

概率难点大题归纳

热点内容解读

近三年：

1、以数学建模与概率思维为核心本体。

概率题的本质是引导学生“用数学眼光观察世界”，这一理念在近几年得到彻底贯彻。题目多设置真实的、具有时代特征的情境，如体育比赛（乒乓球、篮球、卡片对战）、科技应用（神经网络激活函数）、生态治理（空气尘埃检测）、经济决策（服务器租赁）等。这要求学生能剥离情境表象，从中抽象出等可能事件、独立重复试验、离散型随机变量等数学模型，并灵活运用分类与讨论思想、转化与化归思想进行求解。概率的考查已从“算概率”升级为“建立概率模型并决策”。

2、知识内部的深度交叉与创新融合。

概率题不再是孤立的古典概型或分布列计算。在近三年，特别是 2025 年的压轴题中，概率与数列（递推）的深度融合成为最大亮点。例如 2025 年全国二卷第 19 题乒乓球模型，要求学生构建并求解复杂的概率递推关系；2023 年新高考 I 卷的投篮问题，同样涉及用递推数列求解概率。此外，概率与排列组合、函数、不等式、导数的结合也日趋紧密，使得题目综合性、探究性大大增强，完全突破了传统“套路题”的范畴。

3、设问方式的层次化与反套路化。

概率大题的设问遵循“由易到难，层层递进”的原则，但后一问往往需要基于前一问的结论进行深度推理或创新证明。这种设计旨在区分不同思维层次的学生，其中压轴小问常需要创造性地运用数学工具，有效考查创新思维。

4、概率统计题已从常规中档题晋升为压轴题的常客。例如 2025 年全国二卷，概率题（第 19 题）取代传统导数题成为新压轴，释放出强烈信号。题干背景紧密联系科技前沿、社会热点与国家战略（如人工智能、生态保护、“东数西算”），信息量和阅读量增大，对信息筛选与理解能力提出新要求。解题需综合运用分解随机变量（如 2025 年一卷第 14 题）、全概率公式、数列递推与数学归纳法等多种工具，单纯套公式已无法应对。

预测 2026 年：

基于以上分析，“在新颖、复杂、真实的跨学科情境中，构建概率模型并完成逻辑严密的探究与决策”的能力，将是 2026 年高考概率大题的决胜关键。概率统计的核心价值在于，它是最能体现数学应用性、思维性与时代性的板块之一，其“反套路、反刷题”的命题导向与当前高考选拔创新人才的目标准确契合

概率难点大题归纳

题型01 马尔科夫链

题型02 离散型分布列为等比数列

题型03 二项分布列概率最大项

题型04 概率与函数、导数求最值

题型05 概率与决策性问题

热点题型突破

题型1 马尔科夫链

解|题|策|略

把**全概率公式**与**过程的马尔科夫性**(无记忆性)结合: 当前状态的概率只与上一步状态有关, 因此可以按**上一步的所有可能情况**对当前概率进行分解。

常见背景: 通常为**多轮次**的概率问题, 涉及状态转移(如比赛得分、传球、闯关等); 游走时首次到达某点的概率; 每一阶段状态随机变化, 求 n 次后处于某个状态的概率; 期望步数问题(此时是求期望数列的递推)

1. (25-26 高三上·云南昆明·月考) 甲、乙两名同学都准备参加某知识竞答活动, 该竞答活动会逐一给出 n 道不同的题目供参赛者回答, 每道题目的回答只有正确或错误两种情况, 各道题目回答情况不会相互影响。

(1) 如果参赛者须回答 5 道问题, 当连续答对 4 道时, 即可赢得挑战, 若甲同学对于即将给出的各道题目, 均有 $\frac{1}{3}$ 的概率答对, 求甲赢得挑战的概率;

(2) 若乙同学对于即将给出的各道题目, 均有 $\frac{2}{3}$ 的概率答对. 记 P_n 为乙同学回答 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 道题目后, 没有出现连续答对至少 4 道题目这一情形的概率。

(i) 求 P_4, P_6 ;

(ii) 证明: $P_{100} \leq P_{99}$.

2. (2026·湖北·模拟预测) 某校为丰富学生的课外活动特举办了一次篮球投篮比赛活动, 现已知刘翔同学每次投篮投中的概率为 $\frac{3}{4}$, 投不中的概率为 $\frac{1}{4}$. 为激励学生运动的积极性, 规定: 投中一次得 2 分, 投不中得 1 分. 刘翔同学投篮若干次, 每次投中与否互不影响, 各次得分之和作为最终得分.
- (1) 若投篮 2 次, 最终得分为 X , 求随机变量 X 的分布列和期望;
- (2) 设最终得分为 n 的概率为 P_n , 证明: 数列 $\{P_{n+1} - P_n\}$ 为等比数列, 并求数列 $\{P_n\}$ 的通项公式.

