

圆锥曲线解答题题型全归纳

目录

知识重构·重难梳理固根基	2
题型精研·技巧通法提能力	5
题型一 中点弦、弦长问题	5
题型二 面积问题	11
题型三 定点及其探索性问题	17
题型四 斜率有关定值问题	26
题型五 长度、角度、面积的定值问题	32
题型六 非对称韦达化处理	40
题型七 圆锥曲线与向量交汇	44
题型八 切线问题	50
题型九 定直线及其探索性问题	56
题型十 圆锥曲线新定义问题	62
实战检测·分层突破验成效	69
检测I组 重难知识巩固	69
检测II组 创新能力提升	92

知识重构·重难点梳理固根基

一、直线和曲线联立(以椭圆和抛物线为例)

1. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $l: y = kx + m$ 相交于 AB 两点, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}, (b^2 + k^2 a^2)x^2 + 2a^2 kmx + a^2 m^2 - a^2 b^2 = 0$$

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与过定点 $(m, 0)$ 的直线 l 相交于 AB 两点, 设为 $x = ty + m$, 如此消去

x , 保留 y , 构造的方程如下: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = ty + m \end{cases}, (a^2 + t^2 b^2)y^2 + 2b^2 tmy + b^2 m^2 - a^2 b^2 = 0$

注意:

①如果直线没有过椭圆内部一定点, 是不能直接说明直线与椭圆有两个交点的, 一般都需要摆出 $\Delta > 0$, 满足此条件, 才可以得到韦达定理的关系.

②焦点在 y 轴上的椭圆与直线的关系, 双曲线与直线的关系和上述形式类似, 不在赘述.

2. 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 与直线 $x = ty + m$ 相交于 A, B 两点, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

联立可得 $y^2 = 2p(ty + m)$, $\Delta > 0$ 时, $\begin{cases} y_1 + y_2 = 2pt \\ y_1 y_2 = -2pm \end{cases}$

特殊地, 当直线 AB 过焦点的时候, 即 $m = \frac{p}{2}$, $y_1 y_2 = -2pm = -p^2$, $x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = \frac{1}{4} p^2$, 因为 AB 为

通径的时候也满足该式, 根据此时 A, B 坐标来记忆.

抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 与直线 $y = kx + m$ 相交于 C, D 两点, 设 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$

联立可得 $x^2 = 2p(kx + m)$, $\Delta > 0$ 时, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2pk \\ x_1 x_2 = -2pm \end{cases}$

注意: 在直线与抛物线的问题中, 设直线的时候选择形式多思考分析, 往往可以降低计算量. 开口向上选择正设; 开口向右, 选择反设; 注意不可完全生搬硬套, 具体情况具体分析.

二、根的判别式和韦达定理

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与 $y = kx + m$ 联立, 两边同时乘上 $a^2 b^2$ 即可得到 $(a^2 k^2 + b^2)x^2 + 2kma^2 x + a^2(m^2 - b^2) = 0$, 为了方便叙述, 将上式简记为 $Ax^2 + Bx + C = 0$. 该式可以看成关于 x 的一元二次方程, 判别式为 $\Delta = 4a^2 b^2 (a^2 k^2 + b^2 - m^2)$ 可简单记 $4a^2 b^2 (A - m^2)$.

同理 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 和 $x = ty + m$ 联立 $(a^2 + t^2 b^2)y^2 + 2b^2 tmy + b^2 m^2 - a^2 b^2 = 0$, 为了方便叙述, 将上式简记为 $Ay^2 + By + C = 0$, $\Delta = 4a^2 b^2 (a^2 + t^2 b^2 - m^2)$, 可简记 $4a^2 b^2 (A - m^2)$.

l 与 C 相离 $\Leftrightarrow \Delta < 0$; l 与 C 相切 $\Leftrightarrow \Delta = 0$; l 与 C 相交 $\Leftrightarrow \Delta > 0$.

注意: (1) 由韦达定理写出 $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$, $x_1 x_2 = \frac{C}{A}$, 注意隐含条件 $\Delta > 0$.

(2) 求解时要注意题干所有的隐含条件, 要符合所有的题意.

(3) 如果是焦点在 y 轴上的椭圆, 只需要把 a^2, b^2 互换位置即可.

(4) 直线和双曲线联立结果类似, 焦点在 x 轴的双曲线, 只要把 b^2 换成 $-b^2$ 即可;

焦点在 y 轴的双曲线, 把 a^2 换成 $-b^2$ 即可, b^2 换成 a^2 即可.

(5) 注意二次曲线方程和二次曲线方程往往不能通过联立消元, 利用 Δ 判断根的关系, 因为此情况下往往会有增根, 根据题干的隐含条件可以舍去增根 (一般为交点横纵坐标的范围限制), 所以在遇到两条二次曲线交点问题的时候, 使用画图的方式分析, 或者解方程组, 真正算出具体坐标.

三、点差法

设直线和曲线的两个交点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 代入椭圆方程, 得 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1;$

将两式相减, 可得 $\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0; \quad \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} = -\frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2};$

最后整理得: $1 = -\frac{a^2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)} \Rightarrow 1 = -k \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_0}{x_0}$

同理, 双曲线用点差法, 式子可以整理成: $1 = \frac{a^2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)} \Rightarrow 1 = k \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_0}{x_0}$

设直线和曲线的两个交点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 代入抛物线方程, 得 $y_1^2 = 2px_1; y_2^2 = 2px_2;$

将两式相减, 可得 $(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2p(x_1 - x_2);$ 整理得: $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p}{y_1 + y_2}$

四、弦长公式

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

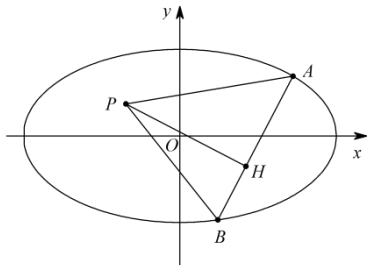
$$|AB| = \sqrt{(1 + k^2)(x_1 - x_2)^2}$$

$$= \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2|$$

$$= \sqrt{(1 + k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} \quad (\text{最常用公式, 使用频率最高})$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2}$$

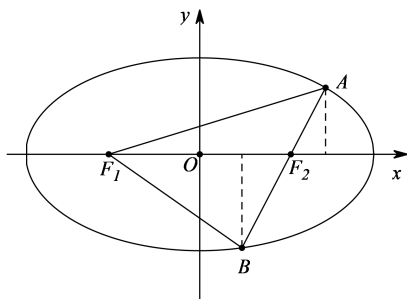
五、三角形面积问题



$$\text{直线 } AB \text{ 方程: } y = kx + m \quad d = |PH| = \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1 + k^2}}$$

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta}}{|A'|} \cdot \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\sqrt{\Delta} |kx_0 - y_0 + m|}{2|A'|}$$

六、焦点三角形的面积



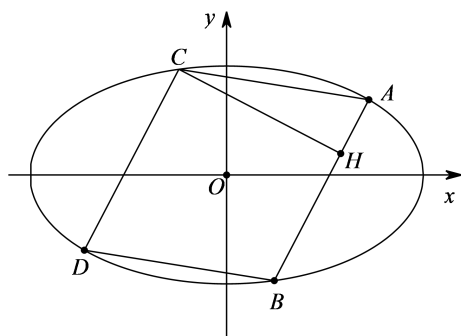
直线 AB 过焦点 F_2 , $\triangle ABF_1$ 的面积为

$$S_{\triangle ABF_1} = \frac{1}{2} |F_1F_2| \cdot |y_1 - y_2| = c|y_1 - y_2| = \frac{c\sqrt{\Delta}}{|A'|}$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |AB|d = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2} \frac{\sqrt{4a^2b^2(a^2A^2 + b^2B^2 - C^2)}}{a^2A^2 + b^2B^2} \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{ab\sqrt{(a^2A^2 + b^2B^2 - C^2)C^2}}{a^2A^2 + b^2B^2}$$

注意: A' 为联立消去 x 后关于 y 的一元二次方程的二次项系数

七、平行四边形的面积



直线 AB 为 $y = kx + m_1$, 直线 CD 为 $y = kx + m_2$

$$d = |CH| = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1 + k^2}}$$

$$|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{\left(-\frac{B'}{A'}\right)^2 - 4 \cdot \frac{C'}{A'}} = \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta}}{|A'|}$$

$$S_{\square ABCD} = |AB| \cdot d = \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta}}{|A'|} \cdot \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\sqrt{\Delta} |m_1 - m_2|}{|A'|}$$

注意: A' 为直线与椭圆联立后消去 y 后的一元二次方程的系数.

八、探索圆锥曲线的定点、定值问题

1. 定值问题

①从特殊入手, 先根据特殊位置和数值求出定值, 再证明这个值与变量无关;

②直接推理、计算, 并在计算推理的过程中消去变量, 从而得到定值.

解答的关键是认真审题, 理清问题与题设的关系, 建立合理的方程或函数, 利用等量关系统一变量, 最后消元得出定值.

2. 定点问题

定点问题是比较常见出题形式,化解这类问题的关键就是引进变的参数表示直线方程、数量积、比例关系等,根据等式的恒成立、数式变换等寻找不受参数影响的量.

①引进参数.一般是点的坐标、直线的斜率、直线的夹角等.

②列出关系式.根据题设条件,表示出对应的动态直线或曲线方程.

③探究直线过定点.一般化成点斜式 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 或者直线系方程 $f(x, y) + \lambda g(x, y) = 0$

题型精研·技巧通法提能力

题型一 中点弦、弦长问题

【技巧通法·提分快招】

1. 点差法在圆锥曲线中的结论

$$(1) \text{椭圆: } k_{AB} \cdot \frac{y_0}{x_0} = k_{AB} \cdot k_{OM} = \begin{cases} -\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 \Leftrightarrow \text{焦点在 } x \text{ 轴} \\ -\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{e^2 - 1} \Leftrightarrow \text{焦点在 } y \text{ 轴} \end{cases}$$

$$(2) \text{双曲线: } k_{AB} \cdot \frac{y_0}{x_0} = k_{AB} \cdot k_{OM} = \begin{cases} \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 \Leftrightarrow \text{焦点在 } x \text{ 轴} \\ \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{e^2 - 1} \Leftrightarrow \text{焦点在 } y \text{ 轴} \end{cases}$$

$$(3) \text{抛物线: } \begin{cases} k_{AB} = \frac{p}{y_0} \Leftrightarrow \text{开口向右} \\ k_{AB} = -\frac{p}{y_0} \Leftrightarrow \text{开口向左} \\ k_{AB} = \frac{x_0}{x} \Leftrightarrow \text{开口向上} \\ k_{AB} = -\frac{x_0}{p} \Leftrightarrow \text{开口向下} \end{cases}$$

2. 弦长有关的问题

$$(1) \text{弦长公式: } |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

(2) 与焦点相关的弦长计算,利用定义;

(3) 涉及到面积的计算问题.

1. (2025·海南·模拟预测) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 且该椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 l 不过原点

O 且不平行于坐标轴, l 与椭圆 C 交于 A 、 B 两点, 线段 AB 的中点为 M .

(1) 证明: 直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值;

(2) 若直线 l 的方程为 $2x - 2y + 3\sqrt{3} = 0$, 延长线段 OM 与椭圆 C 交于点 P , 四边形 $OAPB$ 为平行四边形, 求椭圆 C 的方程.

【答案】(1) 证明见解析

$$(2) \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$$

【分析】(1) 根据给定条件利用“点差法”结合斜率的坐标公式计算求解；

(2) 联立直线 l 与椭圆方程，结合 (1) 及已知条件求出点 P 坐标，即可求得椭圆方程。

【详解】(1) 依题意，因为 $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$ ，所以 $a^2 = 2b^2$ ，

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_M, y_M)$ ，则 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ ，

两式相减可得 $b^2(x_1^2 - x_2^2) + a^2(y_1^2 - y_2^2) = 0$ ，得 $\frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{2}$ ，即 $\frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)} = -\frac{1}{2}$ ，

因为 M 为线段 AB 的中点，则 $x_1 + x_2 = 2x_M, y_1 + y_2 = 2y_M$ ，

直线 OM 的斜率 $k_{OM} = \frac{y_M}{x_M}$ ，直线 l 的斜率 $k_l = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ，

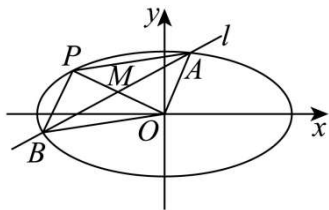
于是得 $k_l \cdot k_{OM} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{2y_M}{2x_M} = \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)} = -\frac{1}{2}$ 是定值，

所以直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值。

(2) 设点 P 的坐标为 $P(x_p, y_p)$ ，

由 $\begin{cases} x = y - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ x^2 + 2y^2 = 2b^2 \end{cases}$ ，消去 x 并整理得： $3y^2 - 3\sqrt{3}y + \frac{27}{4} - 2b^2 = 0$ ，

则 $y_1 + y_2 = \sqrt{3}, x_1 + x_2 = (y_1 + y_2) - 3\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$ ，



又四边形 $OAPB$ 为平行四边形，即线段 AB 与线段 OP 互相平分，

则 $\begin{cases} x_P = 2x_M = x_1 + x_2 = -2\sqrt{3} \\ y_P = 2y_M = y_1 + y_2 = \sqrt{3} \end{cases}$ 即点 $P(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ，

而点 P 在椭圆 C 上，于是得 $\frac{12}{2b^2} + \frac{3}{b^2} = 1$ ，解得 $b^2 = 9, a^2 = 2b^2 = 18$ ，

所以椭圆 C 的方程为： $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ 。

2. (25-26 高三上·陕西汉中·开学考试) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为 2，离心率为 $\sqrt{3}$ 。直线 $l: y = kx + m$ 与双曲线 C 相交于 A, B 两点。

(1) 求双曲线 C 的方程；

(2) 若 AB 的中点为 $M(2, 1)$ ，求直线 l 的方程。

【答案】(1) $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ ；

(2) $y = 4x - 7$ 。

【分析】(1) 根据条件，结合双曲线的性质列方程组，联立求解，即可得双曲线 C 的方程；

(2) 联立直线方程与双曲线方程，利用韦达定理结合中点坐标公式，即可求解。

【详解】(1) 根据题意，双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为 2，离心率为 $\sqrt{3}$ ，则

$$\begin{cases} 2a=2 \\ \frac{c}{a}=\sqrt{3} \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=1 \\ c=\sqrt{3} \\ b=\sqrt{2} \end{cases},$$

所以双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 由 (1) 知, 双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}, \text{化简得 } (k^2 - 2)x^2 + 2kmx + (m^2 + 2) = 0,$$

则 $\Delta = 4k^2m^2 - 4(k^2 - 2)(m^2 + 2) = 8(m^2 + 2 - k^2) > 0$, 且 $k \neq \pm\sqrt{2}$, $x_1 + x_2 = \frac{-2km}{k^2 - 2}$,

由 $M(2, 1)$ 为 AB 的中点, 得 $\begin{cases} \frac{-2km}{k^2 - 2} = 4 \\ 2k + m = 1 \end{cases}$, 解得 $k = 4, m = -7$, 且满足 $\Delta > 0$,

所以直线 l 的方程为 $y = 4x - 7$.

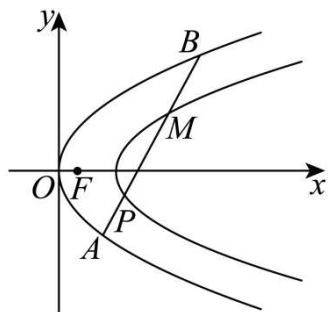
3. 过点 $P(x_0, y_0)$ 的直线交抛物线 $y^2 = 2px$ 于 A, B 两点, 求 AB 中点 M 的轨迹方程.

【答案】 $y(y - y_0) = p(x - x_0)$

【分析】 若直线 AB 斜率存在, 将由中点公式及点差法所得关系式代入 P, A, M, B 四点共线建立的关系式中化简可得; 若直线 AB 斜率不存在, 求出点 M 的坐标, 验证其是否满足上面方程.

【详解】 如图 38, 若直线 AB 斜率存在, 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, AB 中点 $M(x, y)$, 则 $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, ①

又 $y_1^2 = 2px_1, y_2^2 = 2px_2$,



两式相减, 得 $(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2p(x_1 - x_2)$, ②

当 AB 的斜率存在是, 因为 P, A, M, B 四点共线, 所以 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$, ③

把①③代入②, 可得 $y(y - y_0) = p(x - x_0)$

即 AB 中点 M 的轨迹方程为 $y(y - y_0) = p(x - x_0)$

若直线 AB 斜率不存在, 不妨设点 B 在 x 轴上方, 则 $A(x_0, -\sqrt{2px_0}), B(x_0, \sqrt{2px_0})$,

此时 $M(x_0, 0)$, 也满足方程 $y(y - y_0) = p(x - x_0)$,

综上, AB 中点 M 的轨迹方程为 $y(y - y_0) = p(x - x_0)$.

4. (2025·黑龙江大庆·一模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点

$P(0, \frac{2\sqrt{5}b}{5})$ 作斜率为 k 的直线 l 交 C 于 M, N 两点. 当 $k = 0$ 时, $MF_2 \perp x$ 轴, 且 $|MF_1| = \frac{6\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 $|MN| = 3|PM| \cdot |PN|$, 求直线 l 的方程.

【答案】(1) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}x + \frac{4\sqrt{5}}{5}$

【分析】(1) 根据 $MF_2 \perp x$ 轴, 直线的斜率 $k=0$ 可得 $M\left(\frac{\sqrt{5}a}{5}, \frac{2\sqrt{5}b}{5}\right)$, 可分析出 $a = \sqrt{5}c$, 然后结合椭圆的定义列方程求解;

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 联立直线方程和椭圆方程, 利用弦长公式和韦达定理求解.

【详解】(1) 令 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}b\right)^2}{b^2} = 1$, 解得 $x = \pm \frac{\sqrt{5}a}{5}$, 由题意, $M\left(\frac{\sqrt{5}a}{5}, \frac{2\sqrt{5}b}{5}\right)$,

又 $MF_2 \perp x$ 轴, 则 $\frac{\sqrt{5}a}{5} = c$, $a = \sqrt{5}c$, 故 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2c$,

由 $|MF_2| = \frac{4\sqrt{5}}{5}c$, 根据椭圆定义, $|MF_1| + |MF_2| = 2a = 2\sqrt{5}c = \frac{6\sqrt{5}}{5}c + \frac{4\sqrt{5}}{5}c$,

解得 $c = 1$, 则 $b = 2, a = \sqrt{5}$,

椭圆方程为 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 由 (1) 知点 P 的坐标为 $\left(0, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 l 的方程为 $y = kx + \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

由弦长公式, $|MN| = \sqrt{1+k^2}|x_1 - x_2|$, $|PM| = \sqrt{1+k^2}|x_1|$, $|PN| = \sqrt{1+k^2}|x_2|$

将 $l: y = kx + \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 与椭圆方程联立得 $(4+5k^2)x^2 + 8\sqrt{5}kx - 4 = 0$,

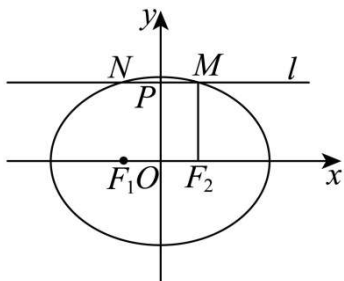
由韦达定理: $x_1 + x_2 = -\frac{8\sqrt{5}k}{5k^2+4}$, $x_1x_2 = -\frac{4}{5k^2+4}$,

故 $|PM| \cdot |PN| = \sqrt{1+k^2}|x_1 - 0| \cdot \sqrt{1+k^2}|x_2 - 0| = (1+k^2)|x_1x_2| = \frac{4(1+k^2)}{5k^2+4}$.

又 $|MN| = \sqrt{1+k^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{4\sqrt{25k^2+4} \times \sqrt{1+k^2}}{5k^2+4}$,

所以 $\frac{4\sqrt{25k^2+4} \times \sqrt{1+k^2}}{5k^2+4} = 3 \cdot \frac{4(1+k^2)}{5k^2+4}$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$.

所以直线 l 的方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}x + \frac{4\sqrt{5}}{5}$.



5. (2025·河北·模拟预测) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与双曲线 $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{2} = 1$ 的渐近线相同,

且经过点 $(2, 3)$, C 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 以 AB 为直径的圆与直线 $x = \frac{1}{2}$ 交

于 M, N 两点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 $|MN| = 3\sqrt{3}$, 求满足条件的直线 l 有几条?

【答案】(1) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 3

【分析】(1) 根据双曲线的渐近线可得 $b = \sqrt{3}a$, 点代入双曲线方程求出 a 即可得解;

(2) 分直线斜率存在, 不存在两种情况讨论, 求出以 AB 为直径的圆, 将 $x = \frac{1}{2}$ 代入圆的方程, 求出弦长 $|MN|$, 建立方程求解即可.

【详解】(1) 因为双曲线 $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{2} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$,

所以 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$, 即 $b = \sqrt{3}a$,

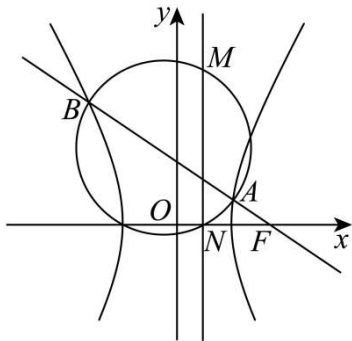
点 $(2, 3)$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$, 即 $\frac{4}{a^2} - \frac{9}{3a^2} = 1$, 解得 $a^2 = 1$,

所以 $b^2 = 3a^2 = 3$,

故双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由题意 $F(2, 0)$,

当直线 l 斜率存在时, 设直线 l 的方程为 $y = k(x - 2)$,



联立 $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x - 2) \end{cases}$, 可得 $(3 - k^2)x^2 + 4k^2x - (4k^2 + 3) = 0$ ($3 - k^2 \neq 0$)

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{k^2 - 3}, x_1x_2 = \frac{4k^2 + 3}{k^2 - 3}$,

所以 AB 中点即圆心坐标为 $\left(\frac{2k^2}{k^2 - 3}, k\left(\frac{2k^2}{k^2 - 3} - 2\right)\right)$, 即 $\left(\frac{2k^2}{k^2 - 3}, \frac{6k}{k^2 - 3}\right)$,

则 $|AB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{6(1 + k^2)}{|3 - k^2|}$, 圆的半径为 $r = \frac{3(1 + k^2)}{|3 - k^2|}$,

以 AB 为直径的圆的方程为 $\left(x - \frac{2k^2}{k^2 - 3}\right)^2 + \left(y - \frac{6k}{k^2 - 3}\right)^2 = \frac{9(1 + k^2)^2}{|3 - k^2|^2}$,

将 $x = \frac{1}{2}$ 代入圆的方程可得 $\left(y - \frac{6k}{k^2 - 3}\right)^2 = \frac{27(1 + k^2)^2}{4(k^2 - 3)^2}$,

解得 $y = \frac{12k \pm 3\sqrt{3}(1 + k^2)}{2(k^2 - 3)}$, 所以 $|MN| = |y_M - y_N| = \frac{3\sqrt{3}(1 + k^2)}{|k^2 - 3|}$,

又 $|MN| = 3\sqrt{3}$, 所以 $\frac{3\sqrt{3}(1+k^2)}{|k^2-3|} = 3\sqrt{3}$, 解得 $k^2 = 1$, 即 $k = \pm 1$,

即满足条件的直线有 2 条, 分别为 $y = x - 2, y = -x + 2$;

当直线 l 斜率不存在时, 由 $x = 2$ 代入双曲线方程可得 $A(2, 3), B(2, -3)$,

所以圆的方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 9$, 将 $x = \frac{1}{2}$ 代入圆的方程可得 $y = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

所以 $|MN| = 3\sqrt{3}$, 符合题意.

综上, 存在 3 条满足条件的直线, 分别为 $y = x - 2, y = -x + 2, x = 2$.

6. (2025·四川达州·模拟预测) 过抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点作平行于 x 轴的直线被抛物线 C 截得的弦长为 4, 已知点 $P(0, -2), Q(4, 2)$, 设过点 P 的直线 l 与抛物线 C 交于点 A, B , 且直线 QA 交抛物线 C 于点 M (点 M 与点 A 不重合).

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 设直线 MB 交以 PQ 为直径的圆于点 D, E , 求 $|DE|$ 的最小值.

【答案】(1) $x^2 = 4y$

(2) 4

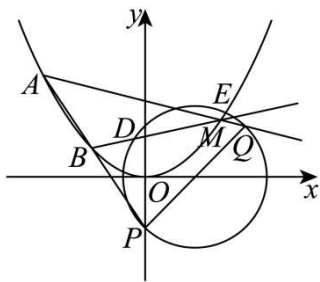
【分析】(1) 写出焦点坐标即可求出过焦点且平行于 x 轴的直线与抛物线交点的横坐标, 数形结合利用弦长列方程求解;

(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx - 2, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_3, y_3)$, 与抛物线方程联立, 结合根与系数的关系及斜率公式设出直线 QA 的方程并与抛物线联立, 利用韦达定理可得 $2(x_2 + x_3) = 8 + x_2x_3$, 写出直线 MB 的方程并利用点在抛物线上进行化简, 即可求出直线 MB 的定点 N , 数形结合知当且仅当 $O_1N \perp DE$ 时 (此时点 A, B 重合) $|DE|$ 最小, 代入相应数值结算即可.

【详解】(1) 由抛物线的性质可得, 抛物线的焦点为 $(0, \frac{p}{2})$, 将 $y = \frac{p}{2}$ 代入 $x^2 = 2py$, 解得 $x = \pm p$, 则 $2p = 4$,

所以抛物线 C 的方程为 $x^2 = 4y$.

(2) 由题意可设直线 l 的方程为 $y = kx - 2, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_3, y_3)$,



$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx - 2, \\ x^2 = 4y, \end{cases} \text{ 整理得 } x^2 - 4kx + 8 = 0, \text{ 则 } \begin{cases} 16k^2 - 32 > 0, \\ x_1 + x_2 = 4k, \\ x_1x_2 = 8. \end{cases}$$

由 $x_1 \neq 4$, 得直线 $QA: y - 2 = \frac{2 - y_1}{4 - x_1}(x - 4)$, 与抛物线 C 联立并整理得 $x^2 - \frac{8 - x_1^2}{4 - x_1}x + \frac{32 - 4x_1^2}{4 - x_1} - 8 = 0$,

$$\text{所以 } x_1 + x_3 = \frac{8 - x_1^2}{4 - x_1}, x_1x_3 = \frac{32 - 4x_1^2}{4 - x_1} - 8, \text{ 所以 } \frac{8}{x_2} + x_3 = \frac{8 - (\frac{8}{x_2})^2}{4 - \frac{8}{x_2}}, \frac{8x_3}{x_2} = \frac{32 - 4 \cdot \frac{64}{x_2^2}}{4 - \frac{8}{x_2}} - 8,$$

$$\text{所以 } \frac{2(x_2^2 - 8)}{x_2 - 2} = 8 + x_2x_3, x_2 + x_3 = \frac{x_2^2 - 8}{x_2 - 2}, \text{ 所以 } 2(x_2 + x_3) = 8 + x_2x_3.$$

直线 $MB: y - y_3 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}(x - x_3)$, 将 $y_2 = \frac{x_2^2}{4}$ 、 $y_3 = \frac{x_3^2}{4}$ 代入上式, 化简可得 $4y = (x_2 + x_3)x - x_2x_3$.

