^n P(10, 10, 10k) > \frac{7}{8} \ln n + \frac{1}{10} \text{ 成立.}$$

15. (2025·云南昆明·模拟预测) 某地区为选拔运动员举行了一次运动会 (采用积分制), 运动员通过参加各项比赛获得积分. 现有甲、乙两名运动员争夺某项比赛的积分, 规定两名运动员谁先赢 $k(k > 1, k \in N^*)$ 局, 谁就能获得该项比赛的全部积分, 根据以往经验, 每局比赛甲赢的概率为 p , 乙赢的概率为 $1-p$, 每局比赛相互独立.

(1) 若 $k=2, p=\frac{2}{3}$, 在乙先赢了第一局的条件下, 求甲最终赢得全部积分的概率;

(2) 在甲赢了 m 局, 乙赢了 n 局时, 比赛意外终止. 对于积分应该如何分配, 评委给出的方案是: 根据以往经验数据, 甲、乙按照若比赛继续进行下去各自赢得全部积分的概率之比 $P_{\text{甲}}:P_{\text{乙}}$ 分配积分.

(i) 若 $k=3, m=2, n=1, p=\frac{3}{5}$, 求 $P_{\text{甲}}:P_{\text{乙}}$;

(ii) 若 $k=4, m=2, n=2$, 求比赛继续进行下去甲赢得全部积分的概率 $f(p)$, 并判断当 $p \in [\frac{7}{8}, 1)$ 时, 若比赛继续进行下去乙赢得全部积分的概率是否小于 5%.

【答案】(1) $\frac{4}{9}$

(2) (i) $P_{\text{甲}}:P_{\text{乙}}=21:4$; (ii) $f(p)=p^2(3-2p)$, 是

【分析】(1) 由题意得甲要赢得全部积分, 必须赢得后面 2 局比赛, 计算概率即可求解;

(2) (i) 设比赛再继续进行 X 局, 甲获胜, 分别求得 $P(X=1)$ 和 $P(X=2)$, 进而得出甲赢得全部积分的概率, 即可求得 $p_{\text{甲}}:p_{\text{乙}}$; (ii) 设比赛再继续进行 Y 局, 甲赢得全部积分, 分别求得 $P(Y=2)$ 和 $P(Y=3)$, 进而得出 $f(p)=p^2(3-2p)$, 由导数求得最大值即可得出判断.

【详解】(1) 由题意, 若 $k=2, p=\frac{2}{3}$, 且乙先赢了第一局, 则甲要赢得全部积分, 必须赢得后面 2 局比赛, 所以甲最终赢得全部积分的概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

(2) (i) 设比赛再继续进行 X 局, 甲获胜,

当 $X=1$ 时, 甲以 3:1 获胜, $P(X=1)=\frac{3}{5}$,

当 $X=2$ 时, 甲以 3:2 获胜, $P(X=2)=(1-\frac{3}{5}) \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$,

所以甲赢得全部积分的概率为 $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} = \frac{21}{25}$, 乙赢得全部积分的概率为 $1 - \frac{21}{25} = \frac{4}{25}$,

故 $P_{\text{甲}}:P_{\text{乙}}=21:4$.

(ii) 设比赛再继续进行 Y 局, 甲赢得全部积分,

当 $Y=2$ 时, 甲以 4:2 获胜, $P(Y=2)=p^2$,

当 $Y=3$ 时, 甲以 4:3 获胜, $P(Y=3)=C_2^1 p(1-p) \cdot p = 2p^2(1-p)$,

所以 $f(p)=p^2+2p^2(1-p)=p^2(3-2p)$,

因此 $f'(p)=2p(3-2p)+p^2(-2)=6p(1-p)$,

当 $p \in [\frac{7}{8}, 1)$ 时, $f'(p) > 0$,

所以函数 $f(p)$ 在 $[\frac{7}{8}, 1)$ 上单调递增, $f(p)_{\min}=f(\frac{7}{8})=\frac{245}{256}$,

所以乙赢得全部积分的概率的最大值为 $1 - \frac{245}{256} = \frac{11}{256} \approx 0.043 < 0.05$,

故当 $p \in [\frac{7}{8}, 1)$ 时, 若比赛继续进行下去乙赢得全部积分的概率小于 5%.

16. (2026·辽宁沈阳·一模) 已知随机变量 ξ 的取值为非负整数, 其分布列为:

ξ	0	1	2	...	n
P	p_0	p_1	p_2	...	p_n

其中 $p_i \in [0, 1]$, 且 $\sum_{i=0}^n p_i = 1$. 由 ξ 生成的函数为 $f(x) = \sum_{i=0}^n p_i x^i$, $D(\xi) = \sum_{i=0}^n (i - E(\xi))^2 \cdot p_i$.

(1) 若 ξ 生成的函数为 $f(x) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}x^3 + \frac{3}{10}x^5$, 设事件 A : 当 ξ 为奇数时, 求 $P(A)$ 的值;

(2) 现有编号为一和二的两个盒子, 在盒一中有 1 个红球, 在盒二中有 2 个蓝球和 4 个绿球 (球的颜色不

同,其他完全相同).若随机选两个盒中的一个盒,再取出一个球,选择盒一的概率为 $\frac{1}{7}$,设随机变量 ξ 生

成的函数为 $f(x)=\sum_{i=0}^3 p_i x^i$,其中 $p_i(i=1,2,3)$ 分别对应取到红球、蓝球、绿球的概率.

请判断 $D(\xi)$ 与 $f''(1)+f'(1)-[f'(1)]^2$ 的大小关系: $(f''(x)=[f'(x)]')$

(3)从方程 $x_1+x_2+x_3=9$ 的自然数中等可能地随机选取一组解,用 ξ 表示一组解中最小的数,此时由 ξ 生成的函数记为 $t(x)$,令 $g(x)=t'(x)$,求 $g(x)$ 的极小值点.

【答案】(1) $\frac{9}{10}$

(2) $D(\xi)=f''(1)+f'(1)-[f'(1)]^2$

(3) $x=-3$

【分析】(1)根据题意,得到 $P(\xi=1)=\frac{1}{5}, P(\xi=3)=\frac{2}{5}, P(\xi=5)=\frac{3}{10}$,结合 ξ 为奇数时,求得 $P(A)$ 的值,得到答案;

(2)根据题意,得到 ξ 生成的函数为 $f(x)=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}x^2+\frac{4}{7}x^3$,求得 $f'(x), f''(x)$,得到 $f''(1)+f'(1)-[f'(1)]^2$ 的值,再由期望和方差的公式,求得 $D(\xi)$ 的值,即可求解;

(3)得出变量 ξ 的可能取值为0,1,2,3,求得相应的概率,得到函数 $t(x)$,求得 $t'(x)$,令 $g(x)=t'(x)$,求得 $g'(x)$,得到函数 $g(x)$ 单调性,结合极值点的定义,即可求解.

【详解】(1)解:由变量 ξ 生成的函数为 $f(x)=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}x^3+\frac{3}{10}x^5$,

可得 $f(x)=\frac{1}{10}\cdot x^0+\frac{1}{5}\cdot x+0\cdot x^2+\frac{2}{5}\cdot x^3+0\cdot x^4+\frac{3}{10}\cdot x^5$,

所以 $P(\xi=1)=\frac{1}{5}, P(\xi=3)=\frac{2}{5}, P(\xi=5)=\frac{3}{10}$,

所以当 ξ 为奇数时,可得 $P(A)=P(\xi=1)+P(\xi=3)+P(\xi=5)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$.

(2)证明:由 $p_i(i=1,2,3)$ 分别对应取到红球、蓝球、绿球的概率,

故 $p_1=\frac{1}{7}\times 1=\frac{1}{7}, p_2=\frac{6}{7}\times \frac{2}{6}=\frac{2}{7}, p_3=\frac{6}{7}\times \frac{4}{6}=\frac{4}{7}$,即 $p_1+p_2+p_3=1$,所以 $p_0=0$,

所以 ξ 生成的函数为 $f(x)=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}x^2+\frac{4}{7}x^3$,

可得 $f'(x)=\frac{1}{7}+\frac{4}{7}x+\frac{12}{7}x^2$,则 $f''(x)=\frac{4}{7}+\frac{24}{7}x$,

所以 $f''(1)+f'(1)-[f'(1)]^2=\frac{28}{7}+\frac{17}{7}-\left(\frac{17}{7}\right)^2=\frac{26}{49}$,

因为 $E(\xi)=p_1+2p_2+3p_3, f'(x)=p_1+2p_2x+3p_3x^2$,

所以 $E(\xi)=f'(1)$,故 $E(\xi)=f'(1)=\frac{1}{7}+\frac{4}{7}+\frac{12}{7}=\frac{17}{7}$,

因为 $D(\xi)=\sum_{i=0}^n (i-E(\xi))^2 \cdot p_i$,

所以 $D(\xi)=\left(0-\frac{17}{7}\right)^2 \times 0 + \left(1-\frac{17}{7}\right)^2 \times \frac{1}{7} + \left(2-\frac{17}{7}\right)^2 \times \frac{2}{7} + \left(3-\frac{17}{7}\right)^2 \times \frac{4}{7} = \frac{26}{49}$,

所以 $D(\xi)=f''(1)+f'(1)-[f'(1)]^2$.