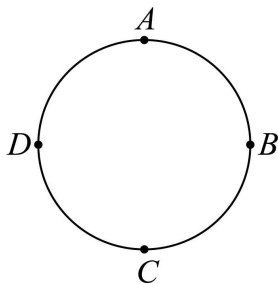
3. (2025·四川绵阳·模拟预测) 甲乙两人参加单位组织的知识答题活动, 每轮活动由甲乙各答一个题, 已知甲、乙第一轮答对的概率都为 $\frac{1}{2}$. 甲如果第 $k(k \in N^*)$ 轮答对, 则他第 $k+1$ 轮也答对的概率为 $\frac{3}{4}$, 如果第 k 轮答错, 则他第 $k+1$ 轮也答错的概率为 $\frac{3}{4}$; 乙如果第 k 轮答对, 则他第 $k+1$ 轮也答对的概率为 $\frac{2}{3}$, 如果第 k 轮答错, 则他第 $k+1$ 轮也答错的概率为 $\frac{2}{3}$. 在每轮活动中, 甲乙答对与否互不影响.
- (1) 若前两轮活动中第二轮甲乙都答对求两人第一轮也都答对的概率;
- (2) 求证: $\forall k \in N^*$, 甲在第 k 轮答对的概率为定值;

4. (25-26 高三上 ◆ 广东深圳 ◆ 期末) 某智慧城市在主干道部署了 5 个独立边缘计算节点, 初始时, 2 个节点在线, 3 个为宕机. 每个月系统随机等概率巡查 1 个节点: 若该节点为宕机, 则修复成功率为 $p(0 < p < 1)$; 若该节点已在线, 则仅进行维护, 用 X_n 表示第 n 个月后在线节点数, $E(X_n)$ 表示其期望, 且 $E(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{p}{5}\right)E(X_n) + p$.

(1) 当 $p = \frac{1}{3}$ 时, 求 $P(X_2=3)$;

(2) 已知每台宕机节点每个月造成 2 万元经济损失, 初始月份不考虑损失, 若要求从第 1 个月开始的总期望经济损失不超过 36 万元, 求 p 的最小值.

5. (2025·广东佛山·三模) 如图, A, B, C, D 四人围成一圈玩成语接龙游戏, 游戏开始时随机抽取一个成语, 第1次由 A 接龙, 下一次接龙的人由掷硬币决定, 规则如下: 随机掷3枚硬币, 如果3枚硬币都是反面朝上, 则第2次由 A 接龙; 如果3枚硬币中仅有1枚正面朝上, 则第2次由 B 接龙; 如果3枚硬币中仅有2枚正面朝上, 则第2次由 C 接龙; 如果3枚硬币都是正面朝上, 则第2次由 D 接龙. 记第2次接龙的人 x (x 为 A 或 B 或 C 或 D), 再次掷3枚硬币决定下一次的接龙人, 若掷出的硬币中有 i 枚硬币正面朝上, 则按顺时针方向数, 下一次由 x 后面的第 i 个人接龙 (若 $i=0$, 则下一次由 x 接龙). 此后每次接龙以此类推.



- (1) 分别求出第2次由 A, B, C, D 接龙的概率;
- (2) 记前3次中由 A 接龙的次数为 X , 求 X 的分布列及期望;
- (3) 记第 n 次由 A 接龙的概率为 P_{A_n} , 证明 $P_{A_{4n-1}} = \frac{1}{4} (n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*)$.

题型2 离散型分布列为等比数列

解|题|策|略

离散型分布列为等比数列的题型,用错位相减法求期望(或其它求和)。这类题不涉及多轮递推,而是单次试验中某个离散随机变量的概率分布呈现等比规律,求和时往往要计算形如 $E(X) =$

$\sum_n n \cdot P(X=n)$ 其中 $P(X=n)$ 是等比数列。

6. (2026·重庆·一模)元旦晚会上,班委为了活跃氛围,特准备了“丢沙包”游戏,参与者在指定范围内投掷沙包入框,并制定了两个小游戏,且每位参与者只能参加其中一项游戏,规则如下:

游戏一:参与者进行投掷,若在投掷过程中累计命中次数达到 2 次,则游戏立即结束并获奖,若投掷 n 次 ($n \geq 2$ 且 $n \in N$) 后仍未累计命中 2 次,则游戏结束,无法获奖;

游戏二:参与者进行投掷,不限投掷次数,若每次投掷中,命中记 1 分,未命中记 -1 分,当累计得分达到 3 分,则游戏立即结束并获奖,当累计得分达到 -3 分,游戏立即结束,无法获奖.