将 $2(x_2 + x_3) = 8 + x_2x_3$ 代入 $4y = (x_2 + x_3)x - x_2x_3$, 得 $4y = (x_2 + x_3)(x - 2) + 8$,

所以直线 MB 恒过定点 $N(2, 2)$.

以 PQ 为直径的圆的方程是 $(x - 2)^2 + y^2 = 8$, 该圆的圆心为 $O_1(2, 0)$, 当且仅当 $O_1N \perp DE$ 时 (此时点 A, B 重合) $|DE|$ 最小,

且 $|DE|_{\min} = 2\sqrt{|O_1D|^2 - |O_1N|^2} = 2\sqrt{8 - 2^2} = 4$,

所以 $|DE|$ 最小值为 4.

题型二 面积问题

【技巧通法·提分快招】

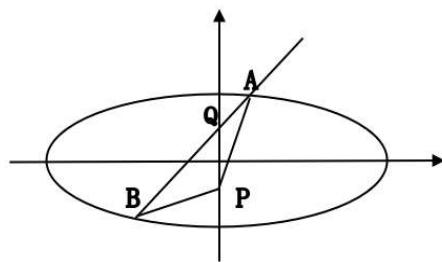
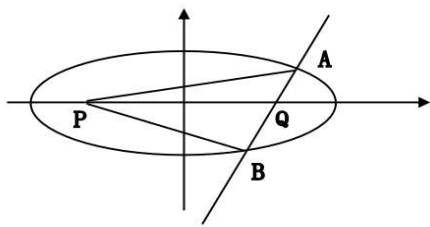
三角形的面积问题

直线与圆锥曲线相交, 弦和某个定点所构成的三角形的面积, 处理方法:

1、一般方法: $S = \frac{1}{2}|AB|d$ (其中 $|AB|$ 为弦长, d 为顶点到直线 AB 的距离), 设直线为斜截式 $y = kx + m$.

进一步, $S = \frac{1}{2}|AB|d = \frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\frac{|kx_0-y_0+m|}{\sqrt{1+k^2}}$

2、特殊方法: 拆分法, 可以将三角形沿着 x 轴或者 y 轴拆分成两个三角形, 不过在拆分的时候给定的顶点一般在 x 轴或者 y 轴上, 此时, 便于找到两个三角形的底边长.



$$S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PQA} + S_{\triangle PQB} = \frac{1}{2}|PQ||y_A - y_B| = \frac{1}{2}|PQ|\sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2}$$

$$S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PQA} + S_{\triangle PQB} = \frac{1}{2}|PQ||x_A - x_B| = \frac{1}{2}|PQ|\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

7. (25-26 高三上·陕西咸阳·月考) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 E 的方程;

(2) 过 E 的右焦点 F 的直线 l 交 E 于 A, B 两点, 若 $\triangle OAB$ (O 为坐标原点) 的面积为 $\frac{4\sqrt{3}}{5}$, 求 l 的方程.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$ 或 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$

【分析】(1) 根据题意, 利用椭圆 E 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 列出方程, 求得 a^2 的值, 即可求解;

(2) 设 l 的方程为 $x = my + 1$, 联立方程组, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 利用弦长公式和点到直线的距离公式,

求得 $|AB| = \frac{12(1+m^2)}{3m^2+4}$ 和 $d = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$, 结合 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{4\sqrt{3}}{5}$, 列出方程求得 m 的值, 即可求解.

【详解】(1) 由题意知, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$,

可得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-3}}{a} = \frac{1}{2}$, 解得 $a^2 = 4$,

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由 (1) 知, 椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 可得 $c = \sqrt{a^2-b^2} = 1$, 所以右焦点 $F(1, 0)$,

由题意知, 直线 l 的斜率不为零, 设 l 的方程为 $x = my + 1$,

联立方程组 $\begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 整理得到 $(3m^2+4)y^2 + 6my - 9 = 0$,

可得 $\Delta = (6m)^2 - 4(3m^2+4) \times (-9) > 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2+4}, y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2+4}$,

所以 $|AB| = \sqrt{1+m^2} \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{1+m^2} \sqrt{\frac{36m^2}{(3m^2+4)^2} + \frac{36}{3m^2+4}} = \frac{12(1+m^2)}{3m^2+4}$,

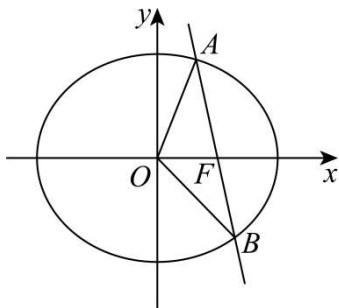
又由点 O 到 l 的距离 $d = \frac{|-1|}{\sqrt{1+(-m)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$,

所以 $\triangle OAB$ 的面积 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |AB| d = \frac{1}{2} \times \frac{12(1+m^2)}{3m^2+4} \times \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{6\sqrt{1+m^2}}{3m^2+4} = \frac{4\sqrt{3}}{5}$,

解得 $m^2 = \frac{1}{3}$ 或 $m^2 = -\frac{11}{12}$ (舍), 所以 $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 l 的方程为 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}y + 1$ 或 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}y + 1$,

即直线 l 的方程为 $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$ 或 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$.



8. (25-26 高三上·河北·开学考试) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 实轴长为 4.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若直线 $l: y = kx - 2 (k > 0)$ 与 C 的右支交于 A, B 两点, O 为坐标原点.

(i) 求 k 的取值范围;

(ii) 若直线 l 与 y 轴交于点 P , 且 $|PA| \cdot |PB| = \frac{40}{3}$, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$;

(2) (i) $\frac{1}{2} < k < \frac{\sqrt{5}}{2}$; (ii) $\frac{4}{3}$.

【分析】(1) 根据给定条件, 结合离心率的意义求出 a, b 即可.

(2) (i) 将直线与双曲线方程联立, 利用一元二次方程有二不等的正根列式求解; (ii) 利用数量积的定义及坐标表示求出 k , 进而求出三角形面积.

【详解】(1) 由双曲线 C 的实轴长为 4, 得 $a=2$,

由双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 得 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 得 $b=1$,

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

(2) (i) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y=kx-2 \\ x^2-4y^2=4 \end{cases}$ 消去 y 得 $(1-4k^2)x^2 + 16kx - 20 = 0$,

由 A, B 都在双曲线 C 的右支上, 得 $\begin{cases} 1-4k^2 \neq 0 \\ \Delta = 256k^2 - 80(4k^2-1) > 0 \\ x_1+x_2 = -\frac{16k}{1-4k^2} > 0 \\ x_1x_2 = -\frac{20}{1-4k^2} > 0 \end{cases}$, 解得 $\frac{1}{2} < k < \frac{\sqrt{5}}{2}$,

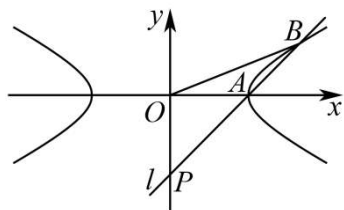
所以 k 的取值范围是 $\frac{1}{2} < k < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(ii) 依题意, $P(0, -2)$, $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = (x_1, y_1+2) \cdot (x_2, y_2+2) = |\vec{PA}| |\vec{PB}| = \frac{40}{3}$,

则 $x_1x_2 + (y_1+2)(y_2+2) = x_1x_2 + k^2x_1x_2 = (1+k^2)x_1x_2 = -\frac{20(1+k^2)}{1-4k^2} = \frac{40}{3}$, 解得 $k = \pm 1$,

而 $\frac{1}{2} < k < \frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 $k=1$, $\begin{cases} x_1+x_2 = \frac{16}{3} \\ x_1x_2 = \frac{20}{3} \end{cases}$,

所以 $\triangle OAB$ 的面积 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OP| |x_1 - x_2| = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{4}{3}$.



9. (2025·湖南·一模) 已知 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 直线 AM, BM 相交于点 M , 且 $k_{AM} \cdot k_{BM} = -\frac{3}{4}$, 点 M 的轨迹为曲线 E .

(1) 求曲线 E 的方程;

(2) 过点 $K(-1, 0)$ 的直线 l 交曲线 E 于 P, Q 两点, 直线 PO (O° 为坐标原点) 与曲线 E 的另一个交点为 G , 线段 PQ 的中点为 M , $\triangle GPM$ 的面积为 $\frac{6\sqrt{2}}{7}$, 求直线 l 的方程.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$

(2) $x \pm y + 1 = 0$

【分析】(1) 设 $M(x, y)$, 根据 $k_{AM} \cdot k_{BM} = -\frac{3}{4}$ 列出等式, 化简即可;

(2) 设直线 $l: x = my - 1$, 与曲线 E 的方程联立, 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 利用 $S_{\triangle GPM} = S_{\triangle OPQ}$, 由韦达定理结

合面积公式求出即可.

【详解】(1) 设 $M(x, y)$, 已知 $A(-2, 0), B(2, 0)$,

由 $k_{AM} \cdot k_{BM} = -\frac{3}{4}$, 得 $\frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = -\frac{3}{4} (x \neq \pm 2)$,

化简得: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$,

\therefore 曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$.

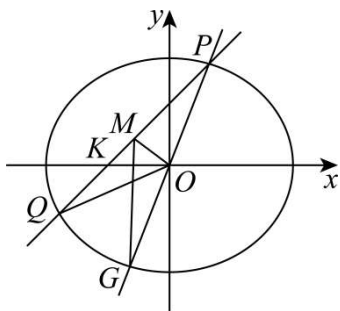
(2) 依题意, 过点 $K(-1, 0)$ 的直线 l 斜率不为 0, 设直线 $l: x = my - 1$,

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ x = my - 1, \end{cases}$ 得 $(3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0$,

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}$.

$\therefore M$ 为 PQ 的中点, O 为 PG 的中点,

$\therefore S_{\triangle GPM} = 2S_{\triangle OPM} = S_{\triangle OPQ}$,



$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} |OK| |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{6m}{3m^2 + 4}\right)^2 + \frac{36}{3m^2 + 4}} = 6 \sqrt{\frac{m^2 + 1}{(3m^2 + 4)^2}} = \frac{6\sqrt{2}}{7},$$

解得 $m^2 = 1, m = \pm 1$,

\therefore 直线 l 的方程为: $x = \pm y - 1$, 即 $x \pm y + 1 = 0$.

10. (25-26 高三上·安徽·开学考试) 已知 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$ 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, x 轴上方的两动点 M, N 在 C 上, 且 $MF_1 \parallel NF_2$, 当 $|MF_1| = |NF_2|$ 时, $|MF_1| = \sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 $|MF_1| = 3|NF_2|$, 求 M 的坐标;

(3) 求四边形 MNF_2F_1 的面积 S 的取值范围.

【答案】(1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) $(0, 2)$

(3) $(0, 4\sqrt{2}]$

【分析】(1) 根据焦点坐标可得 $a^2 - b^2 = 4$, 再结合 $|MF_1| = \sqrt{2}$ 及 $MF_1 \perp x$ 轴可得 $\frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$, 解方程组即可求解椭圆方程;

(2) 设 $M(x_1, y_1), y_1 > 0, N(x_2, y_2), y_2 > 0$, 由题可知 $\overrightarrow{MF_1} = 3\overrightarrow{NF_2}$, 根据向量坐标运算得 $\begin{cases} x_2 = \frac{x_1 + 8}{3} \\ y_2 = \frac{y_1}{3} \end{cases}$, 又

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \\ \frac{x_2^2}{8} + \frac{y_2^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{解方程组即可求解 } M \text{ 的坐标.}$$

(3) 设 N 关于原点的对称点 $N'(x_3, y_3)$, 进而由平行关系判断 M, F_1, N' 三点共线, 再设直线 MN' 的方程, 与椭圆方程联立, 将 $|MF_1| + |NF_2|$ 转化为 $|MN'|$, 再求点 F_2 到直线 MN' 的距离 d , 然后利用梯形的面积公式求 S , 最后通过变形利用基本不等式可求最大值即可.

【详解】(1) 由题可知 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$, 即 $a^2 - b^2 = 4$,

若 $|MF_1| = |NF_2|$, 且 $MF_1 \parallel NF_2$, 则此时 $MF_1 \perp x$ 轴,

$$\text{所以 } \frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1, \text{ 即 } \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1, \text{ 解得 } a^2 = 8, b^2 = 4,$$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设 $M(x_1, y_1), y_1 > 0, N(x_2, y_2), y_2 > 0$,

$$\text{由题可知 } \overrightarrow{MF_1} = 3\overrightarrow{NF_2}, \text{ 则 } \begin{cases} -2 - x_1 = 3(2 - x_2) \\ -y_1 = -3y_2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_2 = \frac{x_1 + 8}{3} \\ y_2 = \frac{y_1}{3} \end{cases},$$

$$\text{因为两点 } M, N \text{ 在椭圆 } C \text{ 上, 所以 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \\ \frac{x_2^2}{8} + \frac{y_2^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} x_1^2 + 2y_1^2 - 8 = 0 \\ \left(\frac{x_1 + 8}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{y_1}{3}\right)^2 - 8 = 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} x_1^2 + 2y_1^2 - 8 = 0 \\ (x_1 + 8)^2 + 2y_1^2 - 72 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } x_1 = 0, y_1 = 2, \text{ 所以 } M \text{ 的坐标为 } (0, 2).$$

(3) 设 $M(x_1, y_1), y_1 > 0, N(x_2, y_2), y_2 > 0, F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$,

则 N 关于原点的对称点 $N'(x_3, y_3)$, 即 $\begin{cases} x_3 = -x_2 \\ y_3 = -y_2 \end{cases}$,

由 $\overrightarrow{F_1M} = (x_1 + 2, y_1), \overrightarrow{F_2N} = (x_2 - 2, y_2), MF_1 \parallel NF_2$, 得 $(x_1 + 2)y_2 = (x_2 - 2)y_1$,

则 $-(x_1 + 2)y_3 = (-x_3 - 2)y_1$, 即 $(x_1 + 2)y_3 = (x_3 + 2)y_1$,

则 $\overrightarrow{F_1M} \parallel \overrightarrow{F_1N'}$, 则 M, F_1, N' 三点共线,

又 $\triangle NOF_2 \cong \triangle N'OF_1$, 得 $|NF_2| = |N'F_1|$,

$$\text{设 } MN': x = my - 2, \text{ 联立 } \begin{cases} x = my - 2 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (m^2 + 2)y^2 - 4my - 4 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = 32(m^2 + 1), y_1 + y_3 = \frac{4m}{m^2 + 2}, y_1 y_3 = -\frac{4}{m^2 + 2},$$

$$\text{则 } |MN'| = \sqrt{1 + m^2} |y_1 - y_3| = \sqrt{1 + m^2} \sqrt{\left(\frac{4m}{m^2 + 2}\right)^2 + \frac{16}{m^2 + 2}} = \frac{4\sqrt{2}(m^2 + 1)}{m^2 + 2},$$

$$\text{则 } |MF_1| + |NF_2| = |MF_1| + |N'F_1| = |MN'| = \frac{4\sqrt{2}(m^2 + 1)}{m^2 + 2},$$

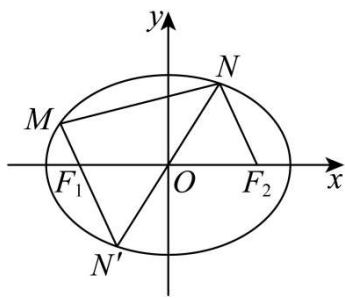
$$\text{又点 } F_2 \text{ 到直线 } MN' \text{ 的距离 } d = \frac{4}{\sqrt{m^2 + 1}},$$

$$\text{则梯形 } MNF_2F_1 \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} (|MF_1| + |NF_2|)d = \frac{8\sqrt{2}\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 2},$$

令 $t = \sqrt{m^2 + 1} \geq 1$, 则 $t^2 + 1 = m^2 + 2$,

$$\text{则 } S = \frac{8\sqrt{2}t}{t^2 + 1} = \frac{8\sqrt{2}}{t + \frac{1}{t}} \leq 4\sqrt{2}, \text{ 当 } t = 1 \text{ 即 } m = 0 \text{ 时等号成立,}$$

故 S 的取值范围为 $(0, 4\sqrt{2}]$.



11. (2025·河南信阳·模拟预测) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 焦距为 2.

(1) 求 E 的方程;

(2) 若 $F(1, 0)$, 过 F 作两条相互垂直的直线 AB, CD 与曲线 E 分别交于 A, B, C, D 四点, 设线段 AB, CD 的中点分别为 M, N .

(i) 证明: 直线 MN 过定点;

(ii) 求四边形 $ACBD$ 面积的取值范围.

【答案】(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ (2) (i) 直线 MN 过定点 $(\frac{2}{3}, 0)$; (ii) $[\frac{16}{9}, 2]$

【分析】(1) 根据椭圆的焦距和椭圆上的一个点, 待定系数求出椭圆标准方程.

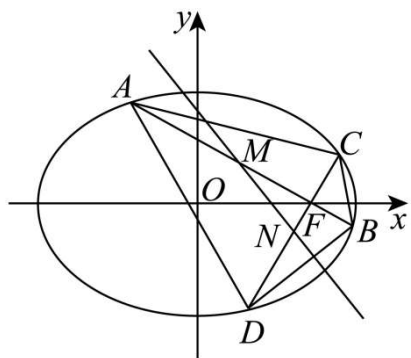
(2) 根据椭圆与直线的关系, 结合韦达定理, 和中点弦的性质, 证明直线过定点, 并求出四边形面积的范围.

【详解】(1) 由题意知椭圆过点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 则 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1$,

因为 $c = 1$, 所以 $a^2 = b^2 + 1$, 联立方程组 $\begin{cases} a^2 = b^2 + 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1 \end{cases}$, 解得 $a = \sqrt{2}$, 则 $b = 1$,

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2)



(i) 当两条直线的斜率都存在时, 不妨设 $AB: x = my + 1$, $CD: x = -\frac{1}{m}y + 1$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$,

联立直线 AB 与椭圆 E 的方程, 得 $\begin{cases} x = my + 1 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$, 消去 x 整理得 $(m^2 + 2)y^2 + 2my - 1 = 0$,

易知 $\Delta > 0$, 根据韦达定理可知 $y_1 + y_2 = \frac{-2m}{m^2 + 2}$, $y_1 y_2 = \frac{-1}{m^2 + 2}$,

$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-m}{m^2 + 2}$, $x_M = my_M + 1 = \frac{2}{m^2 + 2}$,

即 $M\left(\frac{2}{m^2+2}, \frac{-m}{m^2+2}\right)$. 同理 $N\left(\frac{2m^2}{2m^2+1}, \frac{m}{2m^2+1}\right)$,

$$\text{所以 } k_{MN} = \frac{\frac{-m}{m^2+2} - \frac{m}{2m^2+1}}{\frac{2}{m^2+2} - \frac{2m^2}{2m^2+1}} = \frac{3m}{2(m^2-1)},$$

$$\text{所以 } MN: y - \frac{-m}{m^2+2} = \frac{3m}{2(m^2-1)} \left(x - \frac{2}{m^2+2}\right),$$

令 $y=0$, 得 $x = \frac{2}{3}$, 此时直线 MN 恒过 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

当两条直线中有一条直线的斜率不存在时, 易知 $MN: y=0$, 仍经过 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$,

所以直线 MN 过定点 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

(ii) 当两条直线中有一条直线的斜率不存在时, 易知 $S_{ACBD} = 2$,

当两条直线的斜率都存在时, 不妨设 $AB: x = my + 1$; $CD: x = -\frac{1}{m}y + 1$,

$$\text{由 (i) 得: } |AB| = \sqrt{1+m^2} |y_2 - y_1| = 2\sqrt{2} \frac{1+m^2}{2+m^2}.$$

$$\text{同理 } |CD| = \sqrt{1+m^2} |y_2 - y_1| = 2\sqrt{2} \frac{1+m^2}{2m^2+1},$$

$$\text{则 } S_{ACBD} = \frac{1}{2} |AB| |CD| = 4 \frac{(m^2+1)^2}{2m^4+5m^2+2} = 4 \frac{m^4+2m^2+1}{2m^4+5m^2+2} = 2 - \frac{2m^2}{2m^4+5m^2+2},$$

$$\text{因为 } \frac{2m^2}{2m^4+5m^2+2} = \frac{2}{2m^2 + \frac{2}{m^2} + 5},$$

根据基本不等式 $2m^2 + \frac{2}{m^2} \geq 2\sqrt{2m^2 \cdot \frac{2}{m^2}} = 4$, 当且仅当 $m^2 = 1$ 时等号成立,

$$\text{所以 } \frac{2}{2m^2 + \frac{2}{m^2} + 5} \in \left(0, \frac{2}{9}\right], S_{ACBD} = 2 - \frac{2m^2}{2m^4+5m^2+2} \in \left[\frac{16}{9}, 2\right),$$

综上, 四边形 $ACBD$ 面积的取值范围为 $\left[\frac{16}{9}, 2\right]$.

题型三 定点及其探索性问题

【技巧通法·提分快招】

圆锥曲线的定点问题

1、参数无关法: 把直线或者曲线方程中的变量 x, y 当作常数看待, 把方程一端化为零, 既然是过定点, 那么这个方程就要对任意参数都成立, 这时的参数的系数就要全部为零, 这样就得到一个关于 x, y 的方程组, 这个方程组的解所确定的点就是直线或曲线所过的定点。

2、特殊到一般法: 根据动点或动直线、动曲线的特殊情况探索出定点, 再证明该定点与变量无关。

3、关系法: 对满足一定条件上的两点连结所得直线定点或满足一定条件的曲线过定点问题, 可设直线 (或曲线) 上两点的坐标, 利用坐标在直线 (或曲线) 上, 建立点的坐标满足方程 (组), 求出相应的直线 (或曲线), 然后再利用直线 (或曲线) 过定点的知识求解。

12. (25-26 高三上·北京房山·开学考试) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(2, 0)$, 离心

率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设直线 l 与椭圆 E 相交于 M, N 两点, 若直线 AM 与直线 AN 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$, 判断直线 l 是否过定点, 若过定点, 求出该定点坐标; 若不过定点, 说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 过定点 $(0, 0)$

【分析】(1) 根据椭圆顶点坐标以及离心率列方程求解即可;

(2) 分情况讨论直线斜率是否存在并设出直线 l 的方程并于椭圆方程联立, 利用韦达定理并根据斜率之间的关系列方程计算得出 $t=0$ 或 $t=-2k$, 可求出直线过定点 $(0, 0)$.

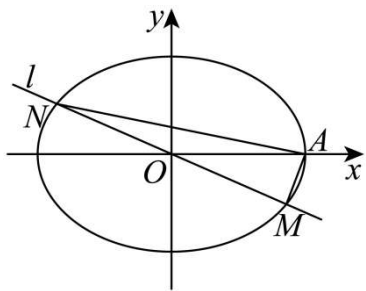
【详解】(1) 由顶点为 $A(2, 0)$ 可知 $a=2$,

又离心率为 $\frac{1}{2}$, 即 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 可得 $c=1$,

因此 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$,

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 当直线 l 的斜率存在时, 设直线 $l: y=kx+t$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 如下图所示:



联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = kx + t \end{cases}$, 整理可得 $(4k^2 + 3)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 12 = 0$,

显然 $\Delta > 0$, 即 $(8kt)^2 - 4(4k^2 + 3)(4t^2 - 12) > 0$, 可得 $t^2 < 4k^2 + 3$;

且 $x_1 + x_2 = -\frac{8kt}{4k^2 + 3}$, $x_1 x_2 = \frac{4t^2 - 12}{4k^2 + 3}$,

则直线 AM 与直线 AN 的斜率分别为 $k_{AM} = \frac{y_1}{x_1 - 2}$, $k_{AN} = \frac{y_2}{x_2 - 2}$;

即可得 $k_{AM} k_{AN} = \frac{y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{y_1 y_2}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = \frac{(kx_1 + t)(kx_2 + t)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$
$$= \frac{k^2 x_1 x_2 + kt(x_1 + x_2) + t^2}{x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{k^2 \frac{4t^2 - 12}{4k^2 + 3} + kt\left(-\frac{8kt}{4k^2 + 3}\right) + t^2}{\frac{4t^2 - 12}{4k^2 + 3} - 2\left(-\frac{8kt}{4k^2 + 3}\right) + 4} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4k^2 - t^2}{4k^2 + t^2 + 4kt} = -\frac{3}{4},$$

所以可得 $4k^2 + t^2 + 4kt = 4k^2 - t^2$, 所以 $t^2 = -2kt$;

解得 $t=0$ 或 $t=-2k$;

当 $t=0$ 时, 直线 l 为 $y=kx$, 此时直线恒过点 $(0, 0)$,

当 $t=-2k$ 时直线 l 为 $y=kx+t=k(x-2)$, 恒过 $(2, 0)$, 与点 $A(2, 0)$ 重合, 不合题意;

当直线 l 的斜率不存在时, 设直线方程为 $x=m, m \neq 2$,

代入椭圆方程可得 $y = \pm \sqrt{3\left(1 - \frac{m^2}{4}\right)}$,

不妨取 $M\left(m, \sqrt{3\left(1 - \frac{m^2}{4}\right)}\right), N\left(m, -\sqrt{3\left(1 - \frac{m^2}{4}\right)}\right)$,

$$\text{则 } k_{AM}k_{AN} = -\frac{\sqrt{3\left(1 - \frac{m^2}{4}\right)}}{m-2} \cdot \frac{\sqrt{3\left(1 - \frac{m^2}{4}\right)}}{m-2} = -\frac{3\left(1 - \frac{m^2}{4}\right)}{(m-2)^2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{(4-m^2)}{(m-2)^2} = -\frac{3}{4},$$

解得 $m=0$, 即直线 l 为 $x=0$, 恒过点 $(0,0)$,

当 $m=2$ 时, 直线 $x=2$ 过点 $A(2, 0)$, 不合题意;

综上可知, 直线 l 过定点 $(0,0)$.

13. (2025·宁夏中卫·三模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的离心率为 2, 其右焦点 F 到一条渐近线的距离为 $\sqrt{3}$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若直线 $l: y=kx+m (k>0, m>0)$ 与双曲线 C 交于不同的两点 A, B , 且以线段 AB 为直径的圆经过点 $P(1,0)$, 证明: 直线 l 过定点.

【答案】(1) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 利用已知条件及 $c^2 = a^2 + b^2$, 可求得双曲线方程;

(2) 以线段 AB 为直径的圆经过点 $P(1,0)$ 转化为 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$, 再联立直线 l 与双曲线的方程, 利用韦达定理得到 $m=2k$, 可得到直线过的定点.