(3)解:由方程 $x_1+x_2+x_3=9$ 的自然数中等可能地随机选取一组解,

可得有序三元组 (x_1, x_2, x_3) 的总数的组合数为 $C_{9+3-1}^{3-1}=C_{11}^2$ 种,

由随机变量 $\xi=\min\{x_1, x_2, x_3\}$,所以随机变量 ξ 的可能取值为0,1,2,3,

当 $\xi=0$ 时,即数组 (x_1, x_2, x_3) 中,有 1 个 0 或 2 个 0,可得 $P(\xi=0)=\frac{C_3^1 C_8^1 + C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{27}{55}$;

当 $\xi=1$ 时,即数组 (x_1, x_2, x_3) 中,有 1 个 1 或 2 个 1,可得 $P(\xi=1)=\frac{C_3^1 C_5^1 + C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{18}{55}$;

当 $\xi=2$ 时,即数组 (x_1, x_2, x_3) 中,有 1 个 2 或 2 个 2,可得 $P(\xi=2)=\frac{C_3^1 C_2^1 + C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{9}{55}$;

当 $\xi=3$ 时,即数组 (x_1, x_2, x_3) 中,三个数都是 3,可得 $P(\xi=3)=\frac{1}{C_{11}^2} = \frac{1}{55}$,

则变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{27}{55}$	$\frac{18}{55}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{1}{55}$

所以 $t(x) = \frac{27}{55} + \frac{18}{55}x + \frac{9}{55}x^2 + \frac{1}{55}x^3$, 可得 $g(x) = t'(x) = \frac{18}{55} + \frac{18}{55}x + \frac{3}{55}x^2$,

则 $g'(x) = \frac{18}{55} + \frac{6}{55}x$, 令 $g'(x) = 0$, 即 $\frac{18}{55} + \frac{6}{55}x = 0$, 解得 $x = -3$,

所以当 $x < -3$ 时, $g(x)$ 单调递减; 当 $x > -3$ 时, $g(x)$ 单调递增,

所以, 当 $x = -3$ 是函数 $g(x)$ 的极小值点.

题型5 概率与决策性问题

解|题|策|略

根据不同的决策计算概率(有时候是期望值),判断概率大小(可以通过作差或作商)来进行选择。

若概率含参的话,可以通过作差后,然后根据参数来讨论差值是否大于 0, 等于 0, 小于 0。

17. (2025·北京·模拟预测) 在一大型仓库里,存有大量的原料台球,其大小均匀,按红色与白色分为两堆,每种颜色中又有塑料和木头两种材质,对球进行简单随机抽样,获得抽样数据如表:

红色		白色	
塑料球	木质球	塑料球	木质球
68 个	136 个	153 个	51 个

- (1) 估计从仓库所有红色球中随机抽取 1 个得到塑料球的概率;
- (2) 从仓库所有红色球中依次随机抽取 2 个,从仓库所有白色球中依次随机抽取 2 个,估计这 4 个球中塑料球的个数等于木质球的个数的概率.
- (3) 若仓库中红色球的个数比白色球的个数少,从仓库中随机抽取 1 个球,该球为塑料球的概率为 P_1 ,该球为木质球的概率为 P_2 ,比较 P_1 与 P_2 的大小关系(结论不要求证明)

【答案】(1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{61}{144}$

(3) $P_1 > P_2$

【分析】(1) 根据表中数据,结合古典概型求出对应概率;

(2) 4 个球中恰有 2 个塑料球的情况可以分三种,即从红色球中抽出的 2 个都是塑料球;或者红色球中抽出的是 1 个塑料球,1 个木质球;或者红色球中抽出的 2 个都是木质球再结合事件的相互独立性求概率.

(3) 先分别设出红球白球的个数结合概率公式表示出 P_1P_2 再作差比较大小即可.

【详解】(1) 由题知, 从所有红色球中随机抽取 1 个, 得到塑料球的概率为 $P_1 = \frac{68}{68+136} = \frac{68}{204} = \frac{1}{3}$.

(2) 当所取 4 个球中塑料球的个数等于木质球的个数时即有两个塑料球两个木质球,

因为 $P_1 = \frac{1}{3}$, 所以从仓库所有红色球中随机抽取 1 个得到木质球的概率 $P_2 = \frac{2}{3}$,

从所有白色球中随机抽取 1 个, 得到塑料球的概率为 $P_3 = \frac{153}{153+51} = \frac{153}{204} = \frac{3}{4}$,

从所有白色球中随机抽取 1 个, 得到木质球的概率为 $P_4 = \frac{51}{153+51} = \frac{51}{204} = \frac{1}{4}$,

当从红色球中抽出的 2 个都是塑料球, 从白色球中抽的都是木质球时对应的概率为: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{144}$,

当从红色球中抽出的是 1 个塑料球, 1 个木质球, 从白色球中抽的是 1 个塑料球, 1 个木质球时对应的概率为: $C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times C_2^1 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{24}{144}$,

当从红色球中抽出的 2 个都是木质球, 从白色球中抽的都是塑料球时对应的概率为: $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{36}{144}$,

故当这 4 个球中塑料球的个数等于木质球的个数的概率为 $\frac{1}{144} + \frac{24}{144} + \frac{36}{144} = \frac{61}{144}$.

(3) 设红色球总数为 a , 白色球总数为 b , 已知 $b > a > 0$,

从仓库中随机抽取 1 个球, 该球为塑料球的概率为 $P_1 = \frac{\frac{1}{3}a + \frac{3}{4}b}{a+b} = \frac{4a+9b}{12(a+b)}$,

从仓库中随机抽取 1 个球, 该球为木质球的概率为 $P_2 = \frac{\frac{2}{3}a + \frac{1}{4}b}{a+b} = \frac{8a+3b}{12(a+b)}$,

$$P_1 - P_2 = \frac{4a+9b}{12(a+b)} - \frac{8a+3b}{12(a+b)} = \frac{6b-4a}{12(a+b)} = \frac{3b-2a}{6(a+b)} = \frac{3}{6(a+b)} \left(b - \frac{2}{3}a\right),$$

因为 $b > a > 0$, 所以 $b - \frac{2}{3}a > 0$, 所以 $P_1 - P_2 = \frac{3}{6(a+b)} \left(b - \frac{2}{3}a\right) > 0$,

所以 $P_1 > P_2$.

18. (2025·山东·二模) 甲乙二人进行比赛, 已知在每局比赛中, 甲获胜的概率为 p , 乙获胜的概率为 $1-p$,

各局比赛的结果相互独立. 为决出最终获胜的一方, 有以下两种方案可供选择:

方案一: 规定每局比赛的胜方得 1 分, 败方得 0 分, 则首次比对手高两分的一方获胜.

方案二: 首次连胜两局比赛的一方获胜.

(1) 若 $p = 0.75$, 且采用方案一, 求第四场比赛结束时恰好分出胜负的概率.

(2) 若 $0 < p < 0.5$, 为使甲获胜的概率更大, 则应该选择哪种比赛方案? 请说明理由.

附: 当 $0 < q < 1$ 时, $1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}$.

【答案】(1) $\frac{15}{64}$

(2) 方案二, 理由见解析

【分析】(1) 根据题意, 列出满足题意的所有事件, 根据概率的加法公式即可求解;

(2) 根据概率公式分别求得选方案一和方案二时甲获胜的概率, 作商比较大小即可求解.

【详解】(1) 第四场结束恰好分出胜负对应的事件为:

A_1 : {甲赢第1, 3, 4局, 乙赢第2局},

A_2 : {甲赢第2, 3, 4局, 乙赢第1局},

A_3 : {乙赢第1, 3, 4局, 甲赢第2局},

A_4 : {乙赢第2, 3, 4局, 甲赢第1局},

对应概率: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 2p^3(1-p) + 2(1-p)^3p = \frac{15}{64}$;

(2) 设事件 A : {甲最终获胜}, 事件 B : {甲乙在前两局结束后得分相同}.