现有甲、乙两位同学分别参加游戏,且每位同学每次投掷是否命中相互独立. 已知甲同学参加游戏一,且每次命中率为 $\frac{1}{3}$;乙同学参加游戏二,每次命中率为 $p(0 < p < 1)$.

(1) 当 $n=4$ 时,记甲同学投掷次数为 X ,求 X 的分布列及期望;

(2) 当 $n=k(k \geq 2$ 且 $k \in N)$ 时,求甲同学获奖的概率(用含 k 的表达式表示);

(3) 记甲同学获奖时,投掷次数不超过 4 次的概率为 p_0 ;若乙同学获奖概率不小于 p_0 ,求 p 的最小值.

7. (2025·广西河池·三模) 现有编号为 $1, 2, 3, \dots, n (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4)$ 的 n 名同学进行闯关游戏, 闯关游戏有两种方式可以选择, 游戏规则如下.

方式一: ①该游戏共设置第一关与第二关, 首先由编号为 1 的同学闯第一关;

②若编号为 $i (i=1, 2, 3, \dots, n-1)$ 的同学第一关闯关成功, 则该同学继续闯第二关, 若编号为 i 的同学第一关闯关未成功, 则由编号为 $i+1$ 的同学接替闯第一关;

③若编号为 $j (j=1, 2, 3, \dots, n-1)$ 的同学第二关闯关成功, 则闯关游戏结束, 若编号为 j 的同学第二关闯关未成功, 则由编号为 $j+1$ 的同学接替闯第二关;

④若闯关轮到编号为 n 的同学, 无论编号为 n 的同学闯关成功与否, 闯关游戏均结束.

方式二: ①该游戏共设置第一关与第二关, 首先由编号为 1 的同学闯第一关;

②若编号为 $i (i=1, 2, 3, \dots, n-1)$ 的同学第一关闯关成功, 则该同学继续闯第二关, 若编号为 i 的同学第一关闯关未成功, 则由编号为 $i+1$ 的同学接替闯第一关;

③若编号为 $j (j=1, 2, 3, \dots, n-1)$ 的同学第二关闯关成功, 则闯关游戏结束, 若编号为 j 的同学第二关闯关未成功, 则由编号为 $j+1$ 的同学接替闯关且从第一关重新开始闯关;

④若闯关轮到编号为 n 的同学, 无论编号为 n 的同学闯关成功与否, 闯关游戏均结束.

假设每位同学闯第一关成功的概率均为 $\frac{2}{3}$, 闯第二关成功的概率均为 $\frac{3}{4}$, 且每位同学闯关成功与否相互独立.

(1) 若均选择方式一闯关, 当闯关游戏结束时, 求闯关人数不超过 2 的概率.

(2) 设事件 C 表示“所有同学均按方式一闯关, 恰好由编号为 3 的同学闯关后闯关游戏结束”, 设事件 D 表示“所有同学均按方式二闯关, 恰好由编号为 3 的同学闯关后闯关游戏结束”, 分别求出事件 C 和事件 D 的概率, 比较所求概率的大小, 并判断应选择哪种方式闯关更合理.

(3) 若均选择方式二闯关, 记闯关游戏结束时闯关的总人数为 X , 求 X 的数学期望 $E(X)$.

8. (25-26 高三上·重庆·月考) 一个不透明的袋子中装有编号分别为 1, 2, 3, 4 的 4 个小球, 每次从袋中随机摸出 1 个小球并记录编号后放回袋中, 当连续两次摸出的小球编号相同时, 停止摸球, 设停止摸球时已摸球的次数为 X . 记第 k 次摸到的小球编号为 Y_k .

(1) 求 $P(X=2)$ 与 $P(X=3)$;

(2) 设 $P(X=n) = a_n$, 求 $a_2 + a_3 + \cdots + a_n + 4a_{n+1}$ 与 $a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n$;

(3) 当 $X=n$ 时, S_n 为随机变量, 若 $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ 是奇数, 则 $S_n = 1$, 若 $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ 是偶数, 则 $S_n = 0$, 求 $P(S_n=0)$.