【详解】(1) 因为双曲线 C 的右焦点为 $F(c,0)$, 渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$,

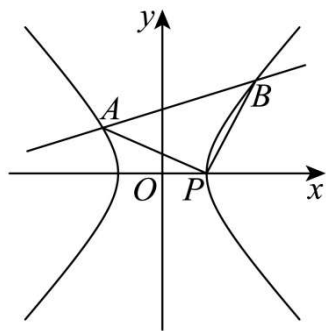
所以右焦点为 $F(c,0)$ 到渐近线的距离为 $\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{3}$,

因为双曲线的离心率为 2, 所以 $\frac{c}{a} = 2$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{c}{a} = 2 \\ \frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{3} \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=1 \\ b=\sqrt{3} \\ c=2 \end{cases},$$

所以双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 如图,



设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y=kx+m \\ x^2-\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}, \text{ 得 } (3-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0,$$

$$\text{则 } \begin{cases} 3-k^2 \neq 0 \\ \Delta=12(m^2-k^2+3)>0 \end{cases}, x_1+x_2=\frac{2km}{3-k^2}, x_1 \cdot x_2=\frac{-m^2-3}{3-k^2},$$

$$\text{所以 } y_1 \cdot y_2 = (kx_1+m)(kx_2+m) = k^2x_1x_2 + km(x_1+x_2) + m^2 = \frac{3m^2-3k^2}{3-k^2},$$

$$y_1+y_2=kx_1+m+kx_2+m=k(x_1+x_2)+2m=\frac{6m}{3-k^2},$$

因为以线段 AB 为直径的圆经过点 $P(1,0)$, 所以 $PA \perp PB$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (x_1-1)(x_2-1) + y_1y_2 = 0, \text{ 即 } x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1 + y_1y_2 = 0,$$

$$\text{所以 } \frac{-m^2-3}{3-k^2} - \frac{2km}{3-k^2} + 1 + \frac{3m^2-3k^2}{3-k^2} = 0,$$

$$\text{化简得 } m^2 - km - 2k^2 = 0, \text{ 即 } (m-2k)(m+k) = 0,$$

因为 $k > 0, m > 0$, 所以 $m = 2k$,

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y = kx + m = kx + 2k = k(x+2),$$

所以直线 l 过定点 $(-2,0)$.

14. (24-25 高三上·四川雅安·月考) 已知 $A(0,1), F(0,-2)$ 分别是双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的上顶点, 下焦点.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 过 F 的直线与 C 的上, 下支分别交于 B, D 两点 (B 异于 A), 直线 $x=t$ 平分线段 BD 与 C 的下支交于点 E .

(i) 求证: 直线 AE 与直线 BD 的交点在一条定直线上;

(ii) 过 B, D, E 三点的圆是否经过定点, 请说明理由.

【答案】(1) $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$

(2) (i) 证明见解析; (ii) 过 B, D, E 三点的圆经过定点 $A(0,1)$, 理由见解析

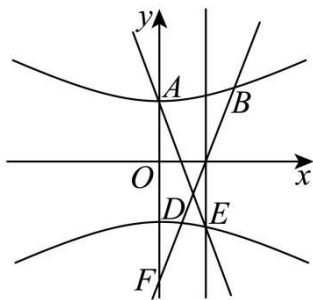
【分析】(1) 由已知有 $a=1, c=2$, 由 $b^2=c^2-a^2$ 求出 b 即可.

(2) (i) 设直线 BD 方程为: $y=kx-2$, 联立方程组由韦达定理即可求得 $E\left(\frac{6k}{3k^2-1}, -\frac{3k^2+1}{3k^2-1}\right)$, 即可得直线 AE 方程为 $y=-kx+1$, 由直线 BD 方程与直线 AE 方程消去 k 即可. (ii) 先确定经过 B, D, E 三点的圆是以线段 BD 为直径的圆, 设线段 BD 的中点为 G , 经过计算得 $|AG|=|EG|$, 即可得点 A 在圆上得证.

【详解】(1) 由题意, $a=1, c=2$, 所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}$,

所以 C 的方程为 $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$.

(2) (i) 由题意, 直线 BD 的斜率存在, 设直线 BD 方程为: $y=kx-2, B(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$.



由 $\begin{cases} y^2 - \frac{x^2}{3} = 1 \\ y = kx - 2 \end{cases}$, 消去 y 整理得, $(3k^2 - 1)x^2 - 12kx + 9 = 0$,

由于 x_1, x_2 同号, 所以 $3k^2 - 1 > 0, \Delta = 36(k^2 + 1) > 0$, 即 $k^2 > \frac{1}{3}$, 则 $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{12k}{3k^2 - 1} \\ x_1 x_2 = \frac{9}{3k^2 - 1} \end{cases}$,

所以 $t = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{6k}{3k^2 - 1}$, 由 $\begin{cases} y^2 - \frac{x^2}{3} = 1 \\ x = \frac{6k}{3k^2 - 1} \end{cases}$, 解得 $y = \pm \frac{3k^2 + 1}{3k^2 - 1}$,

所以 $E\left(\frac{6k}{3k^2 - 1}, -\frac{3k^2 + 1}{3k^2 - 1}\right)$,

所以直线 AE 方程为: $y = \frac{1 + \frac{3k^2 + 1}{3k^2 - 1}}{-\frac{6k}{3k^2 - 1}}x + 1$, 即 $y = -kx + 1$,

由 $\begin{cases} y = kx - 2 \\ y = -kx + 1 \end{cases}$ 得 $y = -\frac{1}{2}$, 所以直线 AE 与直线 BD 的交点在一条定直线 $y = -\frac{1}{2}$ 上.

(ii) 过 B, D, E 三点的圆经过定点, 理由如下:

由弦长公式 $|BD| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{\left(\frac{12k}{3k^2 - 1}\right)^2 - \frac{36}{3k^2 - 1}} = \frac{6k^2 + 6}{3k^2 - 1}$.

设线段 BD 的中点为 $G(t, y_0)$, 则 $y_0 = kt - 2 = \frac{2}{3k^2 - 1}$,

所以 $|EG| = \frac{2}{3k^2 - 1} + \frac{3k^2 + 1}{3k^2 - 1} = \frac{3k^2 + 3}{3k^2 - 1}$,

所以 $|BD| = 2|EG|$, 即点 E 在以线段 BD 为直径的圆上.

又 $|AG| = \sqrt{\left(\frac{6k}{3k^2 - 1}\right)^2 + \left(\frac{2}{3k^2 - 1} - 1\right)^2} = \frac{3k^2 + 3}{3k^2 - 1}$, 即 $|AG| = |EG|$,

所以 A 在以线段 BD 为直径的圆上,

所以过 B, D, E 三点的圆经过定点 $A(0, 1)$.

【点睛】方法点睛: 直线与圆锥曲线定点问题, 一般通过联立直线与圆锥曲线, 结合韦达定理将可能过定点的直线表示出来, 进而判断是否过定点.

15. (2025·陕西西安·二模) 抛物线的弦与弦的端点处的两条切线形成的三角形称为阿基米德三角形, 由抛物线的三条切线围成的三角形称为抛物线的切线三角形. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 直线 $l: y = 2$ 过点 F , 过 x 轴下方的一点 P 作 C 的两条切线 l_1 和 l_2 , 且 l_1, l_2 分别交 x 轴于点 A, B , 交 l 于点 M, N .

- (1) 求抛物线 C 的标准方程;
- (2) 若 $\triangle PMN$ 为阿基米德三角形, 求 $\angle MPN$;
- (3) 证明: 切线三角形 PAB 的外接圆过定点.

【答案】(1) $x^2=8y$

(2) $\angle MPN=90^\circ$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 由条件求得 $p=4$ 即可;

(2) 通过求出抛物线方程和切线斜率, 利用斜率乘积判断两切线垂直得出角度;

(3) 先求出切线方程, 进而得到 A, B 坐标, 再根据外接圆性质证明过定点;

【详解】(1) 由题意得 $\frac{p}{2}=2$, 则 $p=4$,

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=8y$,

(2) 因为 $\triangle PMN$ 为阿基米德三角形,

所以 l_1, l_2 分别与抛物线 C 切于点 M, N ,

不妨设点 M 在 y 轴左侧, 则 $M(-4, 2), N(4, 2)$.

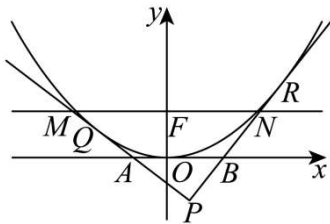
由 $x^2=8y$, 得 $y=\frac{1}{8}x^2$,

则 $y'=\frac{1}{4}x$,

所以 l_1 的斜率为 $-1, l_2$ 的斜率为 1 ,

所以 $l_1 \perp l_2$,

所以 $\angle MPN=90^\circ$.



(3) 由 (1) 可知抛物线 $C: x^2=8y$,

设 l_1, l_2 分别与抛物线 C 切于点 $Q(x_1, \frac{x_1^2}{8})$,

$R(x_2, \frac{x_2^2}{8}), x_1, x_2 \neq 0$

由 (1) 可知直线 PQ 的斜率为 $\frac{1}{4}x_1$, 直线 PR 的斜率为 $\frac{1}{4}x_2$,

所以直线 PQ 的方程为 $y - \frac{x_1^2}{8} = \frac{x_1}{4}(x - x_1)$. 即 $y = \frac{x_1}{4}x - \frac{x_1^2}{8}$

直线 PR 的方程为 $y - \frac{x_2^2}{8} = \frac{x_2}{4}(x - x_2)$, 即 $y = \frac{x_2}{4}x - \frac{x_2^2}{8}$,

所以 $P(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1x_2}{8}), A(\frac{x_1}{2}, 0), B(\frac{x_2}{2}, 0)$.

设 $\triangle PAB$ 外接圆的圆心为 $G(m, n)$,

则圆心 G 在线段 AB 的垂直平分线上,

所以 $m = \frac{x_1+x_2}{4}$,

则圆 G 的半径为 $|GA| = \sqrt{(\frac{x_1+x_2}{4} - \frac{x_1}{2})^2 + n^2} = \sqrt{(\frac{x_2-x_1}{4})^2 + n^2}$,

所以圆 G 的方程为 $(x - \frac{x_1+x_2}{4})^2 + (y - n)^2 = (\frac{x_2-x_1}{4})^2 + n^2$,

又点 P 在圆 G 上,

$$\text{所以 } \left(\frac{x_1+x_2}{4}\right)^2 + \left(\frac{x_1x_2}{8} - n\right)^2 = \left(\frac{x_2-x_1}{4}\right)^2 + n^2,$$

$$\text{即 } \frac{x_1x_2}{4} + \frac{x_1^2x_2^2}{64} - \frac{nx_1x_2}{4} = 0, \text{ 所以 } n = \frac{x_1x_2+16}{16},$$

$$\text{所以 } \left(x - \frac{x_1+x_2}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{x_1x_2+16}{16}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x_2-x_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{x_1x_2+16}{16}\right)^2$$

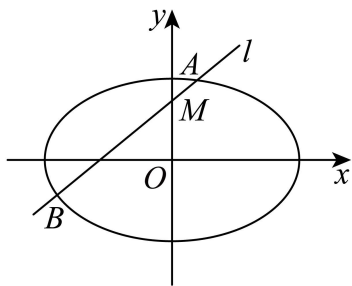
$$\text{整理得 } x^2 - \frac{x_1+x_2}{2}x + y^2 - \frac{x_1x_2+16}{8}y + \frac{x_1x_2}{4} = 0,$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 - 2y - \frac{x_1+x_2}{2}x + \frac{x_1x_2}{4}\left(1 - \frac{y}{2}\right) = 0,$$

$$\text{令 } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x = 0 \\ 1 - \frac{y}{2} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases},$$

所以 $\triangle PAB$ 的外接圆过定点 $(0, 2)$.

16. (2025·四川巴中·模拟预测) 如图, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $(1, 0)$, 过点 $M(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ 的动直线 l 与椭圆相交于 A, B 两点, 当直线 l 平行于 x 轴时, 直线 l 被椭圆 E 截得的线段长为 $\frac{2\sqrt{30}}{3}$.



(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中, 是否存在与点 M 不同的定点 N , 使 $\frac{|NA|}{|NB|} = \frac{|MA|}{|MB|}$ 恒成立? 若存在, 求出点 N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) 存在, $N(0, 2\sqrt{3})$

【分析】(1) 结合椭圆的性质, 列出关于 a, b, c 的方程, 代入计算, 即可得到结果;

(2) 由特殊情况可得点 N 在 y 轴上, 即可求得点 N 的坐标, 然后证明对任意直线 l 均有 $\frac{|NA|}{|NB|} = \frac{|MA|}{|MB|}$.

【详解】(1) 由椭圆的一个焦点为 $(1, 0)$, 可得 $c = 1$.

当直线 l 平行 x 轴时, 直线 l 的方程为 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

且此时直线 l 被椭圆 E 截得的线段长为 $\frac{2\sqrt{30}}{3}$,

由椭圆的对称性可知,点 $(\frac{\sqrt{30}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ 在椭圆上,

$$\text{代入椭圆方程可得} \begin{cases} \frac{10}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + 1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a^2 = 5 \\ b^2 = 4 \end{cases},$$

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 当直线 l 与 x 轴平行时,设直线 l 与椭圆相交于 C, D 两点.

如果存在定点 N 满足条件,则有 $\frac{|NC|}{|ND|} = \frac{|MC|}{|MD|} = 1$,即 $|NC| = |ND|$.

所以点 N 在 y 轴上,可设点 N 的坐标为 $(0, t)$.

当直线 l 与 x 轴垂直时,设直线 l 与椭圆相交于 P, Q 两点,则点 P, Q 的坐标分别为 $(0, 2), (0, -2)$.

$$\text{由} \frac{|NP|}{|NQ|} = \frac{|MP|}{|MQ|}, \text{有} \frac{|t-2|}{|t+2|} = \frac{|\frac{2}{\sqrt{3}}-2|}{|\frac{2}{\sqrt{3}}+2|}, \text{解得} t=2\sqrt{3} \text{ 或 } t=\frac{2\sqrt{3}}{3} (\text{舍}).$$

所以,若存在不同于点 M 的定点 N 满足条件,则点 N 的坐标只可能为 $(0, \pm 2\sqrt{3})$.

下面证明:对任意直线 l 均有 $\frac{|NA|}{|NB|} = \frac{|MA|}{|MB|}$.

当直线 l 的斜率不存在时,结论明显成立.

当直线 l 的斜率存在时,可以设直线 l 的方程为 $y = kx + \frac{2\sqrt{3}}{3}$,并设点 A, B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx + \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \text{得}, (5k^2 + 4)x^2 + \frac{20\sqrt{3}}{3}kx - \frac{40}{3} = 0.$$

$$\text{其判别式} \Delta = \left(\frac{20\sqrt{3}}{3}k\right)^2 + \frac{160}{3}(5k^2 + 4) > 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{20\sqrt{3}k}{3(5k^2 + 4)}, x_1 x_2 = -\frac{40}{3(5k^2 + 4)}.$$

$$\text{因此, } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}k.$$

易知,点 B 关于 y 轴对称的点 B' 的坐标为 $(-x_2, \pm y_2)$.

$$\text{又 } k_{NA} = \frac{y_1 - 2\sqrt{3}}{x_1} = \frac{kx_1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}}{x_1} = k - \frac{4\sqrt{3}}{3x_1},$$

$$k_{NB'} = \frac{y_2 - 2\sqrt{3}}{-x_2} = \frac{kx_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}}{-x_2} = -k + \frac{4\sqrt{3}}{3x_2},$$

$$= -k + \frac{4\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k - \frac{1}{x_1} \right) = k - \frac{4\sqrt{3}}{3x_1},$$

所以 $k_{NA} = k_{NB'}$,即 N, A, B' 三点共线.

$$\text{所以 } \frac{|NA|}{|NB|} = \frac{|NA|}{|NB'|} = \frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{|MA|}{|MB|}.$$

故存在与点 M 不同的定点 $N(0, \pm 2\sqrt{3})$,使得 $\frac{|NA|}{|NB|} = \frac{|MA|}{|MB|}$ 恒成立.

17. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 A ,左焦点为 F ,过点 F 且斜率为1的直线与 C 的

一条渐近线垂直,垂足为 N ,且 $|FN|=1$.

(1) 求 C 的方程.

(2) 过点 $M(-2,0)$ 的直线交 C 于 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 两点, 直线 AP , AQ 分别交 y 轴于点 G , H , 试问在 x 轴上是否存在定点 T , 使得 $TG \perp TH$? 若存在, 求点 T 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $x^2 - y^2 = 1$

(2) 存在, $T(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$

【分析】(1) 结合题意由双曲线的性质计算即可得;

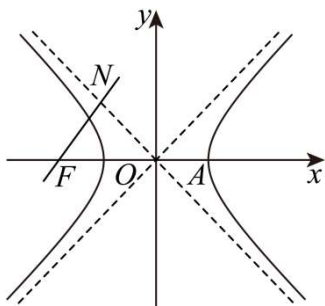
(2) 设出直线方程后与曲线联立消去纵坐标, 可得与两交点横坐标有关韦达定理, 结合 $TG \perp TH$ 及 G , H 两点坐标计算即可得.

【详解】(1) 因为 FN 的斜率为1, 且 $FN \perp ON$,

所以 $-\frac{b}{a} = -1$, 即 $a = b$, 因为 $|FN| = 1$, 则 $\angle NFO = \frac{\pi}{4}$,

所以 $c = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$, 由 $c^2 = a^2 + b^2$, 则 $a = b = 1$,

所以双曲线 C 的方程为 $x^2 - y^2 = 1$;



(2) 设直线 AP 的方程为 $y = k_1(x-1)$, AQ 的方程为 $y = k_2(x-1)$,

则 $G(0, -k_1)$, $H(0, -k_2)$, 设存在定点 $T(t, 0)$, 使得 $TG \perp TH$,

则 $\overrightarrow{TG} \cdot \overrightarrow{TH} = t^2 + k_1 k_2 = 0$, 所以 $t = \pm \sqrt{-k_1 k_2}$.

当 PQ 不垂直于 x 轴时, 设直线 PQ 的方程为 $y = k(x+2)$,

联立方程组 $\begin{cases} y = k(x+2) \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$, 消去 y 得 $(1-k^2)x^2 - 4k^2x - 4k^2 - 1 = 0 (k \neq \pm 1)$,

$\Delta = 16k^4 + 4(1-k^2)(4k^2+1) = 12k^2 + 4 > 0$,

所以 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1-k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{-4k^2-1}{1-k^2}$.

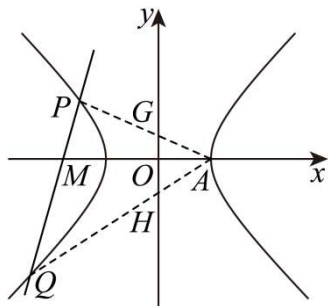
因为 $k_1 k_2 = \frac{y_1}{x_1-1} \cdot \frac{y_2}{x_2-1} = \frac{k^2[x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4]}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1}$,

所以 $k_1 k_2 = \frac{k^2(\frac{-4k^2-1}{1-k^2} + \frac{8k^2}{1-k^2} + 4)}{\frac{-4k^2-1}{1-k^2} - \frac{4k^2}{1-k^2} + 1} = \frac{3k^2}{-9k^2} = -\frac{1}{3}$,

所以 $t = \pm \sqrt{-k_1 k_2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即存在定点 $T(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$, 使得 $TG \perp TH$;

当 PQ 垂直于 x 轴时, 直线 PQ 的方程为 $x = -2$, 联立方程组 $\begin{cases} x = -2 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x = -2 \\ y = \pm \sqrt{3} \end{cases}$, 设 $P(-2, \sqrt{3})$, 由 $\frac{|OG|}{|PM|} = \frac{1}{3}$, 得 $|OG| = \frac{\sqrt{3}}{3}$,



所以存在定点 $T\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, 使得 $TG \perp TH$;

综上, 在 x 轴上存在定点 $T\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, 使得 $TG \perp TH$.

【点睛】方法点睛: 对于直线与圆锥曲线的题目, 基本方法是联立直线方程与曲线方程, 化成关于横坐标或纵坐标有关的一元二次方程, 结合韦达定理进行运算解答.

题型四 斜率有关定值问题

【技巧通法·提分快招】

圆锥曲线的定值问题

1、解析几何中的定值问题是指某些几何量(线段长度, 图形面积, 角度, 直线的斜率等)的大小或某些代数表达式的值和题目中的参数无关, 不依参数的变化而变化, 而始终是一个确定的值,

求定值问题常见的解题方法有两种:

法一、先猜后证(特例法): 从特殊入手, 求出定值, 再证明这个定值与变量无关;

法二、引起变量法(直接法): 直接推理、计算, 并在计算推理过程中消去参数, 从而得到定值。

2、直接法解题步骤

第一步设变量: 选择适当的量当变量, 一般情况先设出直线的方程: $y = kx + b$ 或 $x = my + n$ 、点的坐标;

第二步表示函数: 要把证明为定值的量表示成上述变量的函数, 一般情况通过题干所给的已知条件, 进行正确的运算, 将需要用到的所有中间结果(如弦长、距离等)用引入的变量表示出来;

第三步定值: 将中间结果带入目标量, 通过计算化简得出目标量与引入的变量无关, 是一个常数。

18. (2025·甘肃白银·模拟预测) 已知抛物线 $C: y^2 = -2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $Q(x_0, 2)$ 在 C 上, 且 $|QF| = 2|OF|$, 其中 O 为坐标原点, 过点 $A(0, 1)$ 的直线 l 与 C 相交.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 l 与 C 仅有一个公共点且斜率存在, 求 l 的斜率;

(3) 若 l 与 C 交于 M, N 两点, 记直线 OM 与直线 ON 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: $k_1 + k_2$ 为定值, 并求出该定值.

【答案】(1) $y^2 = -4x$

(2) 0 或 -1

(3) 证明见解析, -4

【分析】(1) 由抛物线的定义可得 x_0 , 再将点 Q 的坐标代入抛物线方程, 即可得到结果;

(2) 联立直线与抛物线方程, 分 $k = 0$ 与 $k \neq 0$ 讨论, 即可得到结果;

(3) 联立直线与抛物线方程, 结合韦达定理代入计算, 即可得到结果.

【详解】(1) 由抛物线的定义可知 $|QF| = -x_0 + \frac{p}{2}$,

又 $|QF| = 2|OF|$, 则 $|QF| = p$.

即 $\frac{p}{2} - x_0 = p$. 所以 $x_0 = -\frac{p}{2}$.

又 $Q(-\frac{p}{2}, 2)$ 在抛物线上.

所以 $4 = -2p \cdot (-\frac{p}{2})$. 且 $p > 0$.

解得 $p = 2$. 则 C 的方程为 $y^2 = -4x$.

(2) 设直线 l 的斜率为 k , 则 $l: y = kx + 1$.

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + 1 \\ y^2 = -4x \end{cases},$$

可得 $k^2x^2 + (2k + 4)x + 1 = 0$,

当 $k = 0$ 时, $l: y = 1$, 符合题意;

当 $k \neq 0$ 时, 则有 $\Delta = (2k + 4)^2 - 4k^2 = 0$, 解得 $k = -1$.

综上, 直线 l 的斜率为 0 或 -1 .

(3) 由题得 l 的斜率存在且不为零.

设 l 的方程为 $y = kx + 1$. $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + 1 \\ y^2 = -4x \end{cases}, \text{可得 } k^2x^2 + (2k + 4)x + 1 = 0,$$

$$\Delta = (2k + 4)^2 - 4k^2 = 16k + 16 > 0. \text{ 即 } k > -1.$$

$$\text{可得 } x_1 + x_2 = -\frac{2k + 4}{k^2}, x_1x_2 = \frac{1}{k^2}.$$

$$\text{故 } k_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{kx_1 + 1}{x_1}, k_2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{kx_2 + 1}{x_2}.$$

$$\text{则 } k_1 + k_2 = \frac{kx_1 + 1}{x_1} + \frac{kx_2 + 1}{x_2} = 2k + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -4,$$

所以 $k_1 + k_2$ 为定值 -4 .

19. (25 - 26 高三上·山西长治·开学考试) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线交 C 于 A, B 两点, 其中点 A 在第一象限. 若 AF 的中点 M 到 y 轴的距离为 p , 且 $|OA| = \sqrt{21}$ (O 为坐标原点).

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积;

(3) 过点 $Q(-3, 0)$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 D, E 两点, 问: 在 x 轴上是否存在定点 T , 设直线 DT, ET 的斜率分别为 k_1, k_2 , 使 k_1k_2 为定值, 若存在, 求出点 T 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y^2 = 4x$

$$(2) \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

(3) 存在, 定点为 $T(0, 0)$

【分析】(1) 根据条件, 用 p 表示出 A 点坐标, 结合 $|OA| = \sqrt{21}$ 可求 p 的值, 得到抛物线的方程.

(2) 结合 (1) 的结论, 写出直线 AB 的方程, 与抛物线方程联立, 可得 A, B 点坐标, 利用 $S = \frac{1}{2} \times |OF| \times |y_A - y_B|$ 求 $\triangle AOB$ 的面积.

(3) 设直线 $DE: x = my - 3$, 代入抛物线方程, 利用韦达定理, 表示 $y_1 + y_2, y_1 \cdot y_2$, 再设 $T(t, 0)$, 用 t 表示 k_1k_2 得: $k_1k_2 = \frac{12}{12m^2 - 4m^2(3+t) + (3+t)^2}$, 可得 $t = 0$ 时, k_1k_2 为定值.

【详解】(1) 由题意得 $F(\frac{p}{2}, 0)$

$\because AF$ 的中点 M 到 y 轴的距离为 p ,

$$\therefore x_A = \frac{3}{2}p$$

又 \because 点 A 在抛物线上,

$$\therefore y_A^2 = 2px_A = 3p^2, \text{又点 } A \text{ 在第一象限, 即 } y_A = \sqrt{3}p,$$

$$\therefore |OA|^2 = x_A^2 + y_A^2 = \frac{21p^2}{4} = 21, \because p > 0, \therefore p = 2.$$

\therefore 抛物线 C 的方程: $y^2 = 4x$.

$$(2) \text{ 由 (1) 可知: } x_A = \frac{3}{2}p = 3, y_A = \sqrt{3}p = 2\sqrt{3}, F(1, 0),$$

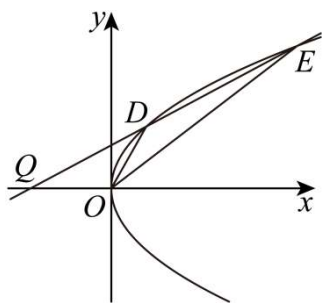
所以直线 AB 的斜率为 $\sqrt{3}$, 则直线 AB 的方程为 $y = \sqrt{3}(x-1)$.