记使用方案一, 二时甲胜出的概率分别为 $P_1(A), P_2(A)$.

对于方案一, 根据条件概率公式:

$$P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB) = p^2 + P(A|B) \cdot P(B) = p^2 + 2p(1-p)P(A|B),$$

因为每场比赛的结果相互独立, 所以在前两局甲, 乙各胜出一局达到同分的条件下, 甲从第三局开始出现优先超过乙两分的概率恰为 $P(A)$, 即 $P(A|B) = P(A)$,

$$\text{故 } P(A) = p^2 + 2p(1-p)P(A),$$

$$\text{从而 } P_1(A) = \frac{p^2}{2p^2 - 2p + 1}.$$

对于方案二, 甲最终获胜对应的事件只可能是甲乙相互获胜且最后甲连胜两局, 即每局胜者按照“甲乙甲乙... 甲乙甲甲”或“乙甲乙甲... 乙甲甲”的规律.

$$\text{从而甲获胜的概率 } P_2(A) = p^2 \sum_{n=0}^{\infty} p^n (1-p)^n + p \sum_{n=0}^{\infty} p^n (1-p)^n$$

$$= \frac{p^2}{p^2 - p + 1} + \frac{p^2(1-p)}{p^2 - p + 1} = \frac{2p^2 - p^3}{p^2 - p + 1},$$

$$\text{显然 } P_2(A) \neq 0, \text{ 令 } \frac{P_1(A)}{P_2(A)} = \frac{p^2}{2p^2 - 2p + 1} \cdot \frac{p^2 - p + 1}{2p^2 - p^3} > 1,$$

$$\text{有 } \left(p - \frac{1}{2}\right)(p-1)^2 > 0, \text{ 即 } p > \frac{1}{2},$$

因为 $0 < p < 0.5$, 所以 $P_1(A) < P_2(A)$

所以应选择方案二.

19. (2025·江西·模拟预测) 甲和乙两人进行足球射门比赛, 规定先赢满三局的人获胜, 且不存在平局. 已知每局比赛中, 甲赢的概率为 p , 其中 $0 < p < 1$.

(1) 若 $p = \frac{1}{2}$, 分别计算比赛结束时甲赢的局数为2的概率及局数为3的概率;

(2) 记 P_1 为在甲和乙进行了4局比赛分出胜负的条件下甲获胜的概率, P_2 为在甲和乙进行了5局比赛分出胜负的条件下甲获胜的概率, 若 $P_1 > P_2$, 求 p 的取值范围.

【答案】(1) $\frac{3}{16}, \frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{2} < p < 1$

【分析】(1) 比赛结束时甲赢的局数为2局即前4局甲赢2局, 最后一局乙赢; 甲赢的局数为3局即前4局甲赢2局最后一局甲赢, 或者是前三局甲赢.

(2) 分别计算在4局和5局结束时甲获胜的条件概率, 并通过比较大小求解取值范围.

【详解】(1) 记比赛结束时甲赢的局数为 X ,

当 $X=2$ 时, 比赛结束共打了5局, 甲在前4局中赢2局, 其余3局是乙赢,

$$\text{则 } P(X=2) = C_4^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{16},$$

当 $X=3$ 时, 比赛结束共打了 3、或 4、或 5 局, 即连打 3 局都是甲赢、

或打 4 局发生甲赢前 3 局中 2 局和第 4 局、或打 5 局发生甲赢前 4 局中 2 局和第 5 局,

$$\text{则 } P(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + C_4^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

(2) 记事件 B 为“进行了 4 局比赛分出胜负”,

$$\text{则 } P(B) = C_3^2 p^3 (1-p) + C_3^2 p (1-p)^3 = 3p(1-p)(2p^2 - 2p + 1)$$

记事件 A 为“甲获胜”, 则事件 AB 为“进行了 4 局比赛且甲获胜”,

$$\text{则 } P(AB) = C_3^2 p^3 (1-p) = 3p^3(1-p)$$

$$\text{因此, 在进行了 4 局比赛分出胜负的情况下, 甲获胜的概率为 } P_1 = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{p^2}{2p^2 - 2p + 1},$$

记事件 B_1 为“进行了 5 局比赛分出胜负”,

$$\text{则 } P(B_1) = C_4^2 p^3 (1-p)^2 + C_4^2 p^2 (1-p)^3 = 6p^2(1-p)^2$$

则 AB_1 表示“进行了 5 局比赛且甲获胜”,

$$\text{故 } P(AB_1) = C_4^2 p^3 (1-p)^2 = 6p^3(1-p)^2$$

$$\text{因此, 在进行了 5 局比赛分出胜负的情况下, 甲获胜的概率为 } P_2 = P(A|B_1) = \frac{P(AB_1)}{P(B_1)} = p,$$

$$\text{依题意有 } P_1 - P_2 = \frac{-2p^3 + 3p^2 - p}{(p-1)^2 + p^2} = \frac{p(1-p)(2p-1)}{(p-1)^2 + p^2} > 0,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} < p < 1.$$

20. (25-26 高二上 ◆ 广西桂林 ◆ 期末) 学校举行数学知识竞赛, 每班派出一个由两名同学组成的参赛队参加比赛, 比赛分为初赛和决赛, 规则如下: 初赛由参赛队中一名同学答题 3 次, 若 3 次都未答对, 则该队被淘汰, 比赛成绩为 0 分; 若至少答对一次, 则该队进入决赛. 决赛由该队的另一名同学答题 3 次, 每次答对得 3 分, 未答对得 0 分, 该队的比赛成绩为决赛的得分总和.

某班参赛队由甲、乙两名同学组成, 设甲每次答题答对的概率为 p , 乙每次答题答对的概率为 q , 且每次答题相互独立.

(1) 若 $p = \frac{3}{5}$, 甲同学参加初赛, 求该班进入决赛的概率;

(2) 若 $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{2}$, 乙同学参加初赛, 记该班的比赛成绩为 X , 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;

(3) 设 $p + q = 1$, $p \neq q$, 为使得该班的比赛成绩为 9 分的概率最大, 应如何安排甲、乙出场比赛的顺序?

【答案】(1) $\frac{117}{125}$

(2) X 的分布列见解析, 数学期望为 $\frac{21}{4}$

(3) 为使得该班的比赛成绩为 9 分的概率最大, 当 $q < p$ 时, 应安排乙初赛, 甲决赛; 当 $q > p$ 时, 应安排甲初赛, 乙决赛.

【分析】(1) 结合对立事件的概率公式及独立重复试验的概率计算即可.

(2) 确定随机变量的可能取值, 分类计算概率, 列出分布列, 计算数学期望即可.

(3) 分别求出“甲初赛, 乙决赛”和“乙初赛, 甲决赛”的概率, 比较大小即可.

【详解】(1) 已知甲每次答题答对的概率为 $p = \frac{3}{5}$, 则甲每次答题答错的概率为 $1 - p = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

因为甲答题3次是相互独立事件, 所以甲3次都未答对的概率为 $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$.

该班进入决赛的对立事件是甲3次都未答对,

所以该班进入决赛的概率为 $1 - \frac{8}{125} = \frac{117}{125}$.

(2) 已知乙同学参加初赛, 若乙3次都未答对, 则该班被淘汰, 比赛成绩为0分; 若乙至少答对一次, 则进入决赛, 决赛由另一名同学答题3次, 每次都答对得3分, 未答对得0分,

乙初赛答对概率 $q = \frac{1}{2}$, 甲决赛答对概率 $p = \frac{2}{3}$. X 的可能取值为 0, 3, 6, 9.

①乙初赛全错或乙初赛至少答对1次但甲决赛全错.

$$P(X=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{1}{8}\right) \times \frac{1}{27} = \frac{34}{216} = \frac{17}{108}.$$

②乙初赛至少答对1次, 甲决赛答对1次.

$$P(X=3) = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \times C_3^1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{8}\right) \times 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{42}{216} = \frac{7}{36}.$$

③乙初赛至少答对1次, 甲决赛答对2次.

$$P(X=6) = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \times C_3^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \left(1 - \frac{1}{8}\right) \times 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{84}{216} = \frac{7}{18}.$$

④乙初赛至少答对1次, 甲决赛答对3次.

$$P(X=9) = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(1 - \frac{1}{8}\right) \times \frac{8}{27} = \frac{56}{216} = \frac{7}{27}.$$

所以该班的比赛成绩 X 的分布列为

X	0	3	6	9
P	$\frac{17}{108}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{27}$

数学期望为 $E(X) = 0 \times \frac{17}{108} + 3 \times \frac{7}{36} + 6 \times \frac{7}{18} + 9 \times \frac{7}{27} = \frac{21}{4}$.