9. (2025·湖南长沙·模拟预测) 某中学国学小组共有 $n(n \in N^*, n \geq 2)$ 个同学, 分别编号为 $1, 2, 3, \dots, n$. 在一次小组活动中, 指导老师设计了两道问答题, 并给出如下两个答题规则.

规则一: ①第1号同学首先答第一题. ②若第 $i(i=1, 2, 3, \dots, n-1)$ 号同学答对第一题, 则该生继续答第二题; 若第 i 号同学答错或不会答第一题, 则由第 $i+1$ 号同学接替答第一题. ③若第 i 号同学答对第二题, 则答题活动结束; 若第 i 号同学答错或不会答第二题, 则由第 $i+1$ 号同学接替答第二题. ④若答题轮到第 n 号同学, 则当该生遇到答错或不会答的情况时, 答题活动也结束.

规则二: ①, ②同规则一. ③若第 i 号同学答对第二题, 则答题活动结束; 若第 i 号同学答错或不会答第二题, 则由第 $i+1$ 号同学接替答题, 且重新从第一题开始作答. ④同规则一.

假设每个同学答对第一题的概率都为 $\frac{2}{3}$, 答对第二题的概率都为 $\frac{1}{2}$, 且各同学的答题相互独立.

- (1) 若 $n \geq 3$, 且按规则一答题, 当答题活动结束后, 求答题人数不超过2人的概率;
- (2) 若 $n \geq 4$, 为使第3号同学答题后答题活动结束的概率较大, 应选择哪个规则答题;
- (3) 若按规则二答题, 记答题活动结束后参与答题的总人数为 X , $a_n = E(X-3)$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列.

10. (2025·四川成都·模拟预测) 一口袋中装有 10 个小球, 其中标有数字 1, 2, 3, 4, 5 的小球各两个, 这些小球除数字外其余均相同.

(1) 某人从中一次性摸出 4 个球, 设事件 A “摸出的 4 个球中至少有一个数字是 5”, 事件 B “摸出的 4 个球中恰有两个数字相同”; 分别求事件 A 和事件 B 的概率;

(2) 现有一游戏, 游戏规则是: 游戏玩家每次有放回地从袋中随机摸出一球, 若摸到 5 号球, 则游戏结束; 否则继续摸球, 当摸到第 n ($n \geq 2$) 个球时, 无论摸出的是几号球游戏都结束. 设 X 表示摸球的次数 ($1 \leq X \leq n, X \in N^*$), 求随机变量 X 的期望, 并比较期望与 1 的大小.

题型3 二项分布列概率最大项

解|题|策|略

对二项分布列 $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2,3 \cdots \cdots P(X=k)$ 取最大项时有:

$$\begin{cases} P(X=k) \geq P(X=k-1) \\ P(X=k) \geq P(X=k+1) \end{cases} \quad (\text{类似二项展开式中系数最大项})$$

可解得 $p(n+1) - 1 \leq k \leq p(n+1)$, k 取这个范围内整数, 当 k 由 0 增加到 n 时, $P(X=k)$ 的值先由小到大, 再由大到小。

11. (2026·重庆九龙坡·一模) 某企业为了提高生产效率和产品质量, 更新了机器设备, 为了检验新机器生产零件的质量, 该企业质检部门要对新机器生产的零件抽样检测.

(1) 在调试生产初期, 质检部门抽检该机器生产的 10 个零件中有 2 个为次品, 现从这 10 个零件中随机抽取 3 个零件, 设抽取的零件为次品的个数为 ξ , 求 ξ 的分布列和数学期望;

(2) 在正式生产后, 质检部门从新机器生产的一批零件中随机抽取 100 件进行检验, 其中有 3 件为次品. 用频率估计概率, 现从新机器生产的这批零件中随机抽取 $n(n \geq 2)$ 个零件, 记这 n 个零件中恰有 2 件为次品的概率为 P_n , 求 P_n 取得最大值时 n 的值.

12. (25 - 26 高三上·江西抚州·期末) 某学校组织“学党史、强信念、跟党走”为主题的知识竞赛,每位参加比赛的同学均可参加多轮答题活动,每轮答题结果互不影响. 每轮比赛共有 A, B 两组题,每组都随机抽取两道题作答,先进行 A 组答题,只有 A 组的两道题均答对,方可进行 B 组答题,否则本轮答题结束. 已知甲同学 A 组每道题答对的概率均为 $\frac{3}{4}$, B 组每道题答对的概率均为 $\frac{1}{3}$, A, B 两组题至少答对 3 道题才可获得一张奖券.
- (1) 设甲同学在一轮比赛中答对的题目数量为 X ,求 X 的分布列与数学期望 $E(X)$;
- (2) 若甲同学进行了 10 轮答题,试问甲同学获得多少张奖券的概率最大? 并说明理由.