联立抛物线可得 $3x^2 - 10x + 3 = 0, \therefore x_A x_B = 1$.

$$\text{又 } \because x_A = 3, \therefore x_B = \frac{1}{3}, \text{ 那么 } B\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

$$\text{所以 } \triangle AOB \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times |OF| \times |y_A - y_B| = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

(3) 如图:



设 $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2), T(t, 0)$,

易知直线 l 斜率存在, 设直线 $l: x = my - 3$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my - 3 \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{ 消 } x \text{ 得: } y^2 - 4my + 12 = 0$$

$$\because \Delta = 16m^2 - 48 > 0,$$

$$\therefore m^2 > 3,$$

由韦达定理得: $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = 12$,

$$\therefore k_1 k_2 = \frac{y_1 \cdot y_2}{(x_1 - t)(x_2 - t)}$$

$$= \frac{y_1 y_2}{[my_1 - (3+t)][my_2 - (3+t)]}$$

$$= \frac{y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 - m(3+t)(y_1 + y_2) + (3+t)^2}$$

$$= \frac{12}{12m^2 - 4m^2(3+t) + (3+t)^2} = \frac{12}{[12 - 4(3+t)]m^2 + (3+t)^2},$$

为使得 $k_1 k_2$ 为定值, 则需满足 $[12 - 4(3+t)]m^2 + (3+t)^2$ 与 m 无关,

故 $12 - 4(3+t) = 0$, 即 $t = 0, \therefore T(0, 0)$,

综上, 存在定点 $T(0, 0)$, 使得 $k_1 k_2$ 为定值.

20. (2025·河北·模拟预测) 已知圆 $F: (x-1)^2 + y^2 = 8$, 圆 N 过点 $(-1, 0)$ 且与圆 F 内切, 若圆 N 的圆心的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 若过点 F 的直线 l 与曲线 C 交于 P, Q 两点 (P 在 x 轴上方), 且曲线 C 与 x 轴交于 A, B 两点 (A 在 B 点左侧), 记直线 AP, BQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 请问 $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值, 如果是请求出定值; 如果不是, 请说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

(2) $\frac{k_1}{k_2}$ 是定值, 该定值为 $3 - 2\sqrt{2}$

【分析】(1) 因为内切, 故到点 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$ 距离之和为 $2\sqrt{2}$, 曲线为椭圆.

(2) 根据题干设出直线方程, 再与椭圆联立, 结合韦达定理把 $\frac{k_1}{k_2}$ 表示出来化简求值即可.

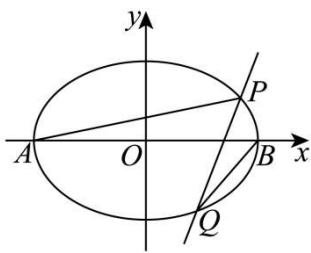
【详解】(1) 设 $F_1(-1, 0)$, 则 $|FF_1| = 2 < 2\sqrt{2}$, 则 F_1 在圆 F 内部,

则 $|NF| = 2\sqrt{2} - |NF_1|$, 即为 $|NF_1| + |NF| = 2\sqrt{2} > |FF_1|$,

则点 N 的轨迹是以 F_1, F 为焦点的椭圆, 设曲线 C 的方程为: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

则 $c = 1, 2a = 2\sqrt{2}$, 解得 $a = \sqrt{2}$, 故 $b = 1$, 则 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$;

(2) 如图, 令 $y = 0$, 则 $x = \pm\sqrt{2}, A(-\sqrt{2}, 0), B(\sqrt{2}, 0)$,



易知直线 l 斜率不为 0, 设直线 $l: x = my + 1, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

则 $\begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$ 化简得 $(m^2 + 2)y^2 + 2my - 1 = 0$, 则 $\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 2}, \\ y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 + 2} \end{cases}$,

$k_1 = \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{2}} = \frac{y_1}{my_1 + (1 + \sqrt{2})}$, 同理 $k_2 = \frac{y_2}{my_2 + (1 - \sqrt{2})}$, 且 $\frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = 2m$,

则 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{y_1}{my_1 + (1 + \sqrt{2})}}{\frac{y_2}{my_2 + (1 - \sqrt{2})}} = \frac{my_1 y_2 + (1 - \sqrt{2})y_1}{my_1 y_2 + (1 + \sqrt{2})y_2}$,

$= \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} + (1 - \sqrt{2})y_1}{\frac{y_1 + y_2}{2} + (1 + \sqrt{2})y_2} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})y_1 + y_2}{y_1 + (3 + 2\sqrt{2})y_2} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})y_1 + y_2}{y_1 + \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}y_2} = 3 - 2\sqrt{2}$,

所以 $\frac{k_1}{k_2}$ 是定值, 该定值为 $3 - 2\sqrt{2}$.

21. (24-25 高三上·甘肃白银·月考) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$, 点 $(3, -1)$

在双曲线 C 上, 过 C 的左焦点 F 的直线 l 与 C 的左支相交于 A, B 两点, 且 l 分别交 C 的两条渐近线于 M, N 两点.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若 O 是坐标原点, $|MN| = 8\sqrt{6}$, 求 $\triangle MON$ 的面积;

(3) 已知点 $P(-4, 2)$, 直线 AP 交直线 $x = -2$ 于点 Q , 设直线 QA, QB 的斜率分别 k_1, k_2 , 求证: $k_1 - k_2$ 为定值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

(2) 32

(3) 证明见解析

【分析】(1) 由双曲线离心率及点 $(3, -1)$ 在双曲线 C 上可得双曲线方程;

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 将直线 l 与双曲线渐近线方程联立可得 $|y_1 - y_2| = \frac{8}{1 - m^2}$,

然后设直线 l 的倾斜角为 α , 由 $|y_1 - y_2| = |MN|\sin\alpha$, 可得 m^2 , 即可得答案;

(3) 由题意设直线 l 的方程为 $x = my - 4 (m \neq 0)$, 设 $A(x_3, y_3), B(x_4, y_4)$, 由题可表示出 $k_1 - k_2 = \frac{(y_3 - 2)(my_4 - 2) - my_3(y_4 - 2 - 2k_1)}{my_3(my_4 - 2)}$, 再将直线 l 方程与双曲线方程联立, 由韦达定理可得 $my_3y_4 = y_3 + y_4$, 结合 $mk_1y_3 = y_3 - 2$, 可完成证明.

【详解】(1) (1) 由双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$, 且点 $(3, -1)$ 在双曲线 C 上,

可得 $\begin{cases} \frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{c^2}{a^2} = 2 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$, 解得 $a^2 = 8, b^2 = 8$, 所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由 (1) 可知双曲线 C 的左焦点为 $F(-4, 0)$, 所以可设直线 l 的方程为 $x = my - 4$,

当 $m = 0$ 时, 易知 $|MN| = 8$, 不合题意, 故 $m \neq 0$.

由 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x = my - 4 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} y = \pm x \\ x = my - 4 \end{cases}$, 消去 x , 得 $y = \frac{4}{m \pm 1}$, 其中 $0 < m^2 < 1$,

所以 $|y_1 - y_2| = \left| \frac{4}{m+1} - \frac{4}{m-1} \right| = \frac{8}{1 - m^2}$.

记直线 l 的倾斜角为 α , 由 $\tan\alpha = \frac{1}{m}$, 得 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$,

由 $|y_1 - y_2| = |MN|\sin\alpha$, 得 $\frac{8}{1 - m^2} = \frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{1+m^2}}$,

解得 $m^2 = \frac{5}{3}$ (舍去) 或 $m^2 = \frac{1}{2}$,

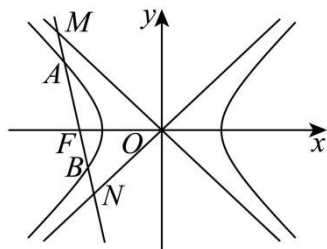
所以 $|y_1 - y_2| = 16$, 故 $S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} \times 4 \times |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times 4 \times 16 = 32$.

(3) 由题意设直线 l 的方程为 $x = my - 4 (m \neq 0)$, 设 $A(x_3, y_3), B(x_4, y_4)$,

由直线 $AP: y - 2 = k_1(x + 4)$, 得 $Q(-2, 2 + 2k_1)$, 则 $k_2 = \frac{y_4 - 2 - 2k_1}{x_4 + 2} = \frac{y_4 - 2 - 2k_1}{my_4 - 2}$,

又 $k_1 = k_{QA} = k_{PA} = \frac{y_3 - 2}{x_3 + 4} = \frac{y_3 - 2}{my_3}$,

所以 $k_1 - k_2 = \frac{y_3 - 2}{my_3} - \frac{y_4 - 2 - 2k_1}{my_4 - 2} = \frac{(y_3 - 2)(my_4 - 2) - my_3(y_4 - 2 - 2k_1)}{my_3(my_4 - 2)}$
 $= \frac{-2my_4 - 2y_3 + 4 + 2my_3 + 2mk_1y_3}{my_3(my_4 - 2)}$.

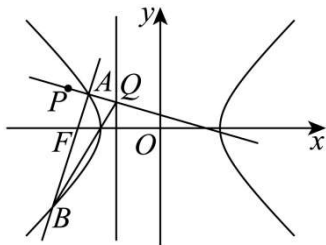


由 $\begin{cases} x=my-4 \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$, 消去 x , 得 $(m^2-1)y^2-8my+8=0$, 其中 $0 < m^2 < 1$,

则 $\Delta = 32m^2 + 32 > 0$, $y_3 + y_4 = \frac{8m}{m^2-1}$, $y_3y_4 = \frac{8}{m^2-1}$, 所以 $y_3 + y_4 = my_3y_4$.

因为 $k_1 = \frac{y_3-2}{my_3}$, 所以 $mk_1y_3 = y_3 - 2$, $-2y_3 + 4 + 2mk_1y_3 = 0$

所以 $k_1 - k_2 = \frac{2m(y_3-y_4)}{my_3(my_4-2)} = \frac{2(y_3-y_4)}{y_3+y_4-2y_3} = \frac{2(y_3-y_4)}{y_4-y_3} = -2$, 即 $k_1 - k_2$ 为定值.



【点睛】关键点睛:对于解析几何中的三角形面积问题,可对面积进行适当分割,将其分为一边与坐标轴垂直三角形面积之和或之差;对于定值问题,常见思路为找到定值关于所设参数的表达式,再说明定值取值与参数无关.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中,点 A, B, C 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点、上顶点、左顶点,

若 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|AB| = \sqrt{5}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 已知 M, N 两点,其中点 M 在线段 CO 上运动(不含端点), N 与 M 关于 A 点对称,直线 BN 与椭圆 E 的另一交点为 P 点,直线 BM 与椭圆 E 的另一交点为 Q 点,设直线 BM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 直线 AP, AQ 的斜率分别为 k_3, k_4 .

(i) 求 $\triangle BNQ$ 的面积 S 的最大值;

(ii) 求证: $\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)(k_3 + k_4)$ 为定值,并求出该定值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) (i) $2 + 2\sqrt{2}$; (ii) 证明见解析, $\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)(k_3 + k_4) = 4$

【分析】(1) 根据离心率及 $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 求出 a, b , 即可得解;

(2) (i) 设 d 为点 Q 到直线 AB 的距离, 则 $\triangle BNQ$ 的面积 $S = 2S_{\triangle BAQ} = \sqrt{5}d$, 当过点 Q 且与直线 AB 平行的直线 l' 与椭圆相切时 d 取得最大值, 求出 d 的最大值, 即可得解; (ii) 设 $M(x, 0) (-2 < x < 0)$, 则

$N(4-x, 0)$, 则 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = -4$, 再由直线 BN 的方程为 $y = k_2x + 1$, 求出 P 点坐标, 从而得到 Q 点坐标, 即可求出 $k_3 + k_4$, 从而得解.

【详解】(1) 依题意可得 $\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ |AB| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5} \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \sqrt{3} \end{cases}$,

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(2) (i) 设 d 为点 Q 到直线 AB 的距离,

所以 $\triangle BNQ$ 的面积 $S = 2S_{\triangle BAQ} = 2 \times \frac{1}{2} \times |AB|d = \sqrt{5}d$

显然当过点 Q 且与直线 AB 平行的直线 l' 与椭圆相切时 d 取得最大值,

因为 $A(2,0), B(0,1)$, 所以 $k_{AB} = -\frac{1}{2}$, 设直线 l' 的方程为 $y = -\frac{1}{2}x + m (m < 0)$, 即 $x + 2y - 2m = 0$,

由 $\begin{cases} x + 2y - 2m = 0 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$, 整理得 $x^2 - 2mx + 2m^2 - 2 = 0$,

由 $\Delta = 4m^2 - 4(2m^2 - 2) = 0$, 解得 $m = -\sqrt{2}$ (正值舍去),

所以直线 l' 的方程为 $x + 2y + 2\sqrt{2} = 0$, 又 A 到直线 l' 的距离 $d_1 = \frac{|2 + 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$,

所以 d 的最大值为 $\frac{2 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$,

则 $S_{\max} = \sqrt{5} \times \frac{2 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 2 + 2\sqrt{2}$;

(ii) 设 $M(x, 0) (-2 < x < 0)$, 则 $N(4 - x, 0)$,

所以 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{x}{-x} + \frac{4-x}{-1} = -4$,

又直线 BN 的方程为 $y = k_2x + 1$, 由 $\begin{cases} y = k_2x + 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$, 整理得 $(4k_2^2 + 1)x^2 + 8k_2x = 0$,

所以 $x_P = \frac{-8k_2}{4k_2^2 + 1}$, 则 $y_P = k_2x_P + 1 = k_2\left(\frac{-8k_2}{4k_2^2 + 1}\right) + 1 = \frac{-8k_2^2}{4k_2^2 + 1} + 1$,

即 $P\left(\frac{-8k_2}{4k_2^2 + 1}, \frac{-8k_2^2}{4k_2^2 + 1} + 1\right)$, 同理可得 $Q\left(\frac{-8k_1}{4k_1^2 + 1}, \frac{-8k_1^2}{4k_1^2 + 1} + 1\right)$,

所以 $k_3 + k_4 = \frac{4k_1^2 - 1}{8k_1^2 + 8k_1 + 2} + \frac{4k_2^2 - 1}{8k_2^2 + 8k_2 + 2}$

$= \frac{(4k_1^2 - 1)(8k_2^2 + 8k_2 + 2) + (4k_2^2 - 1)(8k_1^2 + 8k_1 + 2)}{(8k_1^2 + 8k_1 + 2)(8k_2^2 + 8k_2 + 2)}$

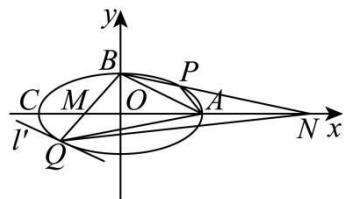
$= \frac{64k_1^2k_2^2 + 32k_1k_2^2 + 32k_2k_1^2 - 8k_2 - 8k_1 - 4}{64k_1^2k_2^2 + 64k_1k_2^2 + 64k_2k_1^2 + 16k_2^2 + 16k_1^2 + 64k_1k_2 + 16k_2 + 16k_1 + 4}$,

因为 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = -4$, 所以 $-4k_1k_2 = k_2 + k_1$, 则 $16k_1^2k_2^2 - 2k_1k_2 = k_2^2 + k_1^2$,

所以 $k_3 + k_4 = \frac{64k_1^2k_2^2 + 32k_1k_2^2 + 32k_2k_1^2 - 8k_2 - 8k_1 - 4}{64k_1^2k_2^2 + 64k_1k_2^2 + 64k_2k_1^2 + 16k_2^2 + 16k_1^2 + 64k_1k_2 + 16k_2 + 16k_1 + 4}$

$= \frac{-64k_1^2k_2^2 + 32k_1k_2 - 4}{64k_1^2k_2^2 - 32k_1k_2 + 4} = -1$,

所以 $\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)(k_3 + k_4) = 4$.



题型五 长度、角度、面积的定值问题

【技巧通法·提分快招】

角度关系的证明往往转化为斜率问题或坐标问题, 其中角相等问题优先考虑转为斜率之和为零处理, 或考虑用向量进行计算。

23. (2025·四川南充·模拟预测) 已知 F', F 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点, 点 $A(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 且 $\triangle AFF'$ 的面积为 $\frac{3}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过点 $T(4, 0)$ 的直线 l 与线段 AF 相交于 S , 与椭圆交于 P, Q 两点, 证明: $\angle PFS = \angle QFS$.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 证明见解析.

【分析】(1) 根据给定条件, 列式求出 a, b, c 即可.

(2) 设出直线 l 的方程, 与椭圆方程联立, 利用韦达定理及斜率坐标公式计算推理得证.

【详解】(1) 设椭圆 C 的半焦距为 c , 由 $\triangle AFF'$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 得 $\frac{1}{2} \cdot 2c \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, 解得 $c = 1$,

由点 $A(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 得 $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$, 而 $a^2 = b^2 + 1$, 解得 $a^2 = 4, b^2 = 3$,

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 依题意, 直线 l 不垂直于 y 轴, 设直线 l 的方程为 $x = ty + 4$, $Q(x_1, y_1), P(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} x = ty + 4 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 消去 x 并整理得 $(3t^2 + 4)y^2 + 24ty + 36 = 0$,

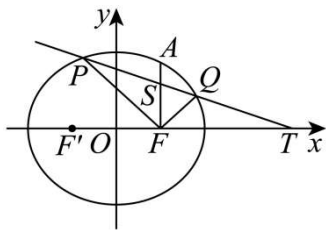
$\Delta = 576t^2 - 144(3t^2 + 4) = 144(t^2 - 4) > 0$, 又直线 l 与线段 AF 交于 S 点, 则 $t < -2$,

$y_1 + y_2 = -\frac{24t}{3t^2 + 4}$, $y_1 y_2 = \frac{36}{3t^2 + 4}$, 于是 $2ty_1 y_2 + 3(y_1 + y_2) = 0$,

直线 QF, PF 的斜率分别为 k_{QF}, k_{PF} , $k_{QF} + k_{PF} = \frac{y_1}{x_1 - 1} + \frac{y_2}{x_2 - 1} = \frac{y_1}{ty_1 + 3} + \frac{y_2}{ty_2 + 3}$

$= \frac{2ty_1 y_2 + 3(y_1 + y_2)}{(ty_1 + 3)(ty_2 + 3)} = 0$, 则 $\angle PFO = \angle QFT$, 而 $AF \perp OT$,

所以 $\angle PFS = \angle QFS$.



24. (2025·重庆·模拟预测) 已知焦点在 x 轴上的椭圆 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $M(\sqrt{2}, 1)$, A, B 为椭圆 E 的左、右顶点, $\triangle PAB$ 的周长为 $4\sqrt{2} + 4$, 记动点 P 的轨迹为 Ω .

(1) 求曲线 Ω 的方程;

(2) 过点 M 作椭圆 E 的切线交曲线 Ω 于 T, S 两点 (含 $y = 0$ 情况), 记 $\triangle ATM, \triangle AMS$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 (y \neq 0)$;

(2)1.

【分析】(1) 根据离心率、点在椭圆上求得 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, 再由已知得 $|PA| + |PB| = 4\sqrt{2} > 4$, 根据椭圆的定义求动点 P 的轨迹;

(2) 设直线 $TS: y - 1 = k(x - \sqrt{2})$, $T(x_1, y_1), S(x_2, y_2)$, 联立 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 并结合 $\Delta = 0$, 求得 $k = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, 再联立 $\Omega: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 (y \neq 0)$ 易得 $x_1 + x_2 = 2\sqrt{2}$, 从而 M 为 TS 的中点, 即可得.

【详解】(1) 令 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $a^2 = b^2 + c^2$ 且 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 2 \end{cases}$,

所以 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, 又 $\triangle PAB$ 的周长为 $4\sqrt{2} + 4$, 且 P 不在 x 轴上,

所以 $|PA| + |PB| + |AB| = |PA| + |PB| + 4 = 4\sqrt{2} + 4$, 可得 $|PA| + |PB| = 4\sqrt{2} > 4$,

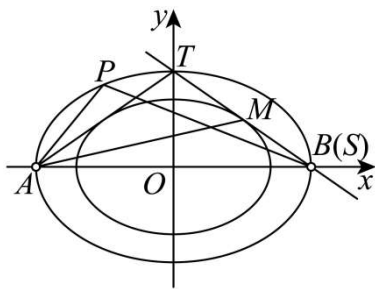
所以动点 P 的轨迹为长轴长为 $4\sqrt{2}$, 焦距为 4, 则 $\Omega: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 (y \neq 0)$;

(2) 设直线 $TS: y - 1 = k(x - \sqrt{2})$, $T(x_1, y_1), S(x_2, y_2)$, 联立 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$,

整理得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4k(1 - \sqrt{2}k)x + 2(1 - \sqrt{2}k)^2 - 4 = 0$,

由 $\Delta = 16k^2(1 - \sqrt{2}k)^2 - 4(1 + 2k^2)[2(1 - \sqrt{2}k)^2 - 4] = 0$, 可得 $(1 - \sqrt{2}k)^2 - 2 - 4k^2 = 0$,

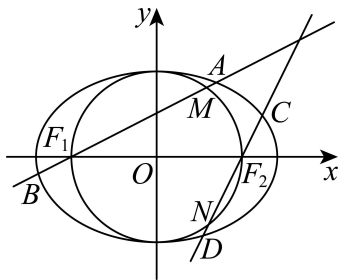
所以 $2k^2 + 2\sqrt{2}k + 1 = (\sqrt{2}k + 1)^2 = 0$, 可得 $k = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, 则 $TS: y = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x$,



联立 $\Omega: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, 可得 $x^2 + 2\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 = 8$, 可得 $x^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}x = 0$,

所以 $x_1 + x_2 = 2\sqrt{2}$, 从而 M 为 TS 的中点, 则 $\frac{S_1}{S_2} = 1$.

25. 如图, F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点, M, N 是以 F_1F_2 为直径的圆上关于 x 轴对称的两个动点.



(1) 设直线 MF_1, NF_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求 k_1k_2 .

(2) 直线 MF_1 和 NF_2 与椭圆的交点分别为 A, B 和 C, D . 问: 是否存在实数 λ , 使得 $\lambda(|AB| + |CD|) = |AB| \cdot |CD|$ 恒成立? 若存在, 求实数 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1)1

(2) 是, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

【分析】(1) 根据 F_1F_2 是椭圆的左、右焦点, 可得 F_1F_2 为直径的圆的方程, 再求出直线 MF_1, NF_2 的斜率, 即可求得 k_1k_2 的值;

(2) 设直线 MF_1 和 NF_2 的方程代入椭圆方程, 分别求得 $|AB|, |CD|$, 利用 $\lambda(|AB|+|CD|)=|AB|\cdot|CD|$, 可得 $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}$, 由此可求实数 λ 的值.

【详解】(1) 由椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 知 $|F_1F_2|=2, F_1(-1,0), F_2(1,0)$,

故以 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=1$.

设 $M(x_0, y_0)$, 则 $N(x_0, -y_0)$, 且 $x_0^2+y_0^2=1$.

所以直线 MF_1 的斜率 $k_1=\frac{y_0}{x_0+1}$, 直线 NF_2 的斜率 $k_2=\frac{-y_0}{x_0-1}$,

故 $k_1k_2=\frac{y_0}{x_0+1}\cdot\frac{-y_0}{x_0-1}=\frac{-y_0^2}{x_0^2-1}=1$.

(2) 存在实数 λ , 使得 $\lambda(|AB|+|CD|)=|AB|\cdot|CD|$ 恒成立.

设直线 MF_1 的方程为 $y=k_1(x+1)$, 直线 NF_2 的方程为 $y=k_2(x-1)$.

将 $y=k_1(x+1)$ 代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$, 整理得 $(1+2k_1^2)x^2+4k_1^2x+2k_1^2-2=0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{-4k_1^2}{1+2k_1^2}, x_1x_2=\frac{2k_1^2-2}{1+2k_1^2}$.

所以 $|AB|=\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{2}(1+k_1^2)}{1+2k_1^2}$.

同理 $|CD|=\frac{2\sqrt{2}(1+k_2^2)}{1+2k_2^2}=\frac{2\sqrt{2}(k_1^2+1)}{k_1^2+2}$.

由 $\lambda(|AB|+|CD|)=|AB|\cdot|CD|$,

得 $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{1+2k_1^2}{2\sqrt{2}(1+k_1^2)}+\frac{2+k_1^2}{2\sqrt{2}(1+k_1^2)}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

所以, 所求实数 λ 的值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

26. 过坐标原点 O 作圆 $C:(x+3)^2+y^2=6$ 的两条切线, 切点为 M, N , 直线 MN 恰为抛物线 $T:y^2=2px(p>0)$ 的准线.

(1) 求 T 的方程;

(2) 将抛物线 T 向左移 4 个单位长度得到新抛物线 Γ , 抛物线 Γ 交 y 轴于 A, B 两点, E, Q 为抛物线上不重合的两点, AE 交 BQ 于点 Z . 若直线 EQ 经过坐标原点, 求证: $\triangle ABZ$ 的面积恒为定值.

【答案】(1) $y^2=4x$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 设直线 MN 与 x 轴交于 $G(-\frac{p}{2}, 0)$, 由三角形相似关系可得 $|NC|^2=|CG|\cdot|OC|$, 由此可构造方程求得 p 的值, 从而得到抛物线方程;

(2) 解法一: 求得 $\Gamma:y^2=4x+16$, 设 $E(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), Z(x_z, y_z)$, 则 $EQ:y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1), BQ:y=$

$\frac{y_2-4}{x_2}x+4$, $AE:y=\frac{y_1+4}{x_1}x-4$, 直线 EQ 经过坐标原点得 $y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}x_1$, E, Q 在抛物线上得 $y_1y_2=-16$, 直线 BQ 与直线 AE 联立方程计算可得 $x_Z=-8$, 计算即可得证 $\triangle ABZ$ 的面积恒为定值; 解法二: 直线 EQ 为 $y=kx(k \neq 0)$, 直线 AE 方程为 $y=nx-4$, 设直线 BQ 方程为 $y=mx+4$, 点 E 和 Q 是直线 EQ 与抛物线 Γ 的交点结合韦达定理可得 $x_E+x_Q=\frac{4}{k^2}$, $x_Ex_Q=-\frac{16}{k^2}$, 点 E 在直线 AE 上得 $n=\frac{kx_E+4}{x_E}$, 点 Q 在直线 BQ 上得 $m=\frac{kx_Q-4}{x_Q}$, 直线 BQ 与直线 AE 联立得 $x_Z=8(n-m)$, 计算可得 $x_Z=-8$, 计算即可得证 $\triangle ABZ$ 的面积恒为定值.