(3) 成绩为9分的条件: 初赛选手至少答对1次, 决赛选手3次全答对.

甲初赛, 乙决赛: $P_1 = [1 - (1-p)^3] \cdot q^3 = (3p - 3p^2 + p^3) \cdot q^3$.

乙初赛, 甲决赛: $P_2 = [1 - (1-q)^3] \cdot p^3 = (3q - 3q^2 + q^3) \cdot p^3$.

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= (3p - 3p^2 + p^3) \cdot q^3 - (3q - 3q^2 + q^3) \cdot p^3 = 3pq^3 - 3p^2q^3 + p^3q^3 - 3p^3q + 3p^3q^2 - p^3q^3 \\ &= 3pq^3 - 3p^2q^3 - 3p^3q + 3p^3q^2 = 3pq(q^2 - pq^2 - p^2 + p^2q) \\ &= 3pq[(q+p)(q-p) - pq(q-p)] = 3pq(q-p)(q+p-pq). \end{aligned}$$

因为 $p+q=1$, 所以 $P_1 - P_2 = 3pq(q-p)(1-pq)$.

又 $0 < p < 1, 0 < q < 1$, 所以 $0 < pq < 1$, 所以 $1 - pq > 0$.

当 $q < p$ 时, $q-p < 0$, 此时 $P_1 - P_2 < 0$, 即 $P_1 < P_2$, 故乙初赛, 甲决赛时, 成绩为9分的概率更大;

当 $q > p$ 时, $q-p > 0$, 此时 $P_1 - P_2 > 0$, 即 $P_1 > P_2$, 故甲初赛, 乙决赛时, 成绩为9分的概率更大;

综上, 为使得该班的比赛成绩为9分的概率最大, 当 $q < p$ 时, 应安排乙初赛, 甲决赛; 当 $q > p$ 时, 应安排甲初赛, 乙决赛.

热点限时训练

(建议用时: 30 分钟)

21. (2025·山东日照·二模) 设 $n \in N$, 数对 (X_n, Y_n) 按照如下方式生成: ①规定 $(X_0, Y_0) = (1, 1)$; ②抛掷一枚质地均匀的硬币, 当硬币正面朝上时, $X_{n+1} = X_n + 1$, $Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n + 1, & X_n > Y_n \\ Y_n, & X_n \leq Y_n \end{cases}$; 当硬币反面朝上时, $Y_{n+1} = Y_n$

$$+ 1, X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1, & Y_n > X_n \\ X_n, & Y_n \leq X_n \end{cases}$$

(1) 写出数对 (X_2, Y_2) 的所有可能结果;

(2) 当 $n \geq 1$ 时, 记 $X_n = Y_n$ 的概率为 P_n .

(i) 求 P_n 及 P_n 的最大值;

(ii) 设 X_n 的数学期望为 E_n , 求 E_n .

【答案】(1) 答案见解析;

(2) ① $P_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n \geq 1)$, 最大值为 $\frac{1}{2}$; ② $E_n = \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{9}$.

【分析】(1) 写出所有抛掷结果即可得到答案;

(2) ①分析计算得 $P_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - P_n)$, 再构造等比数列即可得到 P_n 和其最值;

②分析得 $Q_n = \frac{1}{2}(1 - P_n)$, 再分类讨论 $X_{n+1} = X_n$ 和 $X_{n+1} = X_n + 1$ 的情况即可.

【详解】(1) 当抛掷两次硬币结果为 (正, 正) 时, $(X_2, Y_2) = (3, 2)$;

当抛掷两次硬币结果为 (正, 反) 时, $(X_2, Y_2) = (2, 2)$;

当抛掷两次硬币结果为 (反, 正) 时, $(X_2, Y_2) = (2, 2)$;

当抛掷两次硬币结果为 (反, 反) 时, $(X_2, Y_2) = (2, 3)$.

(2) 易知当 $n = 1$ 时, $P_1 = 0$; 当 $n = 2$ 时, $P_2 = \frac{1}{2}$;

由题知, $|X_n - Y_n| \leq 1$, 当 $X_n > Y_n$, 即 $X_n = Y_n + 1$ 时,

若掷出反面, 则 $Y_{n+1} = Y_n + 1, X_{n+1} = X_n$, 此时 $X_{n+1} = Y_{n+1}$;

当 $X_n < Y_n$, 即 $Y_n = X_n + 1$ 时, 若掷出正面, 则 $Y_{n+1} = Y_n, X_{n+1} = X_n + 1$, 此时 $X_{n+1} = Y_{n+1}$;

当 $X_n = Y_n$ 时, 无论抛出正面还是反面, $X_{n+1} \neq Y_{n+1}$,

$$\text{所以 } P_{n+1} = \frac{1}{2}P(X_n > Y_n) + \frac{1}{2}P(X_n < Y_n) = \frac{1}{2}[P(X_n > Y_n) + P(X_n < Y_n)] = \frac{1}{2}(1 - P_n),$$

$$\text{所以 } P_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_n - \frac{1}{3}\right), \text{ 所以 } \left\{P_n - \frac{1}{3}\right\} \text{ 是以 } P_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \text{ 为首项, } -\frac{1}{2} \text{ 为公比的等比数列,}$$

$$\text{所以 } P_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ 所以 } P_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n \geq 1).$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } P_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{3};$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } P_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq P_2 = \frac{1}{2};$$

所以, P_n 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

$$\text{②显然, } E_1 = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

由题分析得, $X_n > Y_n$ 与 $X_n < Y_n$ 的概率相等, 均设为 Q_n ,

$$\text{则由①知, } Q_n = \frac{1}{2}(1 - P_n),$$

若 $X_n > Y_n$, 当下次投掷硬币为正面朝上时, $X_{n+1} = X_n + 1$;

当下次投掷硬币为反面朝上时, $X_{n+1} = X_n$;

若 $X_n = Y_n$, 当下次投掷硬币为正面朝上时, $X_{n+1} = X_n + 1$;

当下次投掷硬币为反面朝上时, $X_{n+1} = X_n$;

若 $X_n < Y_n$, 当下次投掷硬币为正面朝上时, $X_{n+1} = X_n + 1$;

当下次投掷硬币为反面朝上时, $X_{n+1} = X_n + 1$.

所以当 $X_{n+1} = X_n$ 时, 概率为 $\frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{2}P_n = \frac{1}{6}\left[2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$, 此时期望不变;

当 $X_{n+1} = X_n + 1$ 时, 概率为 $1 - \left(\frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{2}P_n\right) = \frac{1}{6}\left[4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$, 此时期望加 1;

所以 $E_{n+1} = E_n \times \frac{1}{6}\left[2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] + (E_n + 1) \times \frac{1}{6}\left[4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = E_n + \frac{1}{6}\left[4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

故 $E_n = E_{n-1} + \frac{1}{6}\left[4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = E_{n-2} + \frac{1}{6}\left[4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right] + \frac{1}{6}\left[4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$
 $= E_1 + \frac{1}{6}\left[4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^1\right] + \cdots + \frac{1}{6}\left[4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = 1 + \frac{1}{6}\left[4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^0\right] + \frac{1}{6}\left[4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^1\right] + \cdots$
 $+ \frac{1}{6}\left[4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

$= 1 + \frac{1}{6}\left[4n - \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}\right] = \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{9}$.

经检验, 当 $n=1$ 时也成立. $\therefore E_n = \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{9}$.

22. (2025·河北张家口·二模) 乒乓球比赛规则规定: 在双方打成 10 平后, 领先两分者获胜. 在某校组织的乒乓球比赛中, 甲、乙两名同学已经打成了 10 平. 已知下一球乙同学得分的概率为 $\frac{1}{3}$, 且对以后的每一球, 若乙同学在本球中得分, 则他在下一球的得分概率为 $\frac{2}{3}$, 若乙同学在本球中未得分, 则他在下一球的得分概率为 $\frac{1}{3}$.

(1) 求在继续打了两个球后比赛结束的条件下, 乙同学获胜的概率;

(2) 求乙同学最终获胜的概率.