13. (2025·北京·三模) 投壶是中国古代传统礼仪游戏,起源于春秋战国时期,盛行于汉唐.参与者将无镞箭矢投向特定壶具,以入壶数量和姿态评判胜负,兼具竞技与礼仪功能.

为发扬传统文化,某校利用午休时间举办投壶比赛老师预设口径不同的三个壶,学生可以根据自身情况,选择不同壶进行挑战.为方便统计,投壶时,仅统计“投中”与“未投中”两种结果.

活动中,高三年级 500 名学生体验了投壶,每位学生都只选择一个壶进行挑战.现将投壶结果统计如下表.

	壶 1		壶 2		壶 3	
	投中	未投中	投中	未投中	投中	未投中
高三年级	40	160	90	60	60	90

假设用频率估计概率

- (1) 若从所有选择投壶 2 的学生中,随机选择一位学生,求这位学生在活动中投中壶 2 的概率.
- (2) 投壶活动结束后,高三学生自发组织“过关比赛”比赛中,学生手拿三支箭,从壶 1 开始,按照壶 1、壶 2、壶 3 的次序,进行投壶挑战.每次投壶时,学生投一支箭,若投中,学生按照顺序投下一个投壶;若未投中,学生需要继续投该壶,直到投中或箭矢耗尽当学生投完三支箭,挑战结束.
某位高三学生即将参赛,假设用高三年级学生投中各壶的频率估计这位学生投中各壶的概率,求这位学生在“过关比赛”中仅投中一次的概率.
- (3) 为锻炼投壶技巧,某高三同学投壶 2,一共投 20 次.假设每次投壶的结果互不影响,用高三年级学生投中壶 2 的频率估计这位学生投中壶 2 的概率,那么在投完 20 次之后,这位同学投中壶 2 多少次的概率最大?(只需写出结论).

题型4 概率与函数、导数求最值

解|题|策|略

根据题意,将所求概率表示为关于变量 x 的函数 $P(x)$ 。注意定义域(结合实际问题或概率意义),然后用函数、导数求最值的方法来求概率的最值与范围。

14. (25-26 高三上·重庆沙坪坝·月考) 已知袋中有 m_1 个白球, m_2 个红球, m_3 个黑球, 其中 $m_1, m_2, m_3 \in N^*$, 这些球除颜色外没有其他差异. 现每次从袋中不放回的随机取一个球, 直到所有小球全部取完.
- (1) 若 $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 2$, 求在最后一次取出黑球的条件下, 白球最先被全部取出的概率;
- (2) 记白球最先被全部取出的概率为 $P(m_1, m_2, m_3)$.
- (i) 求 $P(m_1, m_2, m_3)$ (结果用 m_1, m_2, m_3 表示);
- (ii) 已知 $k \in N^*$, 证明: $\sum_{k=1}^n P(10, 10, 10k) > \frac{7}{8} \ln n + \frac{1}{10}$. (参考数据: $\ln 2 \approx 0.693, \ln 3 \approx 1.099$)

15. (2025·云南昆明·模拟预测) 某地区为选拔运动员举行了一次运动会(采用积分制), 运动员通过参加各项比赛获得积分. 现有甲、乙两名运动员争夺某项比赛的积分, 规定两名运动员谁先赢 $k(k>1, k \in N^*)$ 局, 谁就能获得该项比赛的全部积分, 根据以往经验, 每局比赛甲赢的概率为 p , 乙赢的概率为 $1-p$, 每局比赛相互独立.

(1) 若 $k=2, p=\frac{2}{3}$, 在乙先赢了第一局的条件下, 求甲最终赢得全部积分的概率;

(2) 在甲赢了 m 局, 乙赢了 n 局时, 比赛意外终止. 对于积分应该如何分配, 评委给出的方案是: 根据以往经验数据, 甲、乙按照若比赛继续进行下去各自赢得全部积分的概率之比 $P_{\text{甲}}:P_{\text{乙}}$ 分配积分.

(i) 若 $k=3, m=2, n=1, p=\frac{3}{5}$, 求 $P_{\text{甲}}:P_{\text{乙}}$;

(ii) 若 $k=4, m=2, n=2$, 求比赛继续进行下去甲赢得全部积分的概率 $f(p)$, 并判断当 $p \in [\frac{7}{8}, 1)$ 时, 若比赛继续进行下去乙赢得全部积分的概率是否小于 5%.