【详解】(1) 设直线 MN 与 x 轴交于 $G(-\frac{p}{2}, 0)$, 由几何性质得

因为直线 MN 为抛物线 T 的准线, 直线 ON 为圆 C 的切线,

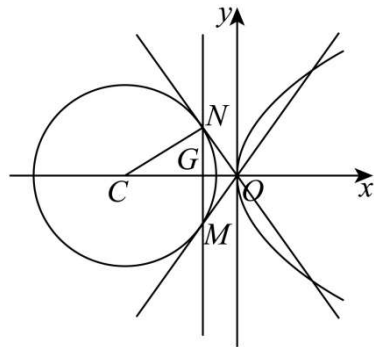
所以 $\angle NGC = \angle CNO = \frac{\pi}{2}$,

在 $\triangle NGC$ 与 $\triangle CNO$ 中, $\angle NCO$ 为公共角,

所以 $\triangle NGC \sim \triangle CNO$, $\frac{|NC|}{|CG|} = \frac{|OC|}{|NC|}$,

即 $|NC|^2 = |CG| \cdot |OC|$, 即 $6 = 3(-\frac{p}{2} + 3)$, 解得: $p = 2$

故抛物线 T 的标准方程为 $y^2 = 4x$;



(2) 解法一: 依题意: $\Gamma: y^2 = 4x + 16$, 则 $A(0, -4), B(0, 4)$, 设 $E(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), Z(x_Z, y_Z)$,

则 $EQ: y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$, $BQ: y = \frac{y_2 - 4}{x_2}x + 4$, $AE: y = \frac{y_1 + 4}{x_1}x - 4$,

因为直线 EQ 经过坐标原点, 所以 $0 - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(0 - x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x_1$,

又 E, Q 在抛物线上, $y_1^2 = 4x_1 + 16, y_2^2 = 4x_2 + 16$, 两式作差得 $y_1^2 - y_2^2 = 4(x_1 - x_2)$, 化简得 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4}{y_1 + y_2}$,

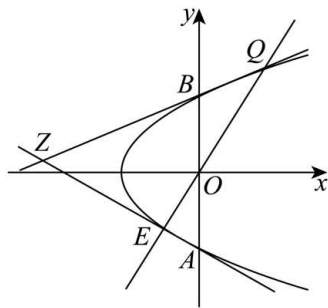
因为 $4x_1 = y_1^2 - 16$, 所以 $y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x_1 = \frac{4x_1}{y_1 + y_2} = \frac{y_1^2 - 16}{y_1 + y_2}$,

化简可得 $y_1^2 + y_1y_2 = y_1^2 - 16$, 即 $y_1y_2 = -16$,

$$\begin{aligned} \text{联立} \begin{cases} y = \frac{y_2 - 4}{x_2}x + 4 \\ y = \frac{y_1 + 4}{x_1}x - 4 \end{cases}, \text{得: } x_Z &= \frac{8}{\frac{y_1 + 4}{x_1} - \frac{y_2 - 4}{x_2}} = \frac{8x_1x_2}{x_2(y_1 + 4) - x_1(y_2 - 4)} \\ &= \frac{8x_1x_2}{(\frac{y_2^2}{4} - 4)(y_1 + 4) - (\frac{y_1^2}{4} - 4)(y_2 - 4)} = \frac{8(\frac{y_1^2}{4} - 4)(\frac{y_2^2}{4} - 4)}{(\frac{y_2^2}{4} - 4)(y_1 + 4) - (\frac{y_1^2}{4} - 4)(y_2 - 4)} \\ &= \frac{8(\frac{y_1^2y_2^2}{16} - y_1^2 - y_2^2 + 16)}{8[\frac{(y_1y_2)^2}{16} - y_1^2 - y_2^2 + 16]} \\ &= \frac{\frac{y_2^2y_1}{4} + y_2^2 - 4y_1 - 16 - \frac{y_1^2y_2}{4} + y_1^2 + 4y_2 - 16}{\frac{y_1y_2(y_2 - y_1)}{4} + y_1^2 + y_2^2 + 4(y_2 - y_1) - 32}, \end{aligned}$$

将 $y_1y_2 = -16$ 代入得, $x_Z = \frac{8(32 - y_1^2 - y_2^2)}{y_2^2 + y_1^2 - 32} = \frac{-8(y_1^2 + y_2^2 - 32)}{y_2^2 + y_1^2 - 32} = -8$ 为定值.

故 $S_{\triangle ABZ} = \frac{1}{2} \times |AB| \times |x_Z| = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$.



解法二:向左平移4个单位后,新抛物线为 $\Gamma:y^2=4x+16$,

则 Γ 与 y 轴的交点为 $A(0,-4),B(0,4)$,

因为直线 EQ 经过原点,所以设其方程为 $EQ:y=kx(k\neq 0)$,

设直线 AE 方程为 $AE:y=nx-4$,设直线 BQ 方程为 $BQ:y=mx+4$,

点 E 和 Q 是直线 EQ 与抛物线 Γ 的交点,代入 $y=kx(k\neq 0)$ 中得:

$$k^2x^2=4x+16\Rightarrow k^2x^2-4x-16=0,$$

$$\text{设该方程的两根为 } x_E \text{ 和 } x_Q, \text{ 根据韦达定理: } x_E+x_Q=\frac{4}{k^2}, x_Ex_Q=-\frac{16}{k^2} \quad ①$$

$$\text{点 } E \text{ 在直线 } AE \text{ 上, 满足: } kx_E=nx_E-4\Rightarrow n=\frac{kx_E+4}{x_E} \quad ②$$

$$\text{点 } Q \text{ 在直线 } BQ \text{ 上, 满足: } kx_Q=mx_Q+4\Rightarrow m=\frac{kx_Q-4}{x_Q} \quad ③$$

$$\text{联立方程: } nx-4=mx+4\Rightarrow x_Z(n-m)=8\Rightarrow x_Z=\frac{8}{n-m}$$

$$\text{由 } ② \text{ 和 } ③ \text{ 得: } n-m=\frac{kx_E+4}{x_E}-\frac{kx_Q-4}{x_Q}=\frac{x_Q(kx_E+4)-x_E(kx_Q-4)}{x_Ex_Q}=\frac{4(x_E+x_Q)}{x_Ex_Q},$$

$$\text{利用 } ① \text{ 中的韦达定理结果: } n-m=\frac{4(x_E+x_Q)}{x_Ex_Q}=\frac{\frac{16}{k^2}}{-\frac{16}{k^2}}=-1,$$

$$\text{所以 } x_Z=\frac{8}{n-m}=\frac{8}{-1}=-8, \text{ 即点 } Z \text{ 的横坐标恒为 } -8,$$

$$\text{故 } S_{\triangle ABZ}=\frac{1}{2}\times|AB|\times|x_Z|=\frac{1}{2}\times 8\times 8=32.$$

27. (2025·河南南阳·模拟预测) 已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的两条渐近线分别为 $l_1:y=\sqrt{3}x, l_2:y=-\sqrt{3}x$,若点 A, B 分别在 l_1, l_2 上(A, B 不同于原点 O),且直线 AB 是 C 的切线,则称 $\triangle OAB$ 是 C 的“渐切三角形”. 已知 C 在点 (s, t) 处的切线方程为 $sx-\frac{ty}{b^2}=1$.

(1) 写出 C 的一个“渐切三角形”的顶点 A, B 的坐标及切线 AB 的方程,并求出其面积;

(2) 已知点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)(x_1x_2>0)$ 分别在 l_1, l_2 上, $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{3}$,试问 $\triangle OAB$ 是否是 C 的“渐切三角形”? 并说明理由;

(3) 若 $\triangle OAB$ 是 C 的“渐切三角形”, AB 与 C 相切的切点 M 的横坐标大于0, F 为 C 的左焦点,证明:

$\angle AFB$ 为定值.

【答案】(1) $A(1, \sqrt{3}), B(1, -\sqrt{3}), AB:x=1, S_{\triangle OAB}=\sqrt{3}$ (答案不唯一);

(2) 是,理由见解析;

(3) 证明过程见解析.

【分析】(1) 先根据渐近线方程得出 b ,再取切点为 $(1, 0)$ 即可根据条件求出;

(2) 分直线 AB 斜率不存在,和斜率存在两种情况讨论,设直线 AB 方程,联立方程组,求 $|AB|$,进而利用 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{3}$,即可发现直线 AB 与曲线相切;

(3) 切点为 $(1, 0)$ 容易求出 $\angle AFB=\frac{\pi}{3}$,切点不为 $(1, 0)$ 时,先根据直线 AB 与曲线 C 相切得出 $3s^2-t^2=3$,再将直线 AB 与 $x^2-\frac{y^2}{3}=0$ 联立得出韦达定理,进而求出 $k_{AF}-k_{BF}, k_{AF}k_{BF}$,即可求出 $\tan\angle AFB=$

$\frac{k_{AF}-k_{BF}}{1+k_{AF}k_{BF}}$, 进而得出 $\angle AFB$ 为定值.

【详解】(1) 由题意可得, 双曲线的渐近线方程为 $y=\pm bx, b>0$, 故 $b=\sqrt{3}$,

则 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 且 C 在点 (s, t) 处的切线方程为 $sx - \frac{ty}{3} = 1$,

不妨取切点为 $(1, 0)$, 则切线方程为 $x=1$, 此时 $A(1, \sqrt{3}), B(1, -\sqrt{3})$,

则 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

(2) 若直线 AB 斜率不存在, 不妨设 $AB: x=m$, 则 $A(m, \sqrt{3}m), B(m, -\sqrt{3}m)$,

则 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times |m| \times 2\sqrt{3}|m| = \sqrt{3}m^2 = \sqrt{3}$, 得 $m=\pm 1$,

此时直线 $AB: x=\pm 1$ 与曲线 C 相切, 即 $\triangle OAB$ 是 C 的“渐切三角形”,

若直线 AB 斜率存在, 设 $AB: y=kx+m$,

联立 $\begin{cases} y=kx+m \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 0 \end{cases}$, 得 $(3-k^2)x^2 - 2kmx - m^2 = 0$,

则 $k^2 \neq 3, x_1+x_2 = \frac{2km}{3-k^2}, x_1x_2 = -\frac{m^2}{3-k^2} > 0$, 即 $k^2 > 3$,

则 $|AB| = \sqrt{1+k^2}|x_1-x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{2km}{3-k^2}\right)^2 + \frac{4m^2}{3-k^2}} = \sqrt{\frac{12m^2(1+k^2)}{(3-k^2)^2}}$,

又点 O 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$,

则 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |AB|d = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{12m^2(1+k^2)}{(3-k^2)^2}} \times \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{3}m^2}{k^2-3} = \sqrt{3}$,

得 $k^2 - m^2 = 3$,

联立 $\begin{cases} y=kx+m \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 得 $(3-k^2)x^2 - 2kmx - m^2 - 3 = 0$,

则 $\Delta = 4k^2m^2 + 4(3-k^2)(m^2+3) = 12(m^2-k^2+3) = 0$,

则直线 AB 与曲线 C 相切, 即 $\triangle OAB$ 是 C 的“渐切三角形”,

综上可得, 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $\triangle OAB$ 是 C 的“渐切三角形”.

(3) 若切点为 $(1, 0)$ 时, 直线 AB 的方程为 $x=1$, 此时 $A(1, \sqrt{3}), B(1, -\sqrt{3})$,

因 $F(-2, 0)$, 则 $\tan \angle AFO = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $\angle AFO = \frac{\pi}{6}$,

利用对称性可知 $\angle AFB = \frac{\pi}{3}$;

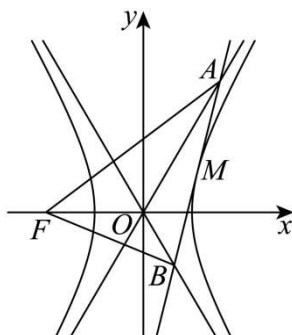
若切点不为 $(1, 0)$, 可设切点为 $(s, t), s>0, t \neq 0$, 则直线 $l_{AB}: sx - \frac{ty}{3} = 1$,

联立 $\begin{cases} sx - \frac{ty}{3} = 1 \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 得 $(t^2-3s^2)x^2 + 6sx - 3-t^2 = 0$,

则 $t^2-3s^2 \neq 0$, 由 $\Delta = (6s)^2 + 4(t^2-3s^2)(3+t^2) = 0$, 可得 $3s^2 - t^2 = 3$,

联立 $\begin{cases} sx - \frac{ty}{3} = 1 \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 0 \end{cases}$, 得 $(t^2-3s^2)x^2 + 6sx - 3 = 0$, 即 $x^2 - 2sx + 1 = 0$,

设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (x_1x_2 > 0)$, 则 $x_1+x_2 = 2s, x_1x_2 = 1$,



$$\text{则 } |x_1 - x_2| = \sqrt{4s^2 - 4} = \frac{2|t|}{\sqrt{3}},$$

$$y_1 y_2 = \frac{3sx_1 - 3}{t} \cdot \frac{3sx_2 - 3}{t} = \frac{9s^2 x_1 x_2 - 9s(x_1 + x_2) + 9}{t^2} = \frac{-9s^2 + 9}{t^2} = -3,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } k_{AF} - k_{BF} &= \frac{y_1}{x_1 + 2} - \frac{y_2}{x_2 + 2} = \frac{y_1(x_2 + 2) - y_2(x_1 + 2)}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} \\ &= \frac{3}{t} \cdot \frac{(sx_1 - 1)(x_2 + 2) - (sx_2 - 1)(x_1 + 2)}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{3}{t} \cdot \frac{(2s + 1)(x_1 - x_2)}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} \\ &= \frac{3}{t} \cdot \frac{(2s + 1)(x_1 - x_2)}{4s + 5} = \frac{3(2s + 1)}{4s + 5} \cdot \left| \frac{x_1 - x_2}{t} \right| = \frac{3(2s + 1)}{4s + 5} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(2s + 1)}{4s + 5}, \end{aligned}$$

(说明:由图知, $x_1 - x_2$ 与 t 始终同号,故 $\frac{x_1 - x_2}{t} = \left| \frac{x_1 - x_2}{t} \right|$ 成立)

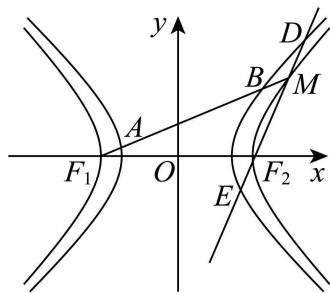
$$k_{AF} k_{BF} = \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 + 2} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{-3}{4s + 5},$$

$$\text{则 } \tan \angle AFB = \tan(\angle AFO + \angle BFO) = \frac{\tan \angle AFO + \tan \angle BFO}{1 - \tan \angle AFO \cdot \tan \angle BFO}$$

$$= \frac{k_{AF} - k_{BF}}{1 + k_{AF} k_{BF}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}(2s + 1)}{4s + 5}}{1 + \frac{-3}{4s + 5}} = \sqrt{3},$$

因 $0 < \angle AFB < \pi$, 则 $\angle AFB = \frac{\pi}{3}$, 故 $\angle AFB$ 为定值.

28. (2024·湖南长沙·二模) 如图, 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点 F_1, F_2 分别为双曲线 $C_2: \frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{4b^2} = 1$ 的左、右顶点, 过点 F_1 的直线分别交双曲线 C_1 的左、右两支于 A, B 两点, 交双曲线 C_2 的右支于点 M (与点 F_2 不重合), 且 $\triangle BF_1 F_2$ 与 $\triangle ABF_2$ 的周长之差为 2.



(1) 求双曲线 C_1 的方程;

(2) 若直线 MF_2 交双曲线 C_1 的右支于 D, E 两点.

① 记直线 AB 的斜率为 k_1 , 直线 DE 的斜率为 k_2 , 求 $k_1 k_2$ 的值;

② 试探究: $|DE| - |AB|$ 是否为定值? 并说明理由.

【答案】(1) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

(2) ① 3; ② $|DE| - |AB|$ 为定值 4, 理由见解析

【分析】(1) 设 $|F_1 F_2| = 2c$, 根据题意, 得到 $2c - 2a = 2$, 且 $c = 2a$, 联立方程组, 求得 a, b, c 的值, 即可求解;

(2) ① 设 $M(x_0, y_0)$, 求得 $y_0^2 = 3(x_0^2 - 4)$, 结合 $k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0^2}{x_0^2 - 4}$, 即可求解;

② 由 (1) 得直线 AB 的方程为 $y = k_1(x + 2)$, 联立方程组, 得到 $x_1 + x_2, x_1 x_2$, 结合弦长公式, 求得 $|AB| =$

$\frac{6(1+k_1^2)}{3-k_1^2}$ 和 $|DE| = \frac{2(9+k_1^2)}{3-k_1^2}$, 进而化简得到 $|DE| - |AB|$ 为定值.

【详解】(1) 解: 设 $|F_1F_2| = 2c$, 因为 $\triangle BF_1F_2$ 与 $\triangle ABF_2$ 的周长之差为 2, 所以 $|BF_1| + |F_1F_2| - |AB| - |AF_2| = 2$, 即 $2c - 2a = 2$,

又因为 F_1, F_2 分别为双曲线 $C_2: \frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{4b^2} = 1$ 的左、右顶点, 所以 $c = 2a$,

联立方程组 $\begin{cases} c-a=1 \\ c=2a \end{cases}$, 解得 $a=1, c=2$, 所以 $b^2 = c^2 - a^2 = 1$,

故双曲线 C_1 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 解: ① 由 (1) 知, 双曲线 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1, F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$,

设 $M(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{12} = 1$, 可得 $y_0^2 = 3(x_0^2 - 4)$,

则 $k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0}{x_0+2} \cdot \frac{y_0}{x_0-2} = \frac{y_0^2}{x_0^2-4} = 3$.

② $|DE| - |AB|$ 为定值 4.

理由如下:

由 (1) 得直线 AB 的方程为 $y = k_1(x+2)$,

联立方程组 $\begin{cases} y=k_1(x+2) \\ x^2-\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$, 整理得 $(3-k_1^2)x^2 - 4k_1^2x - 4k_1^2 - 3 = 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{4k_1^2}{3-k_1^2}, x_1x_2 = \frac{-4k_1^2-3}{3-k_1^2}$,

因为 A, B 位于双曲线的左、右两支, 所以 $x_1x_2 = \frac{-4k_1^2-3}{3-k_1^2} < 0$, 即 $k_1^2 < 3$,

可得 $|AB| = \sqrt{(1+k_1^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \sqrt{\frac{36(1+k_1^2)^2}{(3-k_1^2)^2}} = \frac{6(1+k_1^2)}{3-k_1^2}$,

又因为 $k_1 \cdot k_2 = 3$, 所以直线 DE 的方程为 $y = \frac{3}{k_1}(x-2)$,

根据双曲线的对称性, 同理可得 $|DE| = \frac{6[1+(\frac{3}{k_1})^2]}{|3-(\frac{3}{k_1})^2|} = \frac{2(9+k_1^2)}{3-k_1^2}$,

所以 $|DE| - |AB| = \frac{2(9+k_1^2)}{3-k_1^2} - \frac{6(1+k_1^2)}{3-k_1^2} = 4$, 故 $|DE| - |AB|$ 为定值 4.

题型六 非对称韦达化处理

29. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, M, N 分别为左右顶点, 直

线 $l: x = ty + 1$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 当 $t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, A 是椭圆的上顶点, 且 $\triangle AF_1F_2$ 的周长为 6.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 AM, BN 交于点 Q , 证明: 点 Q 在定直线上.

(3) 设直线 AM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 证明见解析;

(3) 证明见解析.

【分析】(1) 根据给定条件, 求出椭圆上顶点坐标, 再结合 $a^2 - c^2 = b^2$ 即可求解作答.

(2) 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立直线 l 与椭圆 C 的方程, 求出直线 AM, AN 的方程, 再联立求出交点 Q 的横坐标即可作答.

(3) 利用 (2) 中信息, 直接计算 $\frac{k_1}{k_2}$ 即可作答.

【详解】(1) 当 $t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 直线 $l: x = -\frac{\sqrt{3}}{3}y + 1$, 令 $x = 0$, 得 $y = \sqrt{3}$, 即椭圆的上顶点为 $(0, \sqrt{3})$, 则 $b = \sqrt{3}$,

又 $\triangle AF_1F_2$ 的周长为 6, 即 $2a + 2c = 6$, $a + c = 3$, 又 $a^2 - c^2 = b^2 = 3$, 解得 $a = 2, c = 1$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由 (1) 知, $M(-2, 0), N(2, 0)$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 依题意, 点 A, B 不在 x 轴上,

由 $\begin{cases} x = ty + 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 消去 x 并整理得: $(3t^2 + 4)y^2 + 6ty - 9 = 0$, $\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{6t}{3t^2 + 4} \\ y_1y_2 = \frac{-9}{3t^2 + 4} \end{cases}$,

直线 AM 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$, 直线 BN 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$,

联立直线 AM, BN 的方程得 $\frac{x + 2}{x - 2} = \frac{y_2(x_1 + 2)}{y_1(x_2 - 2)} = \frac{y_2(ty_1 + 3)}{y_1(ty_2 - 1)} = \frac{ty_1y_2 + 3y_2}{ty_1y_2 - y_1}$,

由 $y_1 + y_2 = -\frac{6t}{3t^2 + 4}$ 得 $y_1 = -\frac{6t}{3t^2 + 4} - y_2$ 代入上式, 得

$\frac{x + 2}{x - 2} = \frac{ty_1y_2 + 3y_2}{ty_1y_2 - y_1} = \frac{\frac{-9t}{3t^2 + 4} + 3y_2}{\frac{-9t}{3t^2 + 4} + \frac{6t}{3t^2 + 4} + y_2} = \frac{\frac{-9t}{3t^2 + 4} + 3y_2}{\frac{-3t}{3t^2 + 4} + y_2} = 3$, 于是得 $x = 4$,

所以直线 AM, BN 交点 Q 在定直线 $x = 4$ 上.

(3) 由 (2) 知, $\frac{k_1}{k_2} = \frac{y_1(x_2 - 2)}{y_2(x_1 + 2)} = \frac{y_1(ty_2 - 1)}{y_2(ty_1 + 3)} = \frac{ty_1y_2 - y_1}{ty_1y_2 + 3y_2}$, 由 $y_1 + y_2 = -\frac{6t}{3t^2 + 4}, y_1y_2 = \frac{-9}{3t^2 + 4}$ 得: $ty_1y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2)$,

所以 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{ty_1y_2 - y_1}{ty_1y_2 + 3y_2} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1 + \frac{9}{2}y_2} = \frac{1}{3}$ 为定值.

【点睛】思路点睛: 涉及动直线与圆锥曲线相交满足某个条件问题, 可设出直线方程, 再与圆锥曲线方程联立, 利用韦达定理并结合已知推理求解.

30. 已知 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$ 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, P 是椭圆 C 上的一点, 当 $PF_1 \perp F_1F_2$ 时, $|PF_2| = 2|PF_1|$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过点 $Q(-4, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 点 M 关于 x 轴的对称点为点 M' , 证明: 直线 NM'

过定点.

【答案】(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$; (2) 直线 NM' 过定点 $(-\frac{9}{4}, 0)$.

【分析】(1) 由椭圆的定义和已知条件得 $|PF_1| + 2|PF_1| = 2a$, $|PF_1| = \frac{2}{3}a$, 又由 $PF_1 \perp F_1F_2$ 可得出点 P 的坐标, 代入椭圆的标准方程中可解出 a, b , 从而得出椭圆的标准方程;

(2) 设出直线 l 的方程, 点 M, N 的坐标, 直线 l 的方程与椭圆的方程联立可得点 M, N 的坐标的关系, 再表示出直线 NM' 的方程, 将点 M, N 的坐标的关系代入可得直线 NM' 所过的定点.

【详解】(1) 由 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$ 得 $c = \sqrt{3}$, $\therefore a^2 = b^2 + (\sqrt{3})^2 = b^2 + 3$,

由椭圆的定义得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, $\therefore |PF_2| = 2|PF_1|$, $\therefore |PF_1| + 2|PF_1| = 2a$, $|PF_1| = \frac{2}{3}a$,

$\therefore PF_1 \perp F_1F_2$, 所以点 P 的坐标为 $(-\sqrt{3}, \pm \frac{2}{3}a)$,

将点 P 的坐标代入椭圆的方程中有 $\frac{(-\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{(\pm \frac{2}{3}a)^2}{b^2} = 1$,

又 $\therefore a^2 = b^2 + 3, b^2 = a^2 - 3$, $\therefore \frac{(-\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{(\pm \frac{2}{3}a)^2}{a^2 - 3} = 1$,

解得 $a^2 = 9$ 或 $a^2 = \frac{9}{5}$,

当 $a^2 = \frac{9}{5}$, $b^2 = a^2 - 3 = -\frac{6}{5} < 0$, 故舍去;

当 $a^2 = 9$, $b^2 = a^2 - 3 = 9 - 3 = 6$,

所以椭圆的标准方程为: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$.

(2) 由题意可知, 直线 l 的斜率必然存在, 故设直线 l 的方程为 $y = k(x + 4)$, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $M'(x_1, -y_1)$,

联立方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1 \\ y = k(x + 4) \end{cases}$, 得 $(3k^2 + 2)x^2 + 24k^2x + 48k^2 - 18 = 0$, $\Delta = (24k^2)^2 - 4(3k^2 + 2)(48k^2 - 18) = -168k^2 + 144 > 0$,

解得 $k^2 < \frac{6}{7}$, $x_1 + x_2 = -\frac{24k^2}{3k^2 + 2}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{48k^2 - 18}{3k^2 + 2}$,

又 $N(x_2, y_2), M'(x_1, -y_1)$, 设直线 NM' 的方程为 $y - y_2 = \frac{y_2 - (-y_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2) = \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$,

$\therefore y = \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}x_2 + y_2 = \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{y_2x_2 + y_1x_2}{x_2 - x_1} + \frac{y_2x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{y_1x_2 + y_2x_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{k(x_2 + 4) + k(x_1 + 4)}{x_2 - x_1}x - \frac{k(x_1 + 4) \cdot x_2 + k(x_2 + 4) \cdot x_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{k(x_1 + x_2) + 8k}{x_2 - x_1}x - \frac{2kx_1x_2 + 4k(x_1 + x_2)}{x_2 - x_1}$

$= \frac{k \cdot (-\frac{24k^2}{3k^2 + 2}) + 8k}{x_2 - x_1}x - \frac{2k \frac{48k^2 - 18}{3k^2 + 2} + 4k \cdot (-\frac{24k^2}{3k^2 + 2})}{x_2 - x_1}$

$= \frac{16k}{(x_2 - x_1)(3k^2 + 2)}x + \frac{36k}{(x_2 - x_1)(3k^2 + 2)}$

$= \frac{16k}{(x_2 - x_1)(3k^2 + 2)}(x + \frac{9}{4})$,

当 $x = -\frac{9}{4}$ 时, $y = 0$, 所以直线 NM' 过定点 $(-\frac{9}{4}, 0)$.

【点睛】 本题考查椭圆的定义和简单的几何性质, 求椭圆的标准方程, 以及直线与椭圆的位置关系中直线过定点的问题, 关键在于将目标条件转化到直线与椭圆的交点的坐标上去, 属于较难题.

31. 已知 $B(-1, 0), C(1, 0)$ 为 $\triangle ABC$ 的两个顶点, P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 边 AC, AB 上的两条中线长度之和为 6.

(1) 求点 P 的轨迹 T 的方程.