【答案】(1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{2}{5}$

【分析】(1) 根据条件概率的计算公式求解;

(2) 设事件 C 为“乙赢了本局”, 事件 M 为“乙赢了上一局”, 设事件 $D_i (i=-1, 0, 1)$ 为“当前乙同学分数与甲同学分数之差为 i 时, 最终乙同学获胜”, 由于初始 $P(C) = \frac{1}{3}$, 故乙同学最终获胜的概率等价于 $P(D_0|\bar{M})$, 分 $i=1, i=-1, i=0$ 三种情况讨论求出概率的表达式, 解方程组求出 $P(D_0|\bar{M})$ 得解.

【详解】(1) 在打了两个球后结束, 则甲连胜两球或乙连胜两球,

设事件 A 为“再打两球后结束”, 事件 B 为“乙赢得比赛”,

则 $P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, $P(AB) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$,

故 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}$.

(2) 设事件 C 为“乙赢了本局”, 事件 M 为“乙赢了上一局”,

设事件 $D_i (i=-1, 0, 1)$ 为“当前乙同学分数与甲同学分数之差为 i 时, 最终乙同学获胜”,

当 $i=1$ 时, 乙肯定赢了上一局, 此时 $P(C) = \frac{2}{3}$, 若赢球则乙直接赢得比赛, 若输球则乙获胜的概率为 $P(D_0|\bar{M})$,

$$\text{所以 } P(D_1) = P(D_1|C) \cdot P(C) + P(D_1|\bar{C}) \cdot P(\bar{C}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}P(D_0|\bar{M}),$$

同理, 当 $i=-1$ 时, 乙肯定输了上一局, 此时 $P(C) = \frac{1}{3}$, 若输球则输掉比赛, 若赢球则获胜的概率为 $P(D_0|M)$,

$$\text{所以 } P(D_{-1}) = P(D_{-1}|C) \cdot P(C) + P(D_{-1}|\bar{C}) \cdot P(\bar{C}) = \frac{1}{3}P(D_0|M),$$

当 $i=0$ 时, 若乙赢了上一局, 此时 $P(C) = \frac{2}{3}$, 若赢球则获胜的概率为 $P(D_1)$,

若输球则获胜的概率为 $P(D_{-1})$,

$$\text{所以 } P(D_0|M) = P(D_1)P(C) + P(D_{-1})P(\bar{C}) = \frac{2}{3}P(D_1) + \frac{1}{3}P(D_{-1}),$$

若乙输了上一局, $P(C) = \frac{1}{3}$,

$$\text{同理可得 } P(D_0|\bar{M}) = P(D_1)P(C) + P(D_{-1})P(\bar{C}) = \frac{1}{3}P(D_1) + \frac{2}{3}P(D_{-1}),$$

又初始 $P(C) = \frac{1}{3}$, 故乙同学最终获胜的概率等价于 $P(D_0|\bar{M})$,

$$\text{所以 } \begin{cases} P(D_1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}P(D_0|\bar{M}) \\ P(D_{-1}) = \frac{1}{3}P(D_0|M) \\ P(D_0|M) = \frac{2}{3}P(D_1) + \frac{1}{3}P(D_{-1}) \\ P(D_0|\bar{M}) = \frac{1}{3}P(D_1) + \frac{2}{3}P(D_{-1}) \end{cases}, \text{解得 } P(D_0|\bar{M}) = \frac{2}{5}.$$

所以乙同学最终获胜的概率为 $\frac{2}{5}$.

23. (2025·广东广州·一模) $n(n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3)$ 个人相互传球, 传球规则如下: 若球由甲手中传出, 则甲传给乙; 否则, 传球者等可能地将球传给另外的 $n-1$ 个人中的任何一个. 第一次传球由甲手中传出, 第 $k(k \in \mathbb{N}^*)$ 次传球后, 球在甲手中的概率记为 $A_n(k)$, 球在乙手中的概率记为 $B_n(k)$.

(1) 求 $A_5(2), B_5(2), A_5(3), B_5(3)$;

(2) 求 $A_n(k)$;

(3) 比较 $B_n(k+1)$ 与 $\frac{n-2}{n-1}A_n(k)$ 的大小, 并说明理由.

【答案】(1) $A_5(2) = \frac{1}{4}, B_5(2) = 0, A_5(3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}, B_5(3) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$

(2) $\frac{1}{n} \left[1 - \left(-\frac{1}{n-1} \right)^{k-1} \right]$

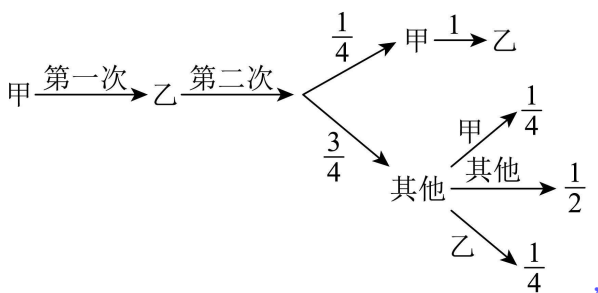
(3) $B_n(k+1) \geq \frac{n-2}{n-1}A_n(k)$

【分析】(1) 列出 5 人传球三次的树状图, 根据概率乘法公式和加法公式得解;

(2) 由题意知, $A_n(k+1) = \frac{1}{n-1}[1 - A_n(k)], A_n(1) = 0$, 根据数列的构造法求通项公式;

(3) 由题意知 $B_n(k+1) = A_n(k) + \frac{1}{n-1}[1 - A_n(k) - B_n(k)]$, 作差法比大小.

【详解】(1) 由题意知,



所以 $A_5(2) = \frac{1}{4}, B_5(2) = 0, A_5(3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}, B_5(3) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$;

(2) 由题意知, $A_n(k+1) = \frac{1}{n-1} [1 - A_n(k)], A_n(1) = 0$,

所以 $A_n(k+1) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n-1} [A_n(k) - \frac{1}{n}], A_n(1) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} \neq 0$,

所以 $A_n(k) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} \left(-\frac{1}{n-1}\right)^{k-1}$,

则 $A_n(k) = \frac{1}{n} \left[1 - \left(-\frac{1}{n-1}\right)^{k-1}\right]$;

(3) 由题意知 $B_n(k+1) = A_n(k) + \frac{1}{n-1} [1 - A_n(k) - B_n(k)]$,

则 $B_n(k+1) = \frac{n-2}{n-1} A_n(k) + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1} B_n(k)$,

所以 $B_n(k+1) - \frac{n-2}{n-1} A_n(k) = \frac{1}{n-1} [1 - B_n(k)] \geq 0$, (当 $k=1$ 时取等号)

所以 $B_n(k+1) \geq \frac{n-2}{n-1} A_n(k)$.

24. (2025·河北石家庄·一模) 在一个温馨的周末, 甲同学一家人齐聚在宽敞明亮的客厅里进行掷游戏币活动,

假设每次掷游戏币出现正面的概率为 p , 且 $p \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, 每次掷游戏币的结果相互独立.

(1) 当 $p = \frac{1}{2}$ 时, 若甲连续投掷了两次, 求至少出现一次正面向上的概率;

(2) 若规定每轮游戏只要连续不断的出现三次正面向上, 则游戏结束, 每轮最多连续投掷 6 次.

①甲在一轮游戏中恰好投掷了 5 次游戏结束的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 的表达式;

②设甲在一轮游戏中投掷次数为 X , 求 $E(X)$ 的最大值.

【答案】(1) $\frac{3}{4}$

(2) ① $f(p) = (1-p)p^3$; ② $\frac{157}{27}$

【分析】(1) 利用对立事件概率的关系求事件的概率.

(2) ①明确投掷 5 次游戏结束的具体情况, 可求得概率;

②明确 X 的可能取值, 求出对应概率, 得到 X 的分布列, 求其期望, 再结合导数与函数的单调性, 求 $E(X)$ 的最大值.

【详解】(1) 设事件 A_i 表示第 i 次正面向上, 其中 $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$. 且 $P(A_i) = p, P(\bar{A}_i) = 1-p$,

设事件 B : “至少出现一次正面向上” $P(B) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

(2) ①设事件 C : “恰好投掷了 5 次游戏结束”, 则 $C = A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 A_5 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 A_5$.

故 $P(C) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)$
 $= (1-p)p^4 + (1-p)^2 p^3 = (1-p)p^3$.

所以 $f(p) = (1-p)p^3$.