16. (2026·辽宁沈阳·一模) 已知随机变量 ξ 的取值为非负整数, 其分布列为:

ξ	0	1	2	\cdots	n
P	p_0	p_1	p_2	\cdots	p_n

其中 $p_i \in [0, 1]$, 且 $\sum_{i=0}^n p_i = 1$. 由 ξ 生成的函数为 $f(x) = \sum_{i=0}^n p_i x^i$, $D(\xi) = \sum_{i=0}^n (i - E(\xi))^2 \cdot p_i$.

(1) 若 ξ 生成的函数为 $f(x) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}x^3 + \frac{3}{10}x^5$, 设事件 A : 当 ξ 为奇数时, 求 $P(A)$ 的值;

(2) 现有编号为一和二的两个盒子, 在盒一中有 1 个红球, 在盒二中有 2 个蓝球和 4 个绿球 (球的颜色不同, 其他完全相同). 若随机选两个盒中的一个盒, 再取出一个球, 选择盒一的概率为 $\frac{1}{7}$, 设随机变量 ξ 生

成的函数为 $f(x) = \sum_{i=0}^3 p_i x^i$, 其中 $p_i (i=1, 2, 3)$ 分别对应取到红球、蓝球、绿球的概率.

请判断 $D(\xi)$ 与 $f''(1) + f'(1) - [f'(1)]^2$ 的大小关系; ($f''(x) = [f'(x)]'$)

(3) 从方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ 的自然数中等可能地随机选取一组解, 用 ξ 表示一组解中最小的数, 此时由 ξ 生成的函数记为 $t(x)$, 令 $g(x) = t'(x)$, 求 $g(x)$ 的极小值点.

题型5 概率与决策性问题

解|题|策|略

根据不同的决策计算概率(有时候是期望值),判断概率大小(可以通过作差或作商)来进行选择。
若概率含参的话,可以通过作差后,然后根据参数来讨论差值是否大于0,等于0,小于0。

17. (2025·北京·模拟预测) 在一大型仓库里,存有大量的原料台球,其大小均匀,按红色与白色分为两堆,每种颜色中又有塑料和木头两种材质,对球进行简单随机抽样,获得抽样数据如表:

红色		白色	
塑料球	木质球	塑料球	木质球
68 个	136 个	153 个	51 个

- (1) 估计从仓库所有红色球中随机抽取 1 个得到塑料球的概率;
- (2) 从仓库所有红色球中依次随机抽取 2 个,从仓库所有白色球中依次随机抽取 2 个,估计这 4 个球中塑料球的个数等于木质球的个数的概率.
- (3) 若仓库中红色球的个数比白色球的个数少,从仓库中随机抽取 1 个球,该球为塑料球的概率为 P_1 ,该球为木质球的概率为 P_2 ,比较 P_1 与 P_2 的大小关系 (结论不要求证明)

18. (2025·山东·二模) 甲乙二人进行比赛, 已知在每局比赛中, 甲获胜的概率为 p , 乙获胜的概率为 $1 - p$, 各局比赛的结果相互独立. 为决出最终获胜的一方, 有以下两种方案可供选择:

方案一: 规定每局比赛的胜方得 1 分, 败方得 0 分, 则首次比对手高两分的一方获胜.

方案二: 首次连胜两局比赛的一方获胜.

(1) 若 $p = 0.75$, 且采用方案一, 求第四场比赛结束时恰好分出胜负的概率.

(2) 若 $0 < p < 0.5$, 为使甲获胜的概率更大, 则应该选择哪种比赛方案? 请说明理由.

附: 当 $0 < q < 1$ 时, $1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1 - q}$.

19. (2025·江西·模拟预测) 甲和乙两人进行足球射门比赛,规定先赢满三局的人获胜,且不存在平局. 已知每局比赛中,甲赢的概率为 p ,其中 $0 < p < 1$.

(1) 若 $p = \frac{1}{2}$,分别计算比赛结束时甲赢的局数为2的概率及局数为3的概率;

(2) 记 P_1 为在甲和乙进行了4局比赛分出胜负的条件下甲获胜的概率, P_2 为在甲和乙进行了5局比赛分出胜负的条件下甲获胜的概率,若 $P_1 > P_2$,求 p 的取值范围.

20. (25-26 高二上 ◆ 广西桂林 ◆ 期末) 学校举行数学知识竞赛, 每班派出一个由两名同学组成的参赛队参加比赛, 比赛分为初赛和决赛, 规则如下: 初赛由参赛队中一名同学答题 3 次, 若 3 次都未答对, 则该队被淘汰, 比赛成绩为 0 分; 若至少答对一次, 则该队进入决赛. 决赛由该队的另一名同学答题 3 次, 每次答对得 3 分, 未答对得 0 分, 该队的比赛成绩为决赛的得分总和.