(2) 已知点 $N(-3, 0), E(-2, 0), F(2, 0)$, 直线 PN 与曲线 T 的另一个公共点为 Q , 直线 EP 与 FQ 交于点 M , 试问: 当点 P 变化时, 点 M 是否恒在一条定直线上? 若是, 请证明; 若不是, 请说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$

(2) 是, 证明见解析

【分析】 (1) 依题意 $|PB| + |PC| = 4$, 根据椭圆的定义可知 P 的轨迹 T 是以 B, C 为焦点的椭圆 (不包括长轴的端点), 从而求出椭圆方程;

(2) 设直线 PQ 的方程为: $x = my - 3, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 联立直线与椭圆方程, 消元、列出韦达定理, 即可得到 $2my_1y_2 = \frac{5}{3}(y_1 + y_2)$, 再求出直线 PE, QF 的方程, 联立求出交点的横坐标, 整理可得求出定直线方程.

【详解】 (1) 解: 因为 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 且边 AC, AB 上的两条中线长度之和为 6,

所以 $|PB| + |PC| = \frac{2}{3} \times 6 = 4 > |BC|$,

故由椭圆的定义可知 P 的轨迹 T 是以 $B(-1, 0), C(1, 0)$ 为焦点的椭圆 (不包括长轴的端点), 且 $a = 2, c = 1$, 所以 $b = \sqrt{3}$,

所以 P 的轨迹 T 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$;

(2) 解: 设直线 PQ 的方程为: $x = my - 3, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

联立方程 $\begin{cases} x = my - 3 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得: $(3m^2 + 4)y^2 - 18my + 15 = 0$,

则 $y_1 + y_2 = \frac{18m}{3m^2 + 4}, y_1y_2 = \frac{15}{3m^2 + 4}$,

所以 $2my_1y_2 = \frac{5}{3}(y_1 + y_2)$,

又直线 PE 的方程为: $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2) = \frac{y_1}{my_1 - 1}(x + 2)$,

又直线 QF 的方程为: $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2) = \frac{y_2}{my_2 - 5}(x - 2)$,

联立方程 $\begin{cases} y = \frac{y_1}{my_1 - 1}(x + 2) \\ y = \frac{y_2}{my_2 - 5}(x - 2) \end{cases}$, 解得 $x = \frac{2(2my_1y_2 - y_2 - 5y_1)}{-y_2 + 5y_1}$,

把 $2my_1y_2 = \frac{5}{3}(y_1 + y_2)$ 代入上式得: $x = \frac{2(\frac{2}{3}y_2 - \frac{10}{3}y_1)}{-y_2 + 5y_1} = \frac{\frac{4}{3}(y_2 - 5y_1)}{-y_2 + 5y_1} = -\frac{4}{3}$,

所以当点 P 运动时, 点 M 恒在定直线 $x = -\frac{4}{3}$ 上

题型七 圆锥曲线与向量交汇

【技巧通法·提分快招】

三点共线问题的解题策略

- (1) 斜率法:若过任意两点的直线的斜率都存在,通过计算证明过任意两点的直线的斜率相等来证明三点共线;
- (2) 距离法:计算出任意两点间的距离,若某两点间的距离等于另外两个距离之和,则这三点共线;
- (3) 向量法:利用向量共线定理证明三点共线;
- (4) 直线方程法:求出过其中两点的直线方程,在证明第三点也在该直线上;
- (5) 点到直线的距离法:求出过其中某两点的直线方程,计算出第三点到该直线的距离,若距离为0,则三点共线;
- (6) 面积法:通过计算求出以三点为三角形的面积,若面积为0,则三点共线,在处理三点共线问题,离不开解析几何的重要思想:“设而不求思想”。

32. 已知直线 $l: y = -x + 1$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{m^2} - y^2 = 1 (m > 0)$ 的右支交于不同的两点 M, N .

(1) 求实数 m 的取值范围;

(2) 直线 l 与 y 轴交于点 P , 是否存在实数 m 使得 $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PN}$ 成立? 若存在, 求出实数 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $1 < m < \sqrt{2}$

(2) $m = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

【分析】(1) 设直线 $l: y = -x + 1$, 代入双曲线方程化简, 利用根与系数的关系结合判别式可求出实数 m 的取值范围;

(2) 根据 $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PN}$ 成立, 得出 $3x_1 = x_2$, 结合韦达定理计算求参.

【详解】(1) 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{m^2} - y^2 = 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$, 得 $(1 - m^2)x^2 + 2m^2x - 2m^2 = 0$,

由 $\begin{cases} 1 - m^2 \neq 0 \\ \Delta = 4m^4 + 8m^2(1 - m^2) > 0 \end{cases}$, 得 $m^2 \neq 1, m^2 < 2$ 成立.

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{-2m^2}{1 - m^2}, x_1x_2 = \frac{-2m^2}{1 - m^2}$,

因为直线 l 与双曲线 C 的右支相交于 M, N 不同的两点,

所以 $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} \frac{-2m^2}{1 - m^2} > 0 \\ \frac{-2m^2}{1 - m^2} > 0 \end{cases}$,

所以 $m^2 > 1$, 综上得 $1 < m^2 < 2$,

解得 $1 < m < \sqrt{2}$.

(2) 令 $x = 0$ 得 $y = 1$, 依题意 $P(0, 1)$,

因为 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 且 $x_1 + x_2 = \frac{-2m^2}{1 - m^2}, x_1x_2 = \frac{-2m^2}{1 - m^2}$,

因为 $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PN}$, 所以 $(x_1, y_1 - 1) = \frac{1}{3}(x_2, y_2 - 1)$,

所以 $3x_1 = x_2$, 所以 $4x_1 = \frac{-2m^2}{1-m^2}$, $3x_1^2 = \frac{-2m^2}{1-m^2}$,

所以 $16x_1^2 = \left(\frac{-2m^2}{1-m^2}\right)^2$, $3x_1^2 = \frac{-2m^2}{1-m^2}$,

所以 $\frac{16}{3} = \frac{-2m^2}{1-m^2}$, 计算得 $m^2 = \frac{8}{5}$, 又因为 $m > 0$,

所以 $m = \frac{2\sqrt{10}}{5}$.

33. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 l 过 F_2 且与双曲线交于 A, B 两点.

(1) 若双曲线的离心率为 2; 求 b 的值;

(2) 若 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$, $\triangle F_1AB$ 是等边三角形, 求双曲线的渐近线方程;

(3) 设 $b = \sqrt{3}$, 若 l 的斜率存在, 且 $(\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 求 l 的斜率.

【答案】(1) $b = \sqrt{3}$;

(2) $y = \pm\sqrt{2}x$;

(3) $\pm \frac{\sqrt{15}}{5}$.

【分析】(1) 利用离心率求解即可, (2) 利用 $\triangle F_1AB$ 是等边三角形, 得到 $2c = \sqrt{3}|y_A|$, (3) 由 $(\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ 知 $F_1M \perp AB$, 故 $k_{F_1M} \cdot k = -1$. 联立双曲线和直线的方程结合韦达定理求解即可.

【详解】(1) $e = \frac{c}{a} = 2, a = 1, \therefore c = 2$.

$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 3, \therefore b = \sqrt{3}$;

(2) 设 $A(x_A, y_A)$. 由题意, $F_2(c, 0), c = \sqrt{1+b^2}, y_A^2 = b^2(c^2 - 1) = b^4$,

因为 $\triangle F_1AB$ 是等边三角形, 所以 $2c = \sqrt{3}|y_A|$, 即 $4(1+b^2) = 3b^4$,

解得 $b^2 = 2$. 故双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$;

(3) 由已知, $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 $l: y = k(x-2)$. 显然 $k \neq 0$.

由 $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x-2) \end{cases}$, 得 $(k^2-3)x^2 - 4k^2x + 4k^2 + 3 = 0$.

因为 l 与双曲线交于两点, 所以 $k^2-3 \neq 0$, 且 $\Delta = 36(1+k^2) > 0$.

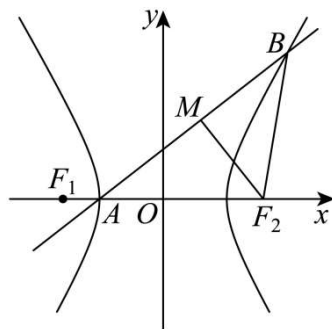
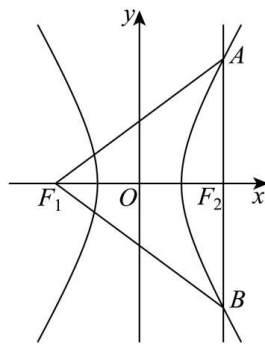
设 AB 的中点为 $M(x_M, y_M)$.

由 $(\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

即 $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 知 $F_1M \perp AB$, 故 $k_{F_1M} \cdot k = -1$.

而 $x_M = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{2k^2}{k^2-3}, y_M = k(x_M-2) = \frac{6k}{k^2-3}, k_{F_1M} = \frac{3k}{2k^2-3}$,

所以 $\frac{3k}{2k^2-3} \cdot k = -1$, 得 $k^2 = \frac{3}{5}$, 故 l 的斜率为 $\pm \frac{\sqrt{15}}{5}$.



34. (24-25 高三下·广东·开学考试) 已知动点 P 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{a^2} = 1 (a > 0)$ 上, 且 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 设直线 $l: x = \sqrt{2}a$, A, B 为 l 上不重合的两点.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 已知 $F_1A \perp F_2B$;

(i) 证明: 点 A, B 在 x 轴的异侧;

(ii) 证明: 当 $\triangle PAB$ 的面积取最小值时, 存在常数 λ 使得 $\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_2B} = \lambda \overrightarrow{F_1F_2}$, 并求 λ 的值.

【答案】(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) (i) 证明见解析; (ii) 证明见解析, 2

【分析】(1) 直接根据椭圆中 a, b, c 的关系和离心率公式求解;

(2) (i) 由 $F_1A \perp F_2B$, 则 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 0$, 根据坐标运算可证;

(ii) 要使 S 最小, 此时 $P(a, 0)$, $|AB|^2 = (y_1 - y_2)^2 \geq -4y_1y_2 = 6a^2$, 根据等号成立的条件可得 A, B 点坐标, 再结合向量坐标运算可解 λ 的值.

【详解】(1) 由题设 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

则 $a^2 = 2b^2$, 即 $a = \sqrt{2}b$, 且 $c^2 = a^2 - b^2 = b^2$, 即 $b = c$.

则 C 的离心率为 $\frac{c}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) (i) 由 (1) 可得 $c = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 设 $A(\sqrt{2}a, y_1)$, $B(\sqrt{2}a, y_2)$.

则 $\overrightarrow{F_1A} = (\frac{3\sqrt{2}}{2}a, y_1)$, $\overrightarrow{F_2B} = (\frac{\sqrt{2}}{2}a, y_2)$.

由 $F_1A \perp F_2B$, 得 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 0$, 即 $y_1y_2 = -\frac{3}{2}a^2 < 0$.

故必存在一点在第一象限, 另一点在第四象限, 即点 A, B 在 x 轴的异侧.

(ii) 记 $\triangle PAB$ 的面积为 S , 点 P 到 l 的距离为 d , 则 $S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot |AB|$.

要使 S 最小, 则必须使 d 与 $|AB|$ 同时达到最小值.

显然当 P 运动至 C 的右顶点时 d 最小, 此时 $P(a, 0)$,

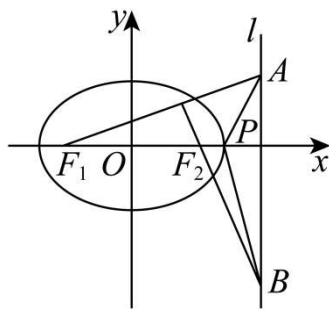
而 $|AB|^2 = (y_1 - y_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 \geq -2y_1y_2 - 2y_1y_2 = -4y_1y_2 = 6a^2$,

当且仅当 $y_1 = -y_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}a$ 或 $y_2 = -y_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}a$ 时取等号, 最小值为 $\sqrt{6}a$.

此时 $\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_2B} = (\frac{3\sqrt{2}}{2}a, y_1) + (\frac{\sqrt{2}}{2}a, y_2) = (2\sqrt{2}a, y_1 + y_2) = (2\sqrt{2}a, 0)$.

且 $\overrightarrow{F_1F_2} = (\sqrt{2}a, 0)$,

故 $\lambda \cdot \sqrt{2}a = 2\sqrt{2}a$, 解得 $\lambda = 2$.



35. 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 设 A, B 分别为 E 的左、右顶点, C, D 分别为上、下顶点, 四边形 $ACBD$ 的面积为 4.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 若直线 $y = x - 1$ 与椭圆交于 G, H , 求 $\triangle OGH$ 的面积;

(3) 过点 $(1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 E 交于两点 P, Q (不与 A, B 重合), 若直线 PB 与直线 $x = 4$ 相交于点 N ,

求证:三点 A, Q, N 共线.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) $\frac{4}{5}$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 根据题意, 列出关于 a, b, c 的方程组, 求出 a, b, c 的值, 可得椭圆 E 的方程.

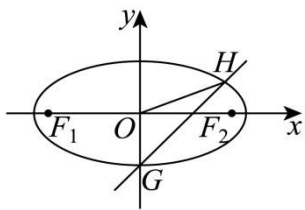
(2) 将直线 $y = x - 1$ 与椭圆方程联立, 可得点 G, H 的纵坐标, 利用三角形的面积公式, 可求 $\triangle OGH$ 的面积.

(3) 设直线 PQ 方程为 $x = ty + 1$, 与椭圆方程联立, 根据韦达定理, 可得 $y_1 + y_2, y_1 y_2$, 再利用两点式的直线 PB 方程, 令 $x = 4$, 可得 N 点坐标, 再证 $k_{AQ} = k_{AN}$ 即可.

【详解】(1) 由题意得:
$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4 \times \frac{ab}{2} = 4 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \sqrt{3} \end{cases}.$$

所以椭圆 E 的方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 如图:



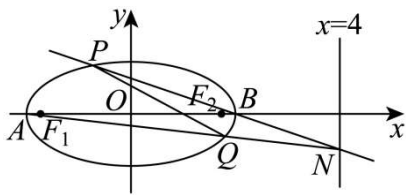
将直线 $y = x - 1$ 即 $x = y + 1$ 代入椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 得: $(y + 1)^2 + 4y^2 = 4$.

整理得: $5y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (y + 1)(5y - 3) = 0 \Rightarrow y = -1$ 或 $y = \frac{3}{5}$

又直线 $y = x - 1$ 交 x 轴于点 $(1, 0)$.

所以 $S_{\triangle OGH} = \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{3}{5} + 1\right) = \frac{4}{5}$.

(3) 如图:



因为 P, Q 不与 A, B 重合, 可设直线 PQ 方程为: $x = ty + 1$, 代入椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

得: $(ty + 1)^2 + 4y^2 = 4$, 整理得: $(t^2 + 4)y^2 + 2ty - 3 = 0$.

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

则 $y_1 + y_2 = -\frac{2t}{t^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{3}{t^2 + 4}$.

直线 PB 方程为: $\frac{y}{x - 2} = \frac{y_1}{x_1 - 2} = \frac{y_1}{ty_1 + 1 - 2} = \frac{y_1}{ty_1 - 1}$,

令 $x = 4$ 得: $y = \frac{2y_1}{ty_1 - 1}$, 即 N 点坐标为: $\left(4, \frac{2y_1}{ty_1 - 1}\right)$.

$$\text{所以 } k_{AQ} = \frac{y_2}{x_2+2} = \frac{y_2}{ty_2+1+2} = \frac{y_2}{ty_2+3}, k_{AN} = \frac{\frac{2y_1}{ty_1-1}}{4+2} = \frac{y_1}{3(ty_1-1)},$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } k_{AQ} - k_{AN} &= \frac{y_2}{ty_2+3} - \frac{y_1}{3(ty_1-1)} = \frac{3y_2(ty_1-1) - y_1(ty_2+3)}{3(ty_2+3)(ty_1-1)} = \frac{2ty_1y_2 - 3(y_1+y_2)}{3(ty_2+3)(ty_1-1)} \\ &= \frac{-2t \cdot \frac{3}{t^2+4} + 3 \cdot \frac{2t}{t^2+4}}{3(ty_2+3)(ty_1-1)} = 0, \end{aligned}$$

所以 $k_{AQ} = k_{AN}$, 所以 A, Q, N 三点共线.

36. (23-24 高三上·河北保定·期末) 已知动点 M 在 $x^2 + y^2 = 4$ 上, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N , 若 H 为 MN 中点.

(1) 求点 H 的轨迹方程;

(2) 过 $A(0, \frac{1}{2})$ 作直线 l 交 H 的轨迹于 P, Q 两点, 并且交 x 轴于 B 点. 若 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{QA} = \mu \overrightarrow{QB}$, 求

证: $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 为定值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{8}{3}$, 证明见解析

【分析】(1) 设点 H 的坐标为 (x, y) , 利用代入法求点 H 的轨迹方程;

(2) 分直线斜率存在和斜率不存在, 通过联立方程组求交点坐标, 表示出 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$, 利用韦达定理化简为定值.

【详解】(1) 设点 H 的坐标为 (x, y) , 则 $N(x, 0)$, $M(x, 2y)$,

点 M 在 $x^2 + y^2 = 4$ 上, 则有 $x^2 + 4y^2 = 4$, 即 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

所以点 H 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 直线 l 斜率不存在时, 直线方程为 $x = 0$, 则 $P(0, 1)$, $Q(0, -1)$, $A(0, \frac{1}{2})$, $B(0, 0)$,

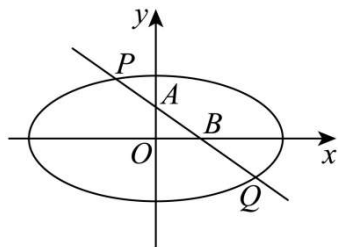
得 $\overrightarrow{PA} = (0, -\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{PB} = (0, -1)$, 由 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PB}$, 得 $\lambda = \frac{1}{2}$,

$\overrightarrow{QA} = (0, \frac{3}{2})$, $\overrightarrow{QB} = (0, 1)$, 由 $\overrightarrow{QA} = \mu \overrightarrow{QB}$, $\mu = \frac{3}{2}$,

此时 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

直线 l 斜率存在时, 由直线交 x 轴于 B 点知斜率不为 0, 设直线方程为 $y = kx + \frac{1}{2}$,

则有 $B(-\frac{1}{2k}, 0)$, 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,



由 $\begin{cases} y=kx+\frac{1}{2} \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$, 消去 y 得 $(1+4k^2)x^2+4kx-3=0$,

$$\Delta=16k^2+12(1+4k^2)>0, \text{ 有 } x_1+x_2=\frac{-4k}{1+4k^2}, x_1x_2=\frac{-3}{1+4k^2},$$

$$\overrightarrow{PA}=(-x_1, \frac{1}{2}-y_1), \overrightarrow{PB}=(-\frac{1}{2k}-x_1, -y_1), \text{ 由 } \overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}, \text{ 得 } \frac{1}{\lambda}=\frac{\frac{1}{2k}+x_1}{x_1}=\frac{1}{2kx_1}+1,$$

$$\overrightarrow{QA}=(-x_2, \frac{1}{2}-y_2), \overrightarrow{QB}=(-\frac{1}{2k}-x_2, -y_2), \text{ 由 } \overrightarrow{QA}=\mu\overrightarrow{QB}, \frac{1}{\mu}=\frac{\frac{1}{2k}+x_2}{x_2}=\frac{1}{2kx_2}+1,$$

$$\text{此时 } \frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{2kx_1}+1+\frac{1}{2kx_2}+1=\frac{x_1+x_2}{2kx_1x_2}+2=\frac{\frac{-4k}{1+4k^2}}{\frac{-6k}{1+4k^2}}+2=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}.$$

综上可知, $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$ 为定值 $\frac{8}{3}$.

【点睛】方法点睛:求定值问题常见的方法有两种:

(1) 从特殊入手, 求出定值, 再证明这个值与变量无关;

(2) 直接推理、计算, 并在计算推理的过程中消去变量, 从而得到定值.

37. (2024·贵州贵阳·三模) 已知 A 为双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右顶点, 过点 $B(0,2)$ 的直线 l 交 C 于 D 、 E 两点.

(1) 若 $AD \perp AE$, 试求直线 l 的斜率;

(2) 记双曲线 C 的两条渐近线分别为 l_1, l_2 , 过曲线 C 的右支上一点 P 作直线与 l_1, l_2 分别交于 M 、 N 两点,

且 M 、 N 位于 y 轴右侧, 若满足 $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN}, \lambda \in [\frac{1}{2}, 4]$, 求 $S_{\triangle MON}$ 的取值范围 (O 为坐标原点).

【答案】(1) $k=1$

(2) $[\sqrt{3}, \frac{25\sqrt{3}}{16}]$

【分析】(1) 设 $y=kx+2, D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$, 联立得到韦达定理式, 根据垂直得到 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}=0$, 再展开代入韦达定理式求解 k 值, 最后检验即可;

(2) 设 $P(x_0, y_0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 得到相关向量, 根据向量共线得到方程组, 解出 x_0, y_0 , 再将其代入双曲线方程化简得到 $x_1x_2=\frac{1}{4}(\lambda+\frac{1}{\lambda}+2)$, 最后利用面积公式和导数求出面积范围即可.

【详解】(1) 由题意知直线 l 的斜率一定存在.

设直线 l 的方程为 $y=kx+2, D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2-\frac{y^2}{3}=1 \\ y=kx+2 \end{cases}, \text{ 化简得: } (3-k^2)x^2-4kx-7=0, \text{ 其中 } k^2 \neq 3$$

$$\text{所以 } x_1+x_2=\frac{4k}{3-k^2}, x_1x_2=\frac{-7}{3-k^2}, \Delta=16k^2+28(3-k^2)>0,$$

因为 $AD \perp AE, A(1,0)$, 所以 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}=0$.

$$\text{即: } (x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=0, \text{ 换元后有: } (1+k^2)x_1x_2+(2k-1)(x_1+x_2)+5=0.$$

$$\text{所以 } (1+k^2) \cdot \frac{-7}{3-k^2} + (2k-1) \cdot \frac{4k}{3-k^2} + 5 = 0, \text{ 化简得: } k^2+k-2=0.$$

解得: $k=1$ 或 $k=-2$.

当 $k=-2$ 时, 直线过点 A , 不符合题意.

当 $k=1$ 时, 代入得 $\Delta=16+28 \times (3-1)=72>0$, 满足题意.

所以 $k=1$.

(2) 设 $P(x_0, y_0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

则 $\overrightarrow{MP} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1), \overrightarrow{PN} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0)$.

由 $\overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{PN}, \lambda \in [\frac{1}{2}, 4]$ 可知:
$$\begin{cases} x_0 - x_1 = \lambda(x_2 - x_0) \\ y_0 - y_1 = \lambda(y_2 - y_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases},$$

因为 $x_0^2 - \frac{y_0^2}{3} = 1$, 所以 $\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}\right)^2 - \frac{\left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)^2}{3} = 1$, 且有 $\begin{cases} l_1: y = \sqrt{3}x \\ l_2: y = -\sqrt{3}x \end{cases}$,

化简得: $x_1 x_2 = \frac{(1 + \lambda)^2}{4\lambda} = \frac{1}{4} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 \right)$.

又 $S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} |OM| \cdot |ON| \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} x_1 x_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 \right), \lambda \in [\frac{1}{2}, 4]$,

设 $h(x) = x + \frac{1}{x}, x \in [\frac{1}{2}, 4]$, 则 $h'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

当 $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 在定义域上单调;

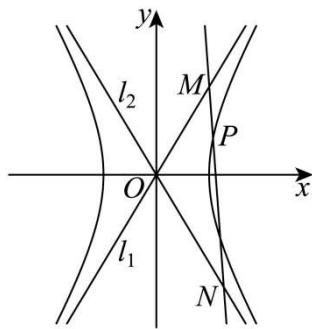
当 $x \in (1, 4]$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 在定义域上单调.

所以 $h(x)_{\min} = h(1) = 2, h(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}, h(4) = \frac{17}{4}$.

所以 $S_{\triangle MON}$ 的取值范围是: $[\sqrt{3}, \frac{25\sqrt{3}}{16}]$.

【点睛】关键点点睛: 本题第二问的关键是利用定比公式得到 x_0, y_0 , 再将其代入回双曲线方程化简整理出

关键的 $x_1 x_2 = \frac{1}{4} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 \right)$, 最后得到面积表达式, 求出其范围即可.



题型八 切线问题

【技巧通法·提分快招】

1、椭圆(双曲线)的切线

(1) 设切线方程为 $y = kx + m$ 与椭圆方程联立, 由 $\Delta = 0$ 进行求解;

(2) 椭圆(双曲线) $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在其上一点 (x_0, y_0) 的切线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} \pm \frac{y_0 y}{b^2} = 1$, 再应用此方程时,

首先应证明直线 $\frac{x_0 x}{a^2} \pm \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ 与椭圆(双曲线) $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相切.

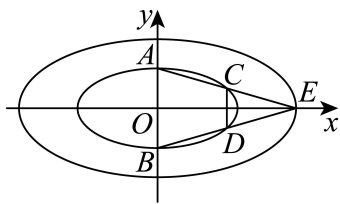
双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的以 (x_0, y_0) 为切点的切线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.)

2、抛物线的切线

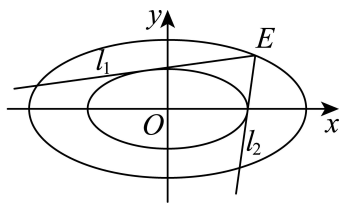
(1) 点 $P(x_0, y_0)$ 是抛物线 $y^2 = 2mx (m \neq 0)$ 上一点, 则抛物线过点 P 的切线方程是: $y_0 y = m(x_0 + x)$;

(2) 点 $P(x_0, y_0)$ 是抛物线 $x^2 = 2my (m \neq 0)$ 上一点, 则抛物线过点 P 的切线方程是: $x_0 x = m(y_0 + y)$.

38. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 过原点的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 且 $|AB|$ 的最大值为 4.



图①



图②

(1) 求椭圆 Γ 的方程;

(2) 若点 E 在椭圆 $\Gamma': \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上.

(i) 如图①, 当 A, B 是 Γ 短轴端点, E 为 Γ' 右顶点时, AE, BE 交 Γ 于 C, D , 求 $|CD|$ 的长度;

(ii) 如图②, 过 $E(x_0, y_0)$ 作 Γ 两条切线 l_1, l_2 , 若其斜率之积为 1, 求 x_0^2 的值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) (i) $|CD| = 1$; (ii) $\frac{24}{5}$

【分析】(1) 由已知条件可得出关于 a, b, c 的方程组, 解出这三个量的值, 即可得出椭圆 Γ 的方程;

(2) (i) 求出直线 AE 的方程, 将该直线方程与椭圆 Γ 的方程联立, 可求出点 C 的坐标, 同理可得出点 D 的坐标, 即可得出 $|CD|$ 的值;

(ii) 设过点 $E(x_0, y_0)$ 的椭圆 Γ 切线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 将切线方程与椭圆 Γ 的方程联立, 由 $\Delta = 0$ 可得出关于 k 的二次方程, 设两切线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 结合韦达定理可得出 $y_0^2 = x_0^2 - 3$, 结合 $\frac{x_0^2}{12} + \frac{y_0^2}{3} = 1$ 可求得 x_0^2 的值.