②由题意知 $X=3,4,5,6$,

$$P(X=3) = P(A_1 A_2 A_3) = p^3,$$

$$P(X=4) = P(\bar{A}_1 A_2 A_3 A_4) = (1-p)p^3,$$

$$P(X=5) = (1-p)p^3.$$

$$P(X=6) = 1 - P(X=3) - P(X=4) - P(X=5) = 1 - p^3(3-2p).$$

$$\text{则 } E(X) = 3p^3 + 4(1-p)p^3 + 5(1-p)p^3 + 6[1-p^3(3-2p)] = 3p^4 - 6p^3 + 6.$$

$$\text{令 } g(p) = 3p^4 - 6p^3 + 6, g'(p) = 6p^2(2p-3),$$

当 $p \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ 时, $g'(p) < 0$, 即 $g(p)$ 在 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ 上单调递减, 故 $g(p) \leq g(\frac{1}{3}) = \frac{157}{27}$,

因此, $E(X)$ 的最大值为 $\frac{157}{27}$.

25. (2025·江苏·模拟预测) A, B 两人手中各有 3 张《哪吒 2》纪念卡片, 其中 A 手中的 3 张卡片为 1 张红色和 2 张蓝色, B 手中的 3 张卡片都是红色的, 现在两人各从自己的卡片中随机取 1 张, 去与对方交换, 重复 n 次操作, 记 A 手中蓝色卡片 x_n 张, 恰有 2 张蓝色卡片的概率为 p_n , 恰有 1 张蓝色卡片的概率为 q_n .

(1) 分析操作几次后 A 手中蓝色卡片就可能首次出现 0 张, 并求首次出现这种情况的概率 p .

(2) 记 $a_n = 2p_n + q_n$. 证明: 数列 $\{a_n - 1\}$ 为等比数列.

【答案】(1) 两次; $\frac{4}{27}$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 分析出 p_2 包含两种情况, 把两种情况的概率相加得到 $p_2 = \frac{7}{27}$, 同理 q_2 也包含两种情况, 求出相应的概率, 相加可得 $q_2 = \frac{16}{27}$, 由 $p_1 + q_1 = 1$, 故交换一次不合要求, 而 $p_2 + q_2 = \frac{23}{27}$, 故操作两次满足要求, 并求出概率为 $p = 1 - p_2 - q_2 = \frac{4}{27}$ 即可.

(2) 先求出 $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}q_n$, $q_{n+1} = -\frac{1}{9}q_n + \frac{2}{3}$, $a_1 = 2p_1 + q_1 = 4$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}$, 判断出数列 $\{a_n - 1\}$ 是等比数列即可.

【详解】(1) 根据题意, p_2 表示“重复 2 次操作, A 手中恰有 2 张蓝色卡片的概率,

包含两种情况: 第一次 A 交换红色卡片, 第二次 A 还交换红色卡片;

第一次 A 交换蓝色卡片, 第二次 A 交换红色卡片, B 交换蓝色卡片,

$$\text{则 } p_1 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{3}, q_1 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{2}{3}, p_2 = p_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{3} + q_1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{27},$$

q_2 表示“重复 2 次操作, A 手中恰有 1 张蓝色纪念卡片”的概率, 包含两种情况:

第一次 A 交换红色卡片, 第二次 A 交换蓝色卡片;

第一次 A 交换蓝色卡片, 第二次 A 交换蓝色卡片, B 交换蓝色卡片,

或第二次 A 交换红色卡片, B 交换红色卡片,

$$\text{则 } q_2 = p_1 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{3} + q_1 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{16}{27}.$$

其中 $p_1 + q_1 = 1$, 故交换一次不会出现 $x_1 = 0$ 的情况, 而 $p_2 + q_2 = \frac{23}{27}$,

操作两次 A 手中的蓝色纪念卡片就可能首次出现 0 张, 其概率为 $p = 1 - p_2 - q_2 = \frac{4}{27}$.

(2) 由题意可得 $p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{3} + q_n \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}q_n$,

$$q_{n+1} = p_n \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{3} + q_n \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \right) + (1 - p_n - q_n) \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}q_n + \frac{2}{3},$$

$$\text{则 } a_1 = 2p_1 + q_1 = 4, a_{n+1} = 2p_{n+1} + q_{n+1} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{1}{3}q_n + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } a_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}(a_n - 1), a_1 - 1 = \frac{1}{3}, \text{ 得到 } \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = \frac{1}{3},$$

故数列 $\{a_n - 1\}$ 是首项为 $\frac{1}{3}$, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列.

26. (2025·湖北·模拟预测) 某学校数学小组建立了如下的数学模型: 将一个小盒里放入 6 个小球, 其中 4 个黑球, 2 个红球. 模型一为: 若取出黑球, 则放回小盒中, 不作任何改变; 若取出红球, 则放回小盒并再往小盒里加入 2 个红球; 模型二为: 若取出黑球, 则放回小盒中, 不作任何改变; 若取出红球, 则用黑球替换该红球重新放回小盒中.

(1) 分别计算在两种模型下, 抽两次球, 第二次取到的球是红球的概率;

(2) 在模型二的前提下:

①求在第 $n(n \geq 2)$ 次抽球时, 抽到的球恰好是第二个红球的概率 (结果用 n 表示).

②现规定当两个红球都被抽出来时停止抽球, 且最多抽球 10 次, 第 10 次抽球结束后无论盒中是否还有红球均停止抽球, 记抽球的次数为 X , 求 X 的数学期望.

【答案】(1) $\frac{7}{18}, \frac{5}{18}$;

$$(2) \textcircled{1} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right]; \textcircled{2} 9 - 10 \times \left(\frac{5}{6} \right)^9 + 2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^9$$

【分析】(1) 分为取到“黑红”和“红红”两种情况, 分别对两种模型第二次取到的球是红球的概率进行计算即可;

(2) ①先算出第 $k(k < n)$ 次是第一次取到红球, 第 n 次是第二次取到红球的概率为 P_k ,

则第 n 次恰好抽到第二个红球的概率为 P_k 中 k 从 1 到 $n-1$ 取值累加求和;

②利用数学期望的定义和①中的概率公式可得到 $E(X)$ 的表达式, 再利用错位相减法计算得出期望值.

【详解】(1) 记在模型一下, 第二次取到红球的概率为 P_1 , 则分为取到“黑红”和“红红”两种情况,

$$\text{则 } P_1 = \frac{4}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{8} = \frac{7}{18};$$

记在模型二下, 取到红球的概率为 P_2 , 同样分为取到“黑红”和“红红”两种情况,

$$\text{则 } P_2 = \frac{4}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{18};$$

(2) ①设第 $k(k < n)$ 次是第一次取到红球, 第 n 次是第二次取到红球的概率为 P_k ,

$$\text{则 } P_k = \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{6} \right)^{n-k-1} \times \frac{1}{6},$$

则第 n 次恰好抽到第二个红球的概率 P 为 P_k 中 k 从 1 到 $n-1$ 取值累加求和, 即

$$P = \left(\frac{2}{3} \right)^0 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{6} \right)^{n-2} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3} \right)^1 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{6} \right)^{n-3} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{6} \right)^{n-4} \times \frac{1}{6} + \cdots + \left(\frac{2}{3} \right)^{n-2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6},$$

利用等比数列求和公式即可得

$$P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \left[\left(\frac{2}{3} \right)^0 \times \left(\frac{5}{6} \right)^{n-2} + \left(\frac{2}{3} \right)^1 \times \left(\frac{5}{6} \right)^{n-3} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \times \left(\frac{5}{6} \right)^{n-4} + \cdots + \left(\frac{2}{3} \right)^{n-2} \times \left(\frac{5}{6} \right)^0 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \left[1 - \left(\frac{2}{3} \times \frac{6}{5}\right)^{n-1}\right]}{1 - \frac{2}{3} \times \frac{6}{5}} = \frac{5}{18} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \times \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right] = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \times \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right] = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right];$$

②由题可知, X 的取值依次为 $2, 3, \dots, 9, 10$,

当 $X=10$ 时, $P(X=10) = 1 - [P(X=2) + P(X=3) + \dots + P(X=9)]$,

由数学期望的定义和①中的概率公式可知,

$$E(X) = 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3) + \dots + 9 \times P(X=9) + 10 \times$$

$$\{1 - [P(X=2) + P(X=3) + \dots + P(X=9)]\}$$

$$= 10 - [8 \times P(X=2) + 7 \times P(X=3) + \dots + 1 \times P(X=9)]$$

$$= 10 - \frac{1}{3} \times \left[8 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 + 7 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots + 1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^8\right] + \frac{1}{3} \times \left[8 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 + 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^8\right],$$

$$\text{设 } a_n = \frac{1}{3} \times (-n+9) \times \left(\frac{5}{6}\right)^n, b_n = \frac{1}{3} \times (-n+9) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n, n=1, 2, \dots, 8,$$

$$\text{由错位相减法可得 } a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 5 + 10 \times \left(\frac{5}{6}\right)^9, b_1 + b_2 + \dots + b_8 = 4 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^9,$$

$$\text{所以 } E(X) = 10 - \left[5 + 10 \times \left(\frac{5}{6}\right)^9\right] + \left[4 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^9\right] = 9 - 10 \times \left(\frac{5}{6}\right)^9 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^9.$$

27. (2025·上海黄浦·二模) 一盒子中有大小与质地均相同的 20 个小球, 其中白球 n ($3 \leq n \leq 13$) 个, 其余为黑球.