某班参赛队由甲、乙两名同学组成, 设甲每次答题答对的概率为 p , 乙每次答题答对的概率为 q , 且每次答题相互独立.

(1) 若 $p = \frac{3}{5}$, 甲同学参加初赛, 求该班进入决赛的概率;

(2) 若 $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{2}$, 乙同学参加初赛, 记该班的比赛成绩为 X , 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;

(3) 设 $p + q = 1$, $p \neq q$, 为使得该班的比赛成绩为 9 分的概率最大, 应如何安排甲、乙出场比赛的顺序?

热点限时训练

(建议用时: 30 分钟)

21. (2025·山东日照·二模) 设 $n \in N$, 数对 (X_n, Y_n) 按照如下方式生成: ①规定 $(X_0, Y_0) = (1, 1)$; ②抛掷一枚质地均匀的硬币, 当硬币正面朝上时, $X_{n+1} = X_n + 1$, $Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n + 1, & X_n > Y_n \\ Y_n, & X_n \leq Y_n \end{cases}$; 当硬币反面朝上时, $Y_{n+1} = Y_n$

$$+ 1, X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1, & Y_n > X_n \\ X_n, & Y_n \leq X_n \end{cases}$$

(1) 写出数对 (X_2, Y_2) 的所有可能结果;

(2) 当 $n \geq 1$ 时, 记 $X_n = Y_n$ 的概率为 P_n .

(i) 求 P_n 及 P_n 的最大值;

(ii) 设 X_n 的数学期望为 E_n , 求 E_n .

22. (2025·河北张家口·二模) 乒乓球比赛规则规定:在双方打成 10 平后,领先两分者获胜.在某校组织的乒乓球比赛中,甲、乙两名同学已经打成了 10 平. 已知下一球乙同学得分的概率为 $\frac{1}{3}$, 且对以后的每一球,若乙同学在本球中得分,则他在下一球的得分概率为 $\frac{2}{3}$, 若乙同学在本球中未得分,则他在下一球的得分概率为 $\frac{1}{3}$.

(1) 求在继续打了两个球后比赛结束的条件下,乙同学获胜的概率;

(2) 求乙同学最终获胜的概率.

23. (2025·广东广州·一模) $n(n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3)$ 个人相互传球, 传球规则如下: 若球由甲手中传出, 则甲传给乙; 否则, 传球者等可能地将球传给另外的 $n-1$ 个人中的任何一个. 第一次传球由甲手中传出, 第 $k(k \in \mathbb{N}^*)$ 次传球后, 球在甲手中的概率记为 $A_n(k)$, 球在乙手中的概率记为 $B_n(k)$.

(1) 求 $A_5(2), B_5(2), A_5(3), B_5(3)$;

(2) 求 $A_n(k)$;

(3) 比较 $B_n(k+1)$ 与 $\frac{n-2}{n-1}A_n(k)$ 的大小, 并说明理由.

24. (2025·河北石家庄·一模) 在一个温馨的周末,甲同学一家人齐聚在宽敞明亮的客厅里进行掷游戏币活动,假设每次掷游戏币出现正面的概率为 p ,且 $p \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$,每次掷游戏币的结果相互独立.

(1) 当 $p = \frac{1}{2}$ 时,若甲连续投掷了两次,求至少出现一次正面向上的概率;

(2) 若规定每轮游戏只要连续不断的出现三次正面向上,则游戏结束,每轮最多连续投掷6次.

①甲在一轮游戏中恰好投掷了5次游戏结束的概率为 $f(p)$,求 $f(p)$ 的表达式;

②设甲在一轮游戏中投掷次数为 X ,求 $E(X)$ 的最大值.

25. (2025·江苏·模拟预测) A, B 两人手中各有 3 张《哪吒 2》纪念卡片, 其中 A 手中的 3 张卡片为 1 张红色和 2 张蓝色, B 手中的 3 张卡片都是红色的, 现在两人各从自己的卡片中随机取 1 张, 去与对方交换, 重复 n 次操作, 记 A 手中蓝色卡片 x_n 张, 恰有 2 张蓝色卡片的概率为 p_n , 恰有 1 张蓝色卡片的概率为 q_n .
- (1) 分析操作几次后 A 手中蓝色卡片就可能首次出现 0 张, 并求首次出现这种情况的概率 p .
- (2) 记 $a_n = 2p_n + q_n$. 证明: 数列 $\{a_n - 1\}$ 为等比数列.