【详解】(1) 由题意可得 $\begin{cases} 2a=4 \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\sqrt{3} \end{cases}$, 故椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) (i) 由题意知 $A(0, 1), B(0, -1), E(2\sqrt{3}, 0)$, $k_{AE} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$,

所以直线 AE 的方程为 $y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x + 1$,

联立 $\begin{cases} y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x + 1 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$ 得 $x^2 - \sqrt{3}x = 0$, 解得 $x = \sqrt{3}$ 或 $x = 0$, 即 $C(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, 同理 $D(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$,

故 $|CD| = 1$;

(ii) 由题意可知, 过点 $E(x_0, y_0)$ 的椭圆 Γ 切线的斜率存在,

设过点 $E(x_0, y_0)$ 的椭圆 Γ 切线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 即 $y = kx + (y_0 - kx_0)$,

联立 $\begin{cases} y = kx + (y_0 - kx_0) \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$, 可得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8k(y_0 - kx_0)x + 4(y_0 - kx_0)^2 - 4 = 0$,

则 $\Delta = [8k(y_0 - kx_0)]^2 - 4(1 + 4k^2)[4(y_0 - kx_0)^2 - 4] = 0$,

整理得 $(x_0^2 - 4)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 1 = 0$,

设两切线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 k_1, k_2 为关于 k 的方程 $(x_0^2 - 4)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 1 = 0$ 的两根,

所以 $k_1k_2 = \frac{y_0^2 - 1}{x_0^2 - 4} = 1$, 整理得 $y_0^2 = x_0^2 - 3$,

由 $\begin{cases} y_0^2 = x_0^2 - 3 \\ \frac{x_0^2}{12} + \frac{y_0^2}{3} = 1 \end{cases}$, 解得 $x_0^2 = \frac{24}{5}$.

39. (23-24 高三下·山东济宁·开学考试) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ,

渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 且经过点 $P(-2, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 过点 P 作双曲线 C 的切线 l , l 与 x 轴交于点 Q , 试判断 $\angle F_1PQ$ 与 $\angle F_2PQ$ 的大小关系, 并给予证明.

【答案】(1) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

(2) $\angle F_1PQ = \angle F_2PQ$, 证明见解析

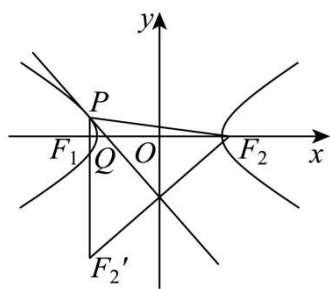
【分析】(1) 由题意可列出方程组 $\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{4}{a^2} - \frac{1}{3b^2} = 1 \end{cases}$, 解出方程组即可得解;

(2) $\angle F_1PQ = \angle F_2PQ$, 首先求出直线 PQ 的方程, 进一步作 $F_2(2, 0)$ 关于 l 的对称点为 $F_2'(x_0, y_0)$, 只需证明 P, F_1, F_2' 三点共线即可得证.

【详解】(1) 由已知 $\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{4}{a^2} - \frac{1}{3b^2} = 1 \end{cases}$, 解之得 $\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases}$,

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

(2)



$$\angle F_1PQ = \angle F_2PQ.$$

证明如下:

令 $l: y - \frac{\sqrt{3}}{3} = k(x + 2), (k^2 \neq \frac{1}{3})$,

由 $\begin{cases} y - \frac{\sqrt{3}}{3} = k(x + 2) \\ \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \end{cases}$, 得 $(1 - 3k^2)x^2 - 6k(2k + \frac{\sqrt{3}}{3})x - 3[(2k + \frac{\sqrt{3}}{3})^2 + 1] = 0$,

由 $\Delta = 36k^2(2k + \frac{\sqrt{3}}{3})^2 + 12(1 - 3k^2) \cdot [(2k + \frac{\sqrt{3}}{3})^2 + 1] = 0$ 得 $k = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以 $l: 2x + \sqrt{3}y + 3 = 0$.

令 $F_2(2, 0)$ 关于 l 的对称点为 $F_2'(x_0, y_0)$, 且 F_2F_2' 与直线 l 的交点为 M ,

则 $\begin{cases} \frac{y_0 - 0}{x_0 - 2} \cdot (-\frac{2\sqrt{3}}{3}) = -1 \\ 2 \cdot \frac{x_0 + 2}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{y_0 + 0}{2} + 3 = 0 \end{cases}$,

解之得 $\begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -2\sqrt{3} \end{cases}$, 即 $F_2'(-2, -2\sqrt{3})$,

又因为 $F_1(-2, 0), P(-2, \frac{\sqrt{3}}{3})$, 所以 P, F_1, F_2' 三点共线,

因为 l 为线段 F_2F_2' 的垂直平分线, 所以 $PF_2 = PF_2'$,

所以, $\angle F_1PQ = \angle F_2PQ$.

40. 已知一结论:若圆 C 的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$, 则经过圆 C 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $x_0x + y_0y = r^2$.

(1) 由上面结论分别写出下面两个所求的切线方程 (不需要解题过程)

① 经过双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 上一点 $N(x_0, y_0)$ 的切线方程

② 经过抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点 $Q(x_0, y_0)$ 的切线方程

(2) 已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, A 为椭圆上顶点, P 为椭圆的右顶点, 求椭圆上点 $M(x_0, y_0)$ 到直线 AP 距离的最大值并求出点 M 坐标 (注: 若需要椭圆上经过某点的切线方程可以直接写)

【答案】(1) ① $\frac{x_0x}{4} - \frac{y_0y}{3} = 1$; ② $y_0y = 2(x + x_0)$;

(2) $\frac{6\sqrt{13} + 6\sqrt{26}}{13}$.

【分析】(1) ①② 设切线方程 $x - x_0 = t(y - y_0)$, 分别联立双曲线、抛物线, 利用 $\Delta = 0$ 得到关于 t 的方程, 结合点在曲线上求 t , 再代回到切线方程并整理即可得答案;

(2) 根据题设得到直线 AP 的方程为 $2x + 3y - 6 = 0$, 由过椭圆上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线与直线 AP 平行时, 点到直线距离可取最大, 进而求出切线与椭圆的切点坐标 (离 AP 较远的点), 应用点线距离公式求答案.

【详解】(1) ① 令切线为 $x - x_0 = t(y - y_0)$, 联立 $3x^2 - 4y^2 = 12$, 则 $3[t(y - y_0) + x_0]^2 - 4y^2 = 12$,

所以 $(3t^2 - 4)y^2 + 6t(x_0 - ty_0)y + 3t^2y_0^2 - 6tx_0y_0 + 3x_0^2 - 12 = 0$, 且 $\frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{3} = 1$,

由 $\Delta = 36t^2(x_0 - ty_0)^2 - 12(3t^2 - 4)(t^2y_0^2 - 2tx_0y_0 + x_0^2 - 4) = 0$,

所以 $(3 + y_0^2)t^2 - 2x_0y_0t + x_0^2 - 4 = 0$, 则 $t = \frac{x_0y_0}{3 + y_0^2}$, 而 $\frac{3}{4}x_0^2 = 3 + y_0^2$,

所以 $t = \frac{x_0y_0}{3 + y_0^2} = \frac{4y_0}{3x_0}$, 则切线为 $x - x_0 = \frac{4y_0}{3x_0}(y - y_0)$, 即 $3x_0x - 4y_0y = 3x_0^2 - 4y_0^2 = 12$,

所以切线方程为 $\frac{x_0x}{4} - \frac{y_0y}{3} = 1$;

② 令切线为 $x - x_0 = t(y - y_0)$, 联立 $y^2 = 4x$, 则 $y^2 = 4[t(y - y_0) + x_0]$, 且 $y_0^2 = 4x_0$,

所以 $y^2 - 4ty + 4ty_0 - 4x_0 = 0$, 而 $\Delta = 16t^2 - 16(ty_0 - x_0) = 0$, 则 $t^2 - ty_0 + x_0 = 0$,

所以 $t = \frac{y_0}{2}$, 则 $x - x_0 = \frac{y_0}{2}(y - y_0)$, 即 $2x - 2x_0 = y_0y - y_0^2$,

所以 $y_0y = 2(x + x_0)$.

(2) 由题知, 当过椭圆上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线与直线 AP 平行时, 点到直线距离可取最大,

由 $A(0, 2), P(3, 0)$, 则直线 AP 的方程为 $2x + 3y - 6 = 0$,

由题设, 类比可得过点 M 的切线方程为 $4x_0x + 9y_0y = 36$, 得 $\frac{x_0}{y_0} = \frac{3}{2}$,

代入椭圆方程, $\frac{x_0^2}{9} + \frac{\frac{4}{9}x_0^2}{4} = \frac{2x_0^2}{9} = 1$, 则 $x_0^2 = \frac{9}{2}$, 故 $y_0^2 = 2$,

所以 $M(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$ 或 $M(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ (离直线 AP 较近, 舍去),

所以 M 到直线距离最大值为 $\frac{|-3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 6|}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13} + 6\sqrt{26}}{13}$.

41. (2024·河南郑州·模拟预测) 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , $P(x_0, y_0)$ 是 C 上一点且 $|PF|^2 -$

$|PF| = x_0^2 + x_0$, 直线 l 经过点 $Q(-8, 0)$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) ①若 l 与 C 相切, 且切点在第一象限, 求切点的坐标;

②若 l 与 C 在第一象限内的两个不同交点为 A, B , 且 Q 关于原点 O 的对称点为 R , 证明: 直线 AR, BR 的倾斜角之和为 π .

【答案】(1) $y^2 = 4x$

(2) ① $(8, 4\sqrt{2})$; ② 证明见解析

【分析】(1) 由 $|PF|^2 - |PF| = x_0^2 + x_0$ 化简得 $|PF| - x_0 = 1$, 再根据定义得 $|PF| = x_0 + \frac{p}{2}$, 代入即可的抛物线方程;

(2) ①设切点坐标为 $(t, 2\sqrt{t})$, 通过导数求出切线方程 $y - 2\sqrt{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}(x - t)$, 将点 $Q(-8, 0)$ 代入即可; ②

设直线 l 的方程为 $x + 8 = ky (k > 0)$, $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, 联立 $\begin{cases} x + 8 = ky \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $y_1 + y_2 = 4k$, $y_1 y_2 = 32$,

然后计算 $k_{AR} + k_{BR} = 0$ 即可.

【详解】(1) 因为 $|PF|^2 - |PF| = x_0^2 + x_0$,

所以 $|PF|^2 - x_0^2 = |PF| + x_0$,

所以 $(|PF| + x_0)(|PF| - x_0) = |PF| + x_0$,

所以 $|PF| - x_0 = 1$,

又 P 是 C 上一点,

所以 $|PF| = x_0 + \frac{p}{2}$,

所以 $\frac{p}{2} = 1$, 解得 $p = 2$,

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) ①设切点坐标为 $(t, 2\sqrt{t})$,

因为 $y = 2\sqrt{x}$, 所以 $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 切线的斜率为 $\frac{1}{\sqrt{t}}$,

所以切线方程为 $y - 2\sqrt{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}(x - t)$,

将 $Q(-8, 0)$ 代入上式, 得 $-2\sqrt{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}(-8 - t)$,

所以 $t = 8$,

所以切点坐标为 $(8, 4\sqrt{2})$.

②由①得, 直线 AR, BR 的斜率都存在,

要证: 直线 AR, BR 的倾斜角之和为 π ,

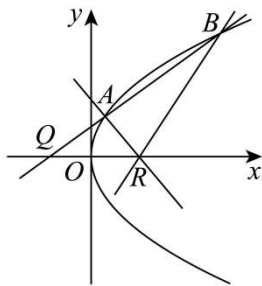
只要证明: 直线 AR, BR 的斜率之和为 0.

设直线 l 的方程为 $x + 8 = ky (k > 0)$, $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, $R(8, 0)$,

则 $k_{AR} = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4} - 8} = \frac{4y_1}{y_1^2 - 32}$, $k_{BR} = \frac{4y_2}{y_2^2 - 32}$,

由 $\begin{cases} x + 8 = ky \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $y^2 - 4ky + 32 = 0$,

所以 $y_1 + y_2 = 4k$, $y_1 y_2 = 32$, $\Delta = 16k^2 - 128 > 0$, 即 $k > 2\sqrt{2}$,



$$\text{所以 } k_{AR} + k_{BR} = \frac{4y_1}{y_1^2 - 32} + \frac{4y_2}{y_2^2 - 32} = \frac{4(y_1 + y_2)(y_1 y_2 - 32)}{(y_1^2 - 32)(y_2^2 - 32)} = 0,$$

即直线 AR, BR 的倾斜角之和为 π .

42. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F_1(-\sqrt{7}, 0), F_2(\sqrt{7}, 0)$, 点 M 满足: $|MF_1| - |MF_2| = 4$. 记 M 的轨迹为 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 过点 $A(3, 1)$ 的直线 l 交曲线 C 于 M, N 两点, 过点 M, N 分别作曲线 C 的切线, 两切线交于点 P , 试探究: 动点 P 是否在一条定直线上? 若不在, 请说明理由; 若在, 求出该直线的方程.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1 (x \geq 2)$.

(2) 答案见解析.

【分析】(1) 根据双曲线的定义求得轨迹方程;

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 再设过 M 点的切线方程是 $y - y_1 = p(x - x_1)$, 与曲线 C 方程联立求得 p 得切线方程, 同理得过 N 点的切线方程, 设交点为 $P(x_0, y_0)$, 代入两切线方程后观察得出切点弦 MN 所在直线方程, 再由直线 MN 过 A 点, A 点坐标代入后关于 x_0, y_0 的等式, 由此可知点 (x_0, y_0) 所在直线方程,

【详解】(1) $|F_1 F_2| = 2\sqrt{7}$, 由已知 $|MF_1| - |MF_2| = 4$, 所以 M 点轨迹是以 F_1, F_2 为焦点的双曲线的右支, $2a = 4, a = 2, c = \sqrt{7}$, 则 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}$,

所以轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1 (x \geq 2)$.

(2) $x = 3$ 时, $\frac{9}{4} - \frac{y^2}{3} = 1, y^2 = \frac{45}{4} > 1$, 因此 A 在双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 右支含有焦点的部分,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

设过 M 点的切线方程是 $y - y_1 = p(x - x_1)$, $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{3} = 1$, 则 $y_1^2 + 3 = \frac{3}{4}x_1^2, x_1^2 - 4 = \frac{4}{3}y_1^2$,

由 $\begin{cases} y - y_1 = p(x - x_1) \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 得 $(4p^2 - 3)x^2 + 8p(y_1 - px_1)x + 4(y_1 - px_1)^2 + 12 = 0$,

$\Delta = 64(y_1 - px_1)^2 - 16(4p^2 - 3)[(y_1 - px_1)^2 + 3] = 0$,

整理得 $(4 - x_1^2)p^2 + 2x_1y_1p - (y_1^2 + 3) = 0$,

$-\frac{4}{3}y_1^2p^2 + 2x_1y_1p - \frac{3}{4}x_1^2 = 0, (4y_1p - 3x_1)^2 = 0, p = \frac{3x_1}{4y_1}$,

切线方程为 $y - y_1 = \frac{3x_1}{4y_1}(x - x_1), 3x_1x - 4y_1y - 12 = 0$,

同理过 N 点的切线方程为 $3x_2x - 4y_2y - 12 = 0$,

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\begin{cases} 3x_1x_0 - 4y_1y_0 - 12 = 0 \\ 3x_2x_0 - 4y_2y_0 - 12 = 0 \end{cases}$,

所以过点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 的直线方程为 $3x_0x - 4y_0y - 12 = 0$, 又直线 MN 过 $A(3, 1)$,

所以 $9x_0 - 4y_0 - 12 = 0$,

所以 $P(x_0, y_0)$ 在定直线 $9x - 4y - 12 = 0$ 上.

【点睛】结论点睛: 圆锥曲线切点弦所在直线方程求法, 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 外一点 $P(x_0, y_0)$ 作双曲线的两条切线, 切点弦所在直线方程为 $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$, 方法是设两切点分别为 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 设过

M 的点的切线方程是 $y - y_1 = k(x - x_1)$, 代入双曲线方程, 应用判别式求得 k , 从而得切线方程为 $\frac{xx_1}{a^2} -$

$\frac{yy_1}{b^2} = 1$, 同理得另一切线方程为 $\frac{xx_2}{a^2} - \frac{yy_2}{b^2} = 1$, 两条切线都过 P 点, 因此有 $\begin{cases} \frac{x_1x_0}{a^2} - \frac{y_1y_0}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2x_0}{a^2} - \frac{y_2y_0}{b^2} = 1 \end{cases}$, 由直线方

程的概念可得过点 M, N 的直线方程. 对椭圆、抛物线也有类似结论.

题型九 定直线及其探索性问题

【技巧通法·提分快招】

定直线问题

定直线问题是指因图形变化或点的移动而产生的动点在定直线上的问题, 解决这类问题, 一般可以套用求轨迹方程的通用方法, 也可以根据其本身特点的独特性采用一些特殊方法.

【一般策略】

- ①联立方程消去参;
- ②挖掘图形的对称性, 解出动点横坐标或纵坐标;
- ③将横纵坐标分别用参数表示, 再消参;
- ④设点, 对方程变形解得定直线.

解题技巧: 动点在定直线上: 题设为某动点 $P(x_0, y_0)$ 在某定直线.

目标: 需要消掉关于动点横坐标或者纵坐标的所有参数, 从而建立一个无参的直线方程, 此时会分为三种情况:

- (1) $x_0 = a$, 即动点恒过直线 $x = a$.
- (2) $y_0 = b$, 即动点恒过直线 $y = b$.
- (3) $y_0 = f(x_0)$, 即动点恒过直线 $y = f(x)$.

43. (24-25 高三上·江苏常州·期末) 平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$,

其右焦点与抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点重合.

- (1) 求 C_1, C_2 的方程;
- (2) 点 P 是 C_2 上位于第一象限的动点, C_2 在点 P 处的切线与 C_1 交于不同的两点 A, B , 线段 AB 的中点为 Q , 直线 OQ 与过 P 且垂直于 y 轴的直线交于点 M . 问点 M 是否在一条定直线 l 上, 若在, 求出直线 l 的方程; 若不在, 说明理由.

【答案】(1) $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, C_2: y^2 = 4x$.

(2) 点 M 在定直线 $x = -\frac{8}{3}$ 上

【分析】(1) 易知椭圆的焦点在 x 轴上, 根据离心率求出 C_1 的方程, 得到焦点坐标, 进而得到 C_2 的方程;
(2) 利用导数求出点 P 处切线的斜率, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 利用点差法得到直线 AB 的斜率与直线 OQ 的斜率之间的关系, 进而得到直线 OQ 的方程, 令 $y = y_0$ 即可求解.

【详解】(1) 因为椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点与抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点重合,

所以椭圆 C_1 的焦点在 x 轴上, 又因为椭圆 C_1 离心率为 $\frac{1}{2}$,

所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-3}{a^2} = \frac{1}{4}$, 解得 $a^2 = 4$,

所以椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 右焦点为 $(1, 0)$, 所以 $\frac{p}{2} = 1, p = 2$,

所以抛物线 $C_2: y^2 = 4x$;

(2)

由题可设 $P\left(\frac{y_0^2}{4}, y_0\right), y_0 > 0$,

当 $y > 0$ 时, 由 $y^2 = 4x$ 得 $y = 2\sqrt{x}, y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

所以点 P 处切线的斜率为 $y' \Big|_{x=\frac{y_0^2}{4}} = \frac{2}{y_0}$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $Q\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$,

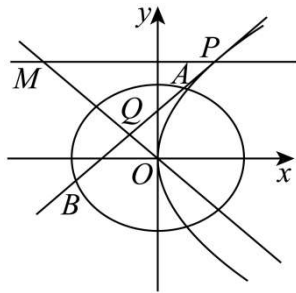
因为 A, B 在椭圆上, 所以 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1 \\ \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1 \end{cases}$,

两式作差得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{4} + \frac{y_1^2-y_2^2}{3} = 0$, 即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = -\frac{3(x_1+x_2)}{4(y_1+y_2)} = \frac{2}{y_0}$,

所以直线 OQ 的方程为 $y = \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}x = -\frac{3y_0}{8}x$,

令 $y = y_0$, 解得 $x = -\frac{8}{3}$, 所以 $M\left(-\frac{8}{3}, y_0\right)$,

所以点 M 在定直线 $x = -\frac{8}{3}$ 上运动.



44. 已知 $A(0, 1), F(0, -2)$ 分别是双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的上顶点, 下焦点.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 过 F 的直线与 C 的上、下支分别交于 B, D 两点 (B 异于 A), 直线 $x = t$ 平分线段 BD 与 C 的下支交于点 E , 证明: 直线 AE 与直线 BD 的交点在定直线上.

【答案】(1) $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 根据题中所给数据求解即可;

(2) 设直线 BD 方程为: $y = kx - 2, B(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$, 联立直线 BD 和双曲线方程, 结合韦达定理可得 $t = \frac{6k}{3k^2-1}$, 求出 E 点坐标, 直线 AE 方程, 再联立直线 AE 和直线 BD 方程, 求出交点坐标即可得证.

【详解】(1) 由题意, $a = 1, c = 2$,

所以 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}$,

所以 C 的方程为 $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$.

(2) 证明: 由题意, 直线 BD 的斜率存在,

设直线 BD 方程为: $y = kx - 2, B(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} y^2 - \frac{x^2}{3} = 1 \\ y = kx - 2 \end{cases}, \text{ 消去 } y, \text{ 得 } (3k^2 - 1)x^2 - 12kx + 9 = 0,$$

由于 x_1, x_2 同号, 所以 $k^2 > \frac{1}{3}, \Delta = 36(k^2 + 1) > 0$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{12k}{3k^2 - 1} \\ x_1 x_2 = \frac{9}{3k^2 - 1} \end{cases},$$

$$\text{所以 } t = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{6k}{3k^2 - 1},$$

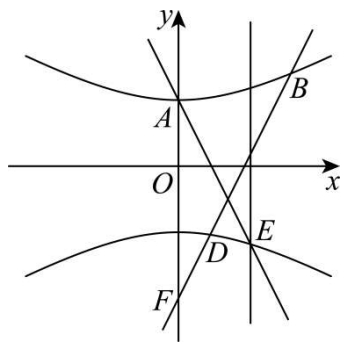
$$\text{联立 } \begin{cases} y^2 - \frac{x^2}{3} = 1 \\ x = \frac{6k}{3k^2 - 1} \end{cases}, \text{ 解得 } y = \pm \frac{3k^2 + 1}{3k^2 - 1},$$

$$\text{所以 } E\left(\frac{6k}{3k^2 - 1}, -\frac{3k^2 + 1}{3k^2 - 1}\right),$$

$$\text{所以直线 } AE \text{ 的方程为 } y = \frac{1 + \frac{3k^2 + 1}{3k^2 - 1}}{-\frac{6k}{3k^2 - 1}}x + 1, \text{ 即 } y = -kx + 1,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -kx + 1 \\ y = kx - 2 \end{cases}, \text{ 解得 } y = -\frac{1}{2},$$

所以直线 AE 与直线 BD 的交点在定直线 $y = -\frac{1}{2}$ 上.



45. (24-25 高三上·上海·月考) 已知 A, B 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的左、右顶点, 椭圆 E 的长轴长是短轴长的 2 倍, 点 $M(m, 0) (m > 0)$ 与椭圆上的点的距离的最小值为 1.

(1) 求椭圆的离心率和标准方程;

(2) 求点 M 的坐标;

(3) 过点 M 作直线 l 交椭圆 E 于 C, D 两点 (与 A, B 不重合), 连接 AC, BD 交于点 G . 证明: 点 G 在定直线上;

【答案】(1) 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) $M(3, 0)$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 根据椭圆的几何性质可求出 a 的值, 进而可求得 c 的值, 由此可得出椭圆 E 的离心率及其标准方程;

(2) 设 $P(x_0, y_0)$, 利用两点间距离公式得 $|PM| = \sqrt{\frac{3}{4}\left(x_0 - \frac{4}{3}m\right)^2 - \frac{1}{3}m^2 + 1}$, 然后根据 $0 < m \leq \frac{3}{2}, m > \frac{3}{2}$ 分类讨论求解即可;

(3) 设直线 l 的方程为 $x = ty + 3, C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$, 与椭圆方程联立方程, 结合韦达定理得 $y_1 + y_2 = -\frac{6}{5}ty_1y_2$, 写出直线 AC, BD 的方程, 进而求解即可;

【详解】(1) 由题意可知, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的长轴长为 $2a$, 短轴长为 2,

由题意可得 $a = 2$, 则 $c = \sqrt{a^2 - 1} = \sqrt{3}$,

因此, 椭圆 E 的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 其标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设 $P(x_0, y_0)$ 是椭圆上一点, 则 $x_0^2 + 4y_0^2 = 4$,

$$\begin{aligned} \text{因为 } |PM| &= \sqrt{(m-x_0)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 - 2mx_0 + m^2 + 1 - \frac{x_0^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}x_0^2 - 2mx_0 + m^2 + 1} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}\left(x_0 - \frac{4}{3}m\right)^2 - \frac{1}{3}m^2 + 1} \quad (-2 \leq x_0 \leq 2) \end{aligned}$$

若 $0 < m \leq \frac{3}{2}$ 时, 则 $0 < \frac{4m}{3} \leq 2$, $|PM|_{\min} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}m^2} = 1$, 解得 $m = 0$ (舍去),

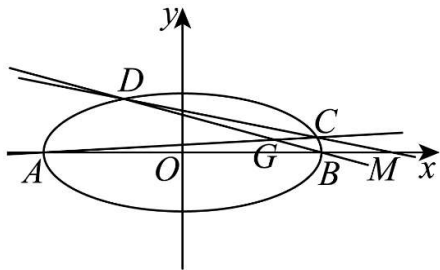
若 $m > \frac{3}{2}$ 时, 则 $\frac{4m}{3} > 2$, 则 $|PM|_{\min} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 4 - 4m + m^2 + 1} = 1$, 解得 $m = 1$ (舍去) 或 $m = 3$,

所以 M 点的坐标为 $(3, 0)$.