(1) 当盒中的白球数 $n=6$ 时, 从盒中不放回地随机取两次, 每次取一个球, 用 A 表示事件“第一次取到白球”, 用 B 表示事件“第二次取到白球”, 求 $P(B|A)$ 和 $P(B)$, 并判断事件 A 与 B 是否相互独立;

(2) 某同学要策划一个抽奖活动, 参与者从盒中一次性随机取 10 个球, 若其中恰有 3 个白球, 则获奖, 否则不获奖, 要使参与者获奖的可能性最大、最小, 该同学应该分别如何放置白球的数量 n ?

【答案】(1) $\frac{5}{19}, \frac{3}{10}$, 不独立;

(2) 当 $n=6$ 时, 获奖的可能性最大; 当 $n=13$ 时, 获奖的可能性最小.

【分析】(1) 根据给定条件, 利用古典概率及条件概率公式求解, 再利用全概率公式求出 $P(B)$, 利用相互独立事件定义判断即可.

(2) 求出获奖的概率, 再构造函数, 结合组合数公式探讨单调性确定概率最大、最小值.

【详解】(1) 当 $n=6$ 时, 盒中有 6 个白球, 14 个黑球, $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$, $P(B|A) = \frac{5}{19}$,

$$P(B|\bar{A}) = \frac{6}{19}, P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{5}{19} + \frac{7}{10} \times \frac{6}{19} = \frac{3}{10}, \text{ 则 } P(B|A) \neq P(B), \text{ 所以事件 } A \text{ 与 } B \text{ 相互不独立.}$$

(2) 从 20 个球中取 10 个球, 恰有 3 个白球的概率 $P = \frac{C_n^3 C_{20-n}^7}{C_{20}^{10}}$,

$$\text{设 } f(n) = C_n^3 C_{20-n}^7, \text{ 当 } 3 \leq n \leq 12 \text{ 时, } \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{C_{n+1}^3 C_{19-n}^7}{C_n^3 C_{20-n}^7} = \frac{\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} \cdot \frac{(19-n)!}{7!(12-n)!}}{\frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \frac{(20-n)!}{7!(13-n)!}} = \frac{-n^2+12n+13}{-n^2+22n-40},$$

$$-n^2+12n+13 - (-n^2+22n-40) = 53-10n, \text{ 当 } 3 \leq n \leq 5 \text{ 时, } f(n+1) > f(n),$$

$$\text{当 } 6 \leq n \leq 12 \text{ 时, } f(n+1) < f(n), \text{ 因此 } f(3) < f(4) < f(5) < f(6) > f(7) > \dots > f(13),$$

$$\text{而 } f(3) = C_{13}^7 = C_{13}^6 > C_{13}^3 = f(13), \text{ 则 } f(n)_{\max} = f(6), f(n)_{\min} = f(13),$$

所以当 $n=6$ 时,参与者获奖的可能性最大;当 $n=13$ 时,参与者获奖的可能性最小.

28. (2026 ◆河北◆模拟预测) 篮球是以手为中心的身体对抗性体育运动,篮球控球能力对球员的场上表现有直接影响. 某教练 A 指导三名学员 B, C, D 进行篮球控球训练,训练开始时篮球在教练 A 手里,由教练 A 进行控球示范,1 分钟后等可能地传给学员 B, C, D 其中一人,学员控球训练 1 分钟后,将球传出,传给教练 A 的概率为 $\frac{1}{4}$,传给另外两名学员的概率均为 $\frac{3}{8}$,篮球在四人之间传递.

(1) 若四人进行了 3 次传球,求教练 A 控球 2 次的概率.

(2) 设 x_n, t_n 分别表示第 n 次传球后由 A, B 控球的概率.

(i) 求 x_n 的表达式及其最大值;

(ii) 若数列 $\left\{n \cdot \left|1 - \frac{15t_n}{4}\right|\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

【答案】(1) $\frac{7}{16}$;

(2) (i) $x_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n$, 其最大值为 $\frac{1}{4}$; (ii) $T_n = \frac{4}{9} - \frac{3n+4}{9 \cdot 4^n}$.

【分析】(1) 分析给定信息,将问题转化为两个互斥事件的和,并结合概率的乘法公式计算即得.

(2) (i) 由给定信息可得 $x_n + 3t_n = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{4}t_n \cdot 3$,再利用构造法求出数列通项,按 n 分奇偶求出最大值; (ii) 由 (i) 的结论求出 t_n ,进而求出 $n \cdot \left|1 - \frac{15t_n}{4}\right|$,再利用错位相减法求和.

【详解】(1) 第 1 次传球后必为学员控球,第 2 次传球后教练控球的概率为 $\frac{1}{4}$,学员控球的概率为 $\frac{3}{4}$,

若第 2 次传球后教练控球,则第 3 次传球后必为学员控球,学员控球的概率为 1;

若第 2 次传球后学员控球,则第 3 次传球后教练控球的概率为 $\frac{1}{4}$,

四人进行了 3 次传球,教练 A 控球 2 次的事件是初始控球及只在第 2 次控球的事件 A_1 ,

与初始控球及只在第 3 次控球的事件 A_2 的和,概率为 $P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$,

所以四人进行了 3 次传球,教练 A 控球 2 次的概率为 $\frac{7}{16}$.

(2) (i) 因规则对学员 B, C, D 完全对称,且第 1 次传球后他们控球的概率相等,故之后任意一次传球后他们控球的概率均相等,

可记为 t_n , 则 $x_n + 3t_n = 1$, 又 $x_{n+1} = \frac{1}{4}t_n \cdot 3$,

因此 $x_{n+1} = \frac{1}{4}(1 - x_n)$, 即 $x_{n+1} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{4}\left(x_n - \frac{1}{5}\right)$, 由 $x_1 = 0$, 得 $x_1 - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$,

则数列 $\left\{x_n - \frac{1}{5}\right\}$ 是首项为 $-\frac{1}{5}$, 公比为 $-\frac{1}{4}$ 的等比数列, $x_n - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$,

于是 $x_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n$, 当 n 为正奇数时, $x_n = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{1}{5}$,

当 n 为正偶数时, $x_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n > \frac{1}{5}$, 而数列 $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ 单调递减, 则当 $n=2$ 时, x_n 取最大值 $\frac{1}{4}$,

所以 x_n 的表达式为 $x_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n$, 其最大值为 $\frac{1}{4}$.

(ii) 由 (i) 得 $3t_n = 1 - x_n = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n$, $\frac{15t_n}{4} = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n$,

因此 $n \cdot \left|1 - \frac{15t_n}{4}\right| = \frac{n}{4^n}$, $T_n = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots + \frac{n}{4^n}$, $\frac{1}{4}T_n = \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \cdots + \frac{n-1}{4^n} + \frac{n}{4^{n+1}}$,

$$\text{两式相减得 } \frac{3}{4}T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n} - \frac{n}{4^{n+1}} = \frac{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4^n})}{1-\frac{1}{4}} - \frac{n}{4^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{3n+4}{3 \cdot 4^{n+1}},$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{4}{9} - \frac{3n+4}{9 \cdot 4^n}.$$

29. (25-26 高三上 ◆ 湖南长沙 ◆ 月考) 甲、乙两人共进行 $2n-1$ ($n \in N^*$ 且 $n \geq 2$) 局比赛, 假设每局比赛甲赢的概率都是 p ($0 < p < 1$), 各局比赛之间的结果互不影响, 且没有平局.

(1) 设 $p = \frac{1}{2}$, 若全部 $2n-1$ 局比完后, 所赢局数多者获胜. 甲获胜的概率记为 p_n ,

(i) 求 p_2 ;

(ii) 试比较 p_n 与 $\frac{1}{2}$ 的大小, 并证明你的结论.