26. (2025·湖北·模拟预测) 某学校数学小组建立了如下的数学模型:将一个小盒里放入6个小球,其中4个黑球,2个红球.模型一为:若取出黑球,则放回小盒中,不作任何改变;若取出红球,则放回小盒并再往小盒里加入2个红球;模型二为:若取出黑球,则放回小盒中,不作任何改变;若取出红球,则用黑球替换该红球重新放回小盒中.

(1) 分别计算在两种模型下,抽两次球,第二次取到的球是红球的概率;

(2) 在模型二的前提下:

① 求在第 $n(n \geq 2)$ 次抽球时,抽到的球恰好是第二个红球的概率(结果用 n 表示).

② 现规定当两个红球都被抽出来时停止抽球,且最多抽球10次,第10次抽球结束后无论盒中是否还有红球均停止抽球,记抽球的次数为 X ,求 X 的数学期望.

27. (2025·上海黄浦·二模) 一盒子中有大小与质地均相同的 20 个小球, 其中白球 $n(3 \leq n \leq 13)$ 个, 其余为黑球.

(1) 当盒中的白球数 $n = 6$ 时, 从盒中不放回地随机取两次, 每次取一个球, 用 A 表示事件“第一次取到白球”, 用 B 表示事件“第二次取到白球”, 求 $P(B|A)$ 和 $P(B)$, 并判断事件 A 与 B 是否相互独立;

(2) 某同学要策划一个抽奖活动, 参与者从盒中一次性随机取 10 个球, 若其中恰有 3 个白球, 则获奖, 否则不获奖, 要使参与者获奖的可能性最大、最小, 该同学应该分别如何放置白球的数量 n ?

28. (2026 ◆河北◆模拟预测) 篮球是以手为中心的身体对抗性体育运动, 篮球控球能力对球员的场上表现有直接影响. 某教练 A 指导三名学员 B, C, D 进行篮球控球训练, 训练开始时篮球在教练 A 手里, 由教练 A 进行控球示范, 1 分钟后等可能地传给学员 B, C, D 其中一人, 学员控球训练 1 分钟后, 将球传出, 传给教练 A 的概率为 $\frac{1}{4}$, 传给另外两名学员的概率均为 $\frac{3}{8}$, 篮球在四人之间传递.

(1) 若四人进行了 3 次传球, 求教练 A 控球 2 次的概率.

(2) 设 x_n, t_n 分别表示第 n 次传球后由 A, B 控球的概率.

(i) 求 x_n 的表达式及其最大值;

(ii) 若数列 $\left\{ n \cdot \left| 1 - \frac{15t_n}{4} \right| \right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

29. (25-26 高三上 ◆ 湖南长沙 ◆ 月考) 甲、乙两人共进行 $2n-1$ ($n \in N^*$ 且 $n \geq 2$) 局比赛, 假设每局比赛甲赢的概率都是 p ($0 < p < 1$), 各局比赛之间的结果互不影响, 且没有平局.

(1) 设 $p = \frac{1}{2}$, 若全部 $2n-1$ 局比完后, 所赢局数多者获胜. 甲获胜的概率记为 p_n ,

(i) 求 p_2 ;

(ii) 试比较 p_n 与 $\frac{1}{2}$ 的大小, 并证明你的结论.

(2) 设 $0 < p < \frac{1}{2}$, “ $2n-1$ ($n \in N^*$ 且 $n \geq 2$) 局比赛结束后, 甲赢得奇数局比赛”的概率记为 q_n , 证明: q_{n+2}

$- q_{n+1} < q_{n+1} - q_n$.

30. (2026 ◆广东湛江◆一模) 某农作物的种植过程分为育苗与移栽两个环节. 在育苗环节, 每粒种子的成活率为 p . 在育苗成功的条件下, 对幼苗进行移栽, 每株幼苗移栽的成活率为 q . 若该农作物育苗成功且移栽成活则认为种植成功. 每粒种子种植是否成功互不影响.

(1) 若一粒种子种植成功的概率为 $\frac{1}{2}$, 在育苗成功的条件下, 移栽失败的概率为 $\frac{1}{4}$, 现播撒 300 粒种子,

设育苗成功的种子数量为 ζ , 求 $E(\zeta)$;

(2) 播撒 6 粒种子, 设种植成功的数量为 X , 求 $X=5$ 的概率 P , 并求 P 的最大值.