(2) 设 $0 < p < \frac{1}{2}$, “ $2n-1$ ($n \in N^*$ 且 $n \geq 2$) 局比赛结束后, 甲赢得奇数局比赛”的概率记为 q_n , 证明: $q_{n+2} - q_{n+1} < q_{n+1} - q_n$.

【答案】(1) (i) $p_2 = \frac{1}{2}$; (ii) $p_n = \frac{1}{2}$, 证明见解析;

(2) 证明见解析.

【分析】(1) (i) 由比赛局数和甲赢的局数服从二项分布 $B(3, \frac{1}{2})$ 即可结合互斥事件概率加法公式计算求解;

(ii) 记事件 A = “甲获胜”, 事件 B = “乙获胜”, 由甲乙获胜各赢的局数以及每局赢的概率结合没有平局结果的特性即可求解证明;

(2) 先根据甲赢的局数服从二项分布 $B(2n-1, p)$ 和二项式定理原理求出 q_n 的表达式, 接着计算差值 $q_{n+1} - q_n$ 和 $q_{n+2} - q_{n+1}$, 再由不等式性质分析即可比较大小得证.

【详解】(1) (i) 当 $n=2$ 时, 比赛局数为 $2n-1=3$ 局,

则甲获胜的条件是至少赢两局, 且甲赢的局数服从二项分布 $B(3, \frac{1}{2})$,

$$\text{所以 } p_2 = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2};$$

(ii) $p_n = \frac{1}{2}$, 证明:

记事件 A = “甲获胜”, 则甲赢的局数 $k \geq n$, 事件 B = “乙获胜”, 则乙赢的局数 $k' \geq n$,

因为 $p = 1 - p = \frac{1}{2}$, 所以 $P(A) = P(B)$,

又因为打的局数 $2n-1$ 为奇数, 各局比赛之间的结果互不影响, 且没有平局.

所以 $P(A) + P(B) = 1$, 所以 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$,

所以 $p_n = \frac{1}{2}$;

(2) 由题甲赢的局数服从二项分布 $B(2n-1, p)$,

则“ $2n-1$ ($n \in N^*$ 且 $n \geq 2$) 局比赛结束后, 甲赢得奇数局比赛”的概率

$$q_n = C_{2n-1}^1 p(1-p)^{2n-2} + C_{2n-1}^3 p^3(1-p)^{2n-4} + \cdots + C_{2n-1}^{2n-3} p^{2n-3}(1-p)^2 + C_{2n-1}^{2n-1} p^{2n-1},$$

$$\text{因为 } [p + (1-p)]^{2n-1} = C_{2n-1}^0 p^{2n-1}(1-p)^0 + C_{2n-1}^1 p^{2n-2}(1-p)^1 + \cdots + C_{2n-1}^{2n-2} p^1(1-p)^{2n-2} +$$

$$C_{2n-1}^{2n-1} p^0(1-p)^{2n-1},$$

$$[(1-p) - p]^{2n-1} = C_{2n-1}^0 (-p)^0(1-p)^{2n-1} + C_{2n-1}^1 (-p)(1-p)^{2n-2} + \cdots + C_{2n-1}^{2n-2} (-p)^{2n-2}(1-p)^1 +$$

$$C_{2n-1}^{2n-1}(-p)^{2n-1},$$

$$\text{所以 } q_n = \frac{[p + (1-p)]^{2n-1} - [(1-p) - p]^{2n-1}}{2} = \frac{1 - (1-2p)^{2n-1}}{2},$$

$$\text{所以 } q_{n+1} - q_n = \frac{1 - (1-2p)^{2n+1}}{2} - \frac{1 - (1-2p)^{2n-1}}{2} = \frac{(1-2p)^{2n-1} - (1-2p)^{2n+1}}{2} = \frac{(1-2p)^{2n-1}[1 - (1-2p)^2]}{2} = 2p(1-p)(1-2p)^{2n-1},$$

$$\text{同理 } q_{n+2} - q_{n+1} = 2p(1-p)(1-2p)^{2n+1},$$

$$\text{因为 } 0 < p < \frac{1}{2}, \text{ 所以 } 0 < 1 - 2p < 1, 2p(1-p) > 0,$$

$$\text{所以 } (1-2p)^{2n+1} = (1-2p)^{2n-1}(1-2p)^2 < (1-2p)^{2n-1},$$

$$\text{所以 } 2p(1-p)(1-2p)^{2n+1} < 2p(1-p)(1-2p)^{2n-1}, \text{ 即 } q_{n+2} - q_{n+1} < q_{n+1} - q_n.$$

30. (2026 ◆ 广东湛江 ◆ 一模) 某农作物的种植过程分为育苗与移栽两个环节. 在育苗环节, 每粒种子的成活率为 p . 在育苗成功的条件下, 对幼苗进行移栽, 每株幼苗移栽的成活率为 q . 若该农作物育苗成功且移栽成活则认为种植成功. 每粒种子种植是否成功互不影响.

(1) 若一粒种子种植成功的概率为 $\frac{1}{2}$, 在育苗成功的条件下, 移栽失败的概率为 $\frac{1}{4}$, 现播撒 300 粒种子,

设育苗成功的种子数量为 ζ , 求 $E(\zeta)$;

(2) 播撒 6 粒种子, 设种植成功的数量为 X , 求 $X=5$ 的概率 P , 并求 P 的最大值.

【答案】(1) $E(\zeta) = 200$

(2) 概率 $P = 6(pq)^5 - 6(pq)^6$, 最大值 $\left(\frac{5}{6}\right)^5$

【分析】(1) 育苗成功的种子数量为 ζ 服从二项分布, 按照二项分布性质即可得;

(2) 为了保证 $X=5$, 则 6 粒种子中育苗成功的数量需大于或等于 5. 接着计算其概率, 令 $pq=t$, 设函数 $f(t) = 6t^5 - 6t^6 (t \in (0, 1))$, 分析函数单调性即可得.

【详解】(1) 记育苗成功为事件 A , 移栽成活为事件 B .

由题意得 $P(A) = p, P(B|A) = q$,

因为 $P(AB) = P(A)P(B|A) = pq = \frac{1}{2}, P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - q = \frac{1}{4}$,

所以 $q = \frac{3}{4}, p = \frac{2}{3}$.

设播撒 300 粒种子时育苗成功的种子数量为 ζ ,

根据题意可得 $\zeta \sim B\left(300, \frac{2}{3}\right)$, 由此可得 $E(\zeta) = np = 300 \times \frac{2}{3} = 200$.

(2) 解法一: 一粒种子种植成功概率为 pq , “ $X=5$ ”表示事件“恰好有 5 粒种子种植成功”,

所以 $P(X=5) = C_6^5(pq)^5(1-pq) = 6(pq)^5 - 6(pq)^6$.

令 $pq=t$, 设函数 $f(t) = 6t^5 - 6t^6 (t \in (0, 1))$,

$\therefore f'(t) = 6t^4(5-6t)$.

当 $t \in \left(0, \frac{5}{6}\right)$ 时, $f'(t) > 0$; 当 $t \in \left(\frac{5}{6}, 1\right)$ 时, $f'(t) < 0$,

$\therefore f(t)$ 在 $\left(0, \frac{5}{6}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{5}{6}, 1\right)$ 上单调递减,

$\therefore f(t)$ 的最大值为 $f\left(\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$,

综上, $X=5$ 的概率 $P=6(pq)^5-6(pq)^6$, 其最大值为 $\left(\frac{5}{6}\right)^5$.

解法二: 为了保证 $X=5$, 则 6 粒种子中育苗成功的数量需大于或等于 5.

设育苗成功的数量等于 5 为事件 C , 育苗成功的数量等于 6 为事件 D ,

则可得 $P(C)=C_6^5p^5(1-p)$, $P(D)=p^6$,

则有 $P(X=5)=P(C)\times q^5+P(D)\times C_6^1q^5(1-q)$,

从而可得 $P(X=5)=6(pq)^5-6(pq)^6$.

令 $pq=t$, 设函数 $f(t)=6t^5-6t^6(t\in(0,1))$,

$\therefore f'(t)=6t^4(5-6t)$.

当 $t\in\left(0,\frac{5}{6}\right)$ 时, $f'(t)>0$; 当 $t\in\left(\frac{5}{6},1\right)$ 时, $f'(t)<0$,

$\therefore f(t)$ 在 $\left(0,\frac{5}{6}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{5}{6},1\right)$ 上单调递减,

$\therefore f(t)$ 的最大值为 $f\left(\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^5$,

综上, $X=5$ 的概率 $P=6(pq)^5-6(pq)^6$, 其最大值为 $\left(\frac{5}{6}\right)^5$.