(3) 设直线 l 的方程为 $x = ty + 3$, $C(x_1, y_1)$ 、 $D(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} x = ty + 3 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } (t^2 + 4)y^2 + 6ty + 5 = 0, \text{ 所以 } y_1 + y_2 = -\frac{6t}{t^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{5}{t^2 + 4},$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = -\frac{6}{5}ty_1 y_2, \quad ①$$



由 $\Delta = 16t^2 - 80 > 0$, 得 $t > \sqrt{5}$ 或 $t < -\sqrt{5}$,

$$\text{易知直线 } AC \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), \quad ②$$

$$\text{直线 } BD \text{ 的方程为 } y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2), \quad ③$$

$$\text{联立 } ②③, \text{ 消去 } y, \text{ 得 } \frac{x+2}{x-2} = \frac{(x_1+2)y_2}{(x_2-2)y_1} = \frac{(ty_1+5)y_2}{(ty_2+1)y_1} = \frac{ty_1 y_2 + 5y_2}{ty_1 y_2 + y_1}, \quad ④$$

$$\text{联立 } ①④, \text{ 消去 } ty_1 y_2, \text{ 则 } \frac{x+2}{x-2} = \frac{-\frac{5}{6}(y_1+y_2) + 5y_2}{-\frac{5}{6}(y_1+y_2) + y_1} = -5,$$

解得 $x = \frac{4}{3}$, 即点 G 在直线 $x = \frac{4}{3}$ 上.

【点睛】方法点睛: 求定值问题常见的方法有两种:

(1) 从特殊入手, 求出定值, 再证明这个值与变量无关;

(2) 直接推理、计算, 并在计算推理的过程中消去变量, 从而得到定值.

46. (2024·江苏苏州·模拟预测) 已知点 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$ 和动点 $P(x, y)$ 满足 y^2 是 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$, $\vec{PA} \cdot \vec{PC}$ 的等差中项.

(1) 求 P 点的轨迹方程;

(2) 设 P 点的轨迹为曲线 C_1 按向量 $\vec{a} = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{16}\right)$ 平移后得到曲线 C_2 , 曲线 C_2 上不同的两点 M, N 的连线交 y 轴于点 $Q(0, b)$, 如果 $\angle MON$ (O 为坐标原点) 为锐角, 求实数 b 的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 如果 $b = 2$ 时, 曲线 C_2 在点 M 和 N 处的切线的交点为 R , 求证: R 在一条定直线上.

【答案】(1) $y = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$;

(2) $b < 0$ 或 $b > 1$;

(3) 证明见解析.

【分析】(1) 根据题意, 由平面向量的坐标运算, 结合等差中项的定义代入计算, 即可得到结果;

(2) 根据题意, 由平移公式可得曲线 C_2 的方程, 然后与直线 MN 的方程联立, 由平面向量的夹角公式, 代入计算, 即可得到结果;

(3) 根据题意, 求导可得在点 M, N 处的切线方程, 联立两条切线方程, 代入计算, 即可得到结果.

【详解】(1) 由题意可得 $\overrightarrow{PA} = (1-x, -y)$, $\overrightarrow{PB} = (-x, 1-y)$, $\overrightarrow{PC} = (1-x, 1-y)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (1-x) \cdot (-x) + (-y) \cdot (1-y) = x^2 + y^2 - x - y,$$

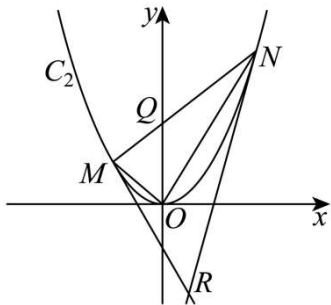
$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = (1-x) \cdot (1-x) + (-y) \cdot (1-y) = x^2 + y^2 - 2x - y + 1,$$

又 $\because y^2$ 是 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的等差中项,

$$\therefore (x^2 + y^2 - x - y) + (x^2 + y^2 - 2x - y + 1) = 2y^2,$$

整理得点 $P(x, y)$ 的轨迹方程为 $y = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

(2)



由 (1) 知 $C_1: y = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$,

又 $\because \vec{a} = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{16}\right)$, \therefore 平移公式为 $\begin{cases} x' = x - \frac{3}{4} \\ y' = y + \frac{1}{16} \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = x' + \frac{3}{4} \\ y = y' - \frac{1}{16} \end{cases}$,

代入曲线 C_1 的方程得到曲线 C_2 的方程为: $y' - \frac{1}{16} = \left(x' + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(x' + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}$,

即 $y' = x'^2$.

曲线 C_2 的方程为 $y = x^2$.

如图由题意可设 M, N 所在的直线方程为 $y = kx + b$,

由 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = kx + b \end{cases}$ 消去 y 得 $x^2 - kx - b = 0$,

令 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)$, 则 $\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = -b \end{cases}$,

$$\therefore \overrightarrow{OM} = (x_1, y_1) = (x_1, x_1^2), \overrightarrow{ON} = (x_2, y_2) = (x_2, x_2^2),$$

又 $\because \angle MON$ 为锐角, $\therefore \cos \angle MON = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}|} > 0$, 即 $\frac{x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}|} > 0$,

$$\therefore x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2 > 0, \text{ 又 } x_1 x_2 = -b,$$

$$\therefore -b + (-b)^2 > 0, \text{ 得 } b < 0 \text{ 或 } b > 1.$$

(3) 当 $b = 2$ 时, 由 (2) 可得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = -b = -2 \end{cases}$, 对 $y = x^2$ 求导可得 $y' = 2x$,

∴ 抛物线 C_2 在点,

∴ $M=(x_1, x_1^2), N(x_2, x_2^2)$ 处的切线的斜率分别为 $k_M=2x_1$,

$k_N=2x_2$,

∴ 在点 M, N 处的切线方程分别为 $l_M: y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1), l_N: y - x_2^2 = 2x_2(x - x_2)$,

由 $\begin{cases} y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1) \\ y - x_2^2 = 2x_2(x - x_2) \end{cases} (x_1 \neq x_2)$, 解得交点 R 的坐标 (x, y) .

满足 $\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = x_1 \cdot x_2 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = \frac{k}{2} \\ y = -2 \end{cases}$, ∴ R 点在定直线 $y = -2$ 上.

【点睛】关键点点睛: 本题主要考查了曲线的轨迹方程问题以及切线问题, 难度较大, 解答本题的关键在于联立方程结合韦达定理计算以及转化为坐标运算.

47. (2025·甘肃白银·三模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线的方程为 $y = \frac{\sqrt{7}}{3}x$, 虚轴的一个端点到渐近线的距离为 $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. 双曲线 C 的右焦点为 F , 点 M 在 C 上, 且 $MF \perp x$ 轴, 过点 M 与 C 相切的直线 l 与 x 轴交于点 P .

(1) 求双曲线 C 的方程.

(2) 若点 M 在 x 轴上方, 求以线段 MP 为直径的圆的一般方程.

(3) 过点 P 的直线交双曲线 C 于 D, E 两点 (点 D 在双曲线的左支上, 且不为左顶点), G 为线段 PF 的中点, 直线 GE 与 MF 交于点 H , 求证: 直线 DH 与 x 轴平行.

【答案】(1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

(2) $x^2 + y^2 - \frac{25}{4}x - \frac{7}{3}y + 9 = 0$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 依题意 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{7}}{3}$, 再由虚轴的顶点到渐近线的距离求出 b , 即可求出 a , 从而得解;

(2) 首先求出 M 点坐标, 设 $l: x = my + n$, 联立直线与双曲线方程, 由 $\Delta = 0$ 得到 $7m^2 + n^2 - 9 = 0$, 再由点在直线上, 得到 $4 = \frac{7}{3}m + n$, 即可求出 m, n 的值, 从而求出 P 点坐标, 即可得解;

(3) 设直线 DE 的方程为 $x = ky + \frac{9}{4}$, $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$, 联立直线与双曲线方程, 消元、列出韦达定理, 表示出 H 点的坐标, 即可得解.

【详解】(1) 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

由一条渐近线的方程为 $y = \frac{\sqrt{7}}{3}x$, 得 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{7}}{3}$,

由虚轴的一个端点到渐近线的距离为 $\frac{3\sqrt{7}}{4}$, 不妨设一个端点为 $(0, b)$, 则 $\frac{3b}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$,

所以 $b = \sqrt{7}, a = 3$,

则双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$.

(2) 由 (1) 知点 $F(4, 0)$, 因为点 M 在 C 上, 且 $MF \perp x$ 轴, 所以 $M(4, \frac{7}{3})$.

设 $l: x = my + n$, 与双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 联立,

得 $(7m^2-9)y^2+14mny+7n^2-63=0$. 因为直线 l 与双曲线 C 相切,
所以 $\Delta=14^2m^2n^2-4(7m^2-9)(7n^2-63)=0$, 整理得 $7m^2+n^2-9=0$ ①,

又直线 $l: x=my+n$ 过点 $M(4, \frac{7}{3})$, 得 $4=\frac{7}{3}m+n$ ②,

由①②得 $m=\frac{3}{4}, n=\frac{9}{4}$, 所以直线 l 的方程为 $x=\frac{3}{4}y+\frac{9}{4}$,

所以点 P 的坐标为 $(\frac{9}{4}, 0)$,

所以以线段 MP 为直径的圆的方程为 $(x-\frac{9}{4})(x-4)+(y-0)(y-\frac{7}{3})=0$,

即 $x^2+y^2-\frac{25}{4}x-\frac{7}{3}y+9=0$.

(3) 如图, 设直线 DE 的方程为 $x=ky+\frac{9}{4}, D(x_1, y_1), E(x_2, y_2), G(\frac{25}{8}, 0)$,

将 $x=ky+\frac{9}{4}$ 代入 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$,

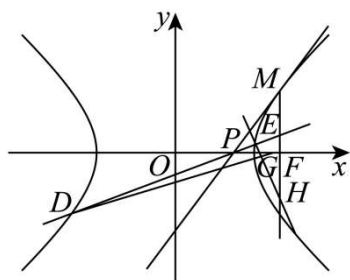
整理得 $(7k^2-9)y^2+\frac{63}{2}ky-\frac{441}{16}=0$, 则 $\begin{cases} y_1+y_2=-\frac{63k}{2(7k^2-9)} \\ y_1y_2=-\frac{441}{16(7k^2-9)} \end{cases}$,

得 $\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\frac{8}{7}k$, 得 $y_1=\frac{7y_2}{8ky_2-7}$,

直线 EG 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-\frac{25}{8}}(x-\frac{25}{8})$, 令 $x=4$, 得 $H(4, \frac{7y_2}{8x_2-25})$,

而 $\frac{7y_2}{8x_2-25}=\frac{7y_2}{8(ky_2+\frac{9}{4})-25}=\frac{7y_2}{8ky_2-7}=y_1$,

所以 $H(4, y_1)$, 即直线 DH 与 x 轴平行.



题型十 圆锥曲线新定义问题

【技巧通法·提分快招】

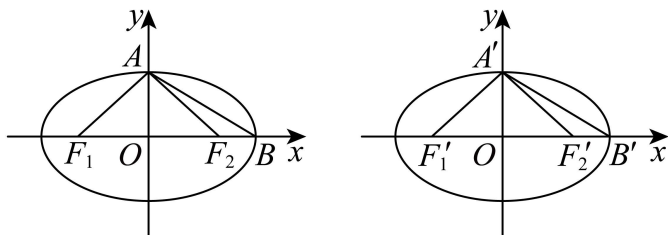
圆锥曲线背景下的新定义问题处理思路

- 1、明确新定义: 首先仔细阅读题目, 明确新定义的内容、符号及其含义。
- 2、联系常规知识: 将新定义与圆锥曲线的第一、第二定义或标准方程等常规知识联系起来, 找出它们的相似之处或转换关系。
- 3、建立数学模型: 根据新定义, 建立相应的数学模型或方程, 利用解析几何或代数方法进行求解。
- 4、验证与推理: 在求解过程中, 注意验证每一步推理的正确性, 确保最终答案符合题目要求。
- 5、灵活应用: 对于复杂问题, 可能需要综合运用多种数学知识和方法, 灵活应对。

48. (2025·江西·模拟预测) 定义: 由椭圆的一个焦点和长轴的一个顶点 (焦点与顶点在短轴同侧) 及短轴的一个顶点组成的三角形称为该椭圆的“焦顶三角形”. 如果两个椭圆的“焦顶三角形”相似, 则称这两个椭圆是“相似椭圆”, 并将三角形的相似比称为椭圆的相似比.

(1) 求证: 两个椭圆是“相似椭圆”的充要条件是离心率相等;

(2) 如图, 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 椭圆 $C_2: \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1 (a' > b' > 0)$ 的离心率为 e' , C_1 与 C_2 相似, 且 C_1 与 C_2 的相似比为 $k:1$, 若 $\triangle AF_2B$ 的面积为 S , 求 $\triangle A'F_1'F_2'$ 的面积 (用 e', k, S 表示);



(3) 若椭圆 $C_3: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 写出与椭圆 C_3 相似且长半轴长为 a , 焦点在 x 轴上的椭圆 C_a 的标准方程. 若在椭圆 C_a 上存在两点 M, N 关于直线 $y = \frac{x}{2} - 3$ 对称, 求椭圆 C_a 的“焦顶三角形”的周长的取值范围.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{2e'S}{(1-e')k^2}$

(3) $(18\sqrt{2} - 9 + 9\sqrt{3}, +\infty)$

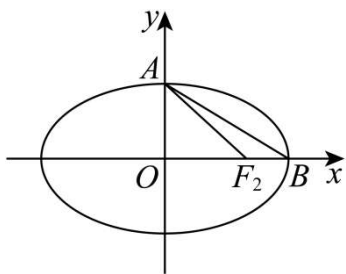
【分析】(1) 根据相似三角形对应角相等, 结合三角函数定义即可得证;

(2) 先求 $\triangle AF_1F_2$ 和 $\triangle AF_2B$ 的面积之比, 然后结合相似比即可得解;

(3) 设直线 MN 的方程为 $y = -2x + t$, 联立椭圆方程消元, 利用韦达定理表示出 MN 的中点坐标, 代入已知方程求出参数, 然后结合判别式可求得 a 的范围, 即可求得“焦顶三角形”的周长范围.

【详解】(1) 若两个椭圆是“相似椭圆”, 则“焦顶三角形”的三个对应角相等.

如图, 以焦点为顶点的三角形内角必为钝角, 故 $\angle AF_2B$ 相等, 则 $\angle AF_2O$ 相等,



所以 $\tan \angle AF_2O = \frac{|AO|}{|F_2O|} = \frac{b}{c}$ 相等, 而 $\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}$, 所以 $\frac{c}{a}$ 相等, 即离心率相等;

若离心率相等, 则 $\frac{c}{a}$ 相等, 则 $\tan \angle ABO = \frac{|AO|}{|BO|} = \frac{b}{a}$ 相等, 则 $\angle ABO$ 相等;

同理, $\tan \angle AF_2O = \frac{|AO|}{|F_2O|} = \frac{b}{c}$ 相等, 则 $\angle AF_2O$ 相等, 所以 $\angle AF_2B$ 相等;

所以两个椭圆的“焦顶三角形”相似, 所以两个椭圆是“相似椭圆”.

故两个椭圆是“相似椭圆”的充要条件是离心率相等.

(2) 设椭圆 C_1 的半焦距为 c .

因为椭圆 C_2 的离心率为 e' , 椭圆 C_2 与椭圆 C_1 相似, 所以椭圆 C_1 的离心率也为 e' ,

若 $\triangle AF_2B$ 的面积为 S , 又 $\triangle AF_1F_2$ 的面积与 $\triangle AF_2B$ 的面积之比为 $2c:(a-c)$,

所以 $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $\frac{2cS}{a-c}$.

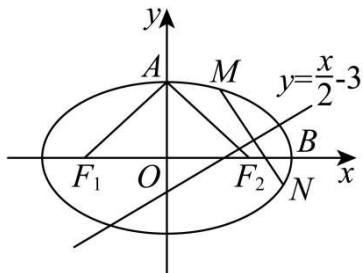
因为 C_1 与 C_2 的相似比为 $k:1$,

所以 $\triangle AF_1F_2$ 的面积与 $\triangle A'F_1'F_2'$ 的面积之比为 $k^2:1$,

$$\text{所以 } \triangle A'F_1'F_2' \text{ 的面积为 } \frac{2cS}{(a-c)k^2} = \frac{2\frac{c}{a}S}{(1-\frac{c}{a})k^2} = \frac{2e'S}{(1-e')k^2}.$$

(3) 由离心率相等可知椭圆 C_a 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{2}} = 1 (a > 0)$,

如图, 设直线 MN 的方程为 $y = -2x + t$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, MN 的中点为 (x_0, y_0) .



由 $\begin{cases} y = -2x + t, \\ x^2 + 2y^2 = a^2, \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $9x^2 - 8tx + 2t^2 - a^2 = 0$,

则 $\Delta = 64t^2 - 36(2t^2 - a^2) > 0$, 即 $a^2 > \frac{2}{9}t^2$, $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4}{9}t$, $y_0 = \frac{t}{9}$,

由 MN 的中点在直线 $y = \frac{x}{2} - 3$ 上, 得 $\frac{t}{9} = \frac{2}{9}t - 3$, 解得 $t = 27$,

因此 $a^2 > 162$, 而 $a > 0$, 解得 $a > 9\sqrt{2}$,

椭圆 $C_a: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{2}} = 1 (a > 0)$ 中, 短半轴长 $b = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 半焦距 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

所以椭圆 C_a 的“焦顶三角形”的周长为 $a + a - c + \sqrt{a^2 + b^2} = a + a - \frac{\sqrt{2}}{2}a + \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}$
 $= 2a - \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{6}}{2}a > 2 \times 9\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times 9\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \times 9\sqrt{2} = 18\sqrt{2} - 9 + 9\sqrt{3}$.

故椭圆 C_a 的“焦顶三角形”的周长的取值范围是 $(18\sqrt{2} - 9 + 9\sqrt{3}, +\infty)$.

49. (2025·海南·模拟预测) 定义: 对椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 及任意一点 $P(x_0, y_0)$, 称直线 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ 为 C 关于点 P 的“极线”.

结论 1: 若点 P 在椭圆 C 上, 则 C 关于点 P 的极线就是 C 在点 P 处的切线.

结论 2 (椭圆的光学性质): 从椭圆一个焦点发出的光线照射到椭圆上, 其反射光线会经过另一个焦点.

试根据上面的定义和结论解决下列问题:

已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的两个焦点, C 关于点 $P(-4, 0)$ 的极线 l_P 与 C 相交于 A, B 两点.

(1) 求 $|AB|$;

(2) 设 C 在点 A 处的切线为 l_A , 在点 B 处的切线为 l_B , 过在 l_P 上且在 C 外一点 D 作 C 的两条切线, 切点分别为 M, N , 证明: 直线 MN, l_A, l_B 相交于一点;

(3) 若 $Q(m, n)$ 是 C 上除顶点以外的任意一点, 直线 QF_1 和 QF_2 分别与直线 $l: \frac{mx}{4} + \frac{ny}{3} = 0$ 相交于点 S, T , 证明: $|QS| + |QT|$ 为定值.

【答案】(1) 3

(2) 证明见解析

(3) 证明见解析

【分析】(1) 先求 l_P 的方程为 $x = -1$, 联立 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 可得 $|AB| = 3$;

(2) 先求得 l_A 和 l_B 交于点 $P(-4, 0)$, 再求得直线 MN 的方程为 $-\frac{x}{4} + \frac{y_D y}{3} = 1$, 也过 $P(-4, 0)$, 即可证;

(3) C 在 Q 点处的切线方程为 $l_Q: \frac{mx}{4} + \frac{ny}{3} = 1$, 则 l 与 l_Q 平行, 由椭圆的光学性质可得 $|QS| + |QT| = |QF_1| + |QF_2|$, 即为定值.

【详解】(1) 根据定义, 可得 l_P 的方程为 $\frac{-4x}{4} = 1$, 即 $x = -1$,

将其代入 C 的方程得 $\frac{1}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{3}{2}$,

不妨取 $A(-1, \frac{3}{2})$, $B(-1, -\frac{3}{2})$, 所以 $|AB| = 2 \times \frac{3}{2} = 3$.

(2) 根据所给结论可知 l_A, l_B 分别是 C 关于点 A, B 的极线,

如图 (1), 取 $A(-1, \frac{3}{2})$, $B(-1, -\frac{3}{2})$, 则 $l_A: -\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$, $l_B: -\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$.

由 $\begin{cases} -\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1, \\ -\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -4, \\ y = 0, \end{cases}$ 所以 l_A 和 l_B 交于点 $P(-4, 0)$,

要证明直线 MN, l_A, l_B 相交于一点, 只需证明直线 MN 过点 $P(-4, 0)$ 即可.

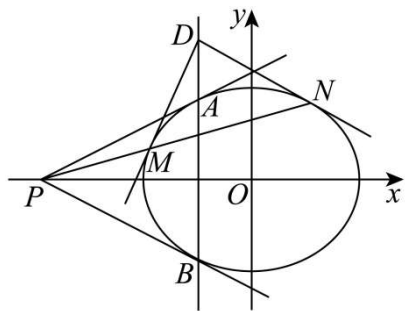
设 $M(x_M, y_M), N(x_N, y_N), D(-1, y_D)$.

根据所给结论, 可知直线 $DM: \frac{x_M x}{4} + \frac{y_M y}{3} = 1$, 直线 $DN: \frac{x_N x}{4} + \frac{y_N y}{3} = 1$.

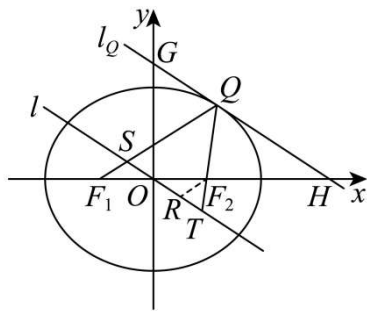
因为直线 DM 和 DN 都经过点 $D(-1, y_D)$, 所以 $\begin{cases} -\frac{x_M}{4} + \frac{y_M y_D}{3} = 1 \\ -\frac{x_N}{4} + \frac{y_N y_D}{3} = 1 \end{cases}$,

所以直线 MN 的方程为 $-\frac{x}{4} + \frac{y_D y}{3} = 1$, 将 $(-4, 0)$ 代入, 得 $-\frac{-4}{4} + \frac{y_D \times 0}{3} = 1$, 方程也成立,

所以直线 MN 过点 $P(-4, 0)$, 故直线 MN, l_A, l_B 相交于一点.



图(1)



图(2)

(3) 由题意, C 在 Q 点处的切线方程为 $l_Q: \frac{mx}{4} + \frac{ny}{3} = 1$, 则 l 与 l_Q 平行, 且经过坐标原点.

如图 (2) 所示, 由椭圆的光学性质, 可知 $\angle GQS = \angle HQT$.

又因为 $l \parallel l_Q$, 所以 $\angle GQS = \angle QST$, $\angle HQT = \angle QTS$, 所以 $\angle QST = \angle QTS$, 所以 $|QS| = |QT|$.

过 F_2 作 $F_2 R \parallel QS$, 与 l 交于点 R , 则 $\angle F_2 R T = \angle QST = \angle QTS$, 所以 $|F_2 R| = |F_2 T|$.

另一方面, 因为 $|OF_1| = |OF_2|$, $\angle SOF_1 = \angle ROF_2$, $\angle SF_1 O = \angle RF_2 O$, 所以 $\triangle F_1 S O \cong \triangle F_2 R O$,

从而 $|F_1 S| = |F_2 R|$, 所以 $|F_1 S| = |F_2 T|$.

因此 $|QS| + |QT| = |QS| + |F_1S| + |QT| - |F_2T| = |QF_1| + |QF_2| = 4$, 故 $|QS| + |QT|$ 为定值.

【点睛】关键点点睛: 本题第二问证明三点共线, 先求两条直线的交点, 再证交点在第三条直线上即可. 第三问先考虑 C 在 Q 点处的切线方程为 $l_Q: \frac{mx}{4} + \frac{ny}{3} = 1$ 与 l 平行, 进而根据椭圆的光学性质和平面几何相关知识可得.

50. (24-25 高三下·山东·月考) 对于抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 给定一点 $M(x_0, 0)$, 若抛物线上存在两点 A, B , 使得 $|MA| = |MB|$, 且 AB 不与 x 轴垂直, 则称弦 AB 是抛物线的一条“ x_0 -伴随弦”. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 存在“ x_0 -伴随弦”.

(1) 求 x_0 的取值范围.

(2) 求 x_0 -伴随弦的中点 S 的轨迹方程.(用 x_0 表示)

(3) x_0 -伴随弦的弦长是否有最大值? 若有, 求出最大值(用 x_0 表示); 若没有, 请说明理由.

【答案】(1) $(2, +\infty)$

(2) $x = x_0 - 2 (0 < |y| < 2\sqrt{x_0 - 2})$

(3) 当 $x_0 \in (2, 3]$ 时无最大值, 当 $x_0 \in (3, +\infty)$ 时有最大值, 且最大值为 $2x_0 - 2$.

【分析】(1) 设 $|MA| = |MB| = r$, 条件可转化存在 r 使得为直线 $y = r^2$ 与抛物线 $y = x^2 + (4 - 2x_0)x + x_0^2$ 在 y 轴上及其右侧有两个交点, 结合二次函数图象列不等式可求结论;

(2) 设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, 证明 S 的横坐标在定直线 $x = x_0 - 2$ 上, 又 $y^2 = 4x$ 与直线 $x = x_0 - 2$ 交点为 $(x_0 - 2, \pm 2\sqrt{x_0 - 2})$ 即可求解;

(3) 由两点的距离公式有 $|AB| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + \left(\frac{y_2^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}\right)^2}$, 利用基本不等式有 $x_0 = 2 + \frac{y_1^2 + y_2^2}{8} \geq 2 + \frac{2|y_1 y_2|}{8}$, 可得 $x_0 > 2 + \frac{|y_1 y_2|}{4}$, 解得 $4(x_0 - 2) > y_1 y_2 > 4(2 - x_0)$, 把 $|AB| =$

$\sqrt{-\frac{1}{4}(y_1 y_2)^2 - 2y_1 y_2 + 4x_0(x_0 - 2)}$ 看成关于 $y_1 y_2$ 的二次函数, 最后利用二次函数的性质即可求解.

【详解】(1) 设 $|MA| = |MB| = r (r > 0)$, 则点 A, B 在圆 $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ 上,

由 $\begin{cases} (x - x_0)^2 + y^2 = r^2 \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 得 $x^2 + (4 - 2x_0)x + x_0^2 = r^2$.

由题意知, 存在 r 使得这个关于 x 的方程有两个不相等的非负根.

转化为直线 $y = r^2$ 与抛物线 $y = x^2 + (4 - 2x_0)x + x_0^2$ 在 y 轴上及其右侧有两个交点,

只需抛物线 $y = x^2 + (4 - 2x_0)x + x_0^2$ 的对称轴 $x = x_0 - 2$ 在 y 轴的右侧,

即 $x_0 - 2 > 0$, 得 $x_0 > 2$,

$\therefore x_0$ 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

(2) 设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, 则 $S\left(\frac{y_1^2 + y_2^2}{8}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

由 $|MA| = |MB|$, 得 $MS \perp AB$.

\therefore 直线 AB 的斜率为 $\frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}} = \frac{4}{y_1 + y_2}$,

\therefore 直线 MS 的斜率为 $-\frac{y_1 + y_2}{4}$, $\therefore MS: y = -\frac{y_1 + y_2}{4}(x - x_0)$.

将点 S 的坐标代入上面的方程, 整理得 $\frac{y_1^2 + y_2^2}{8} = x_0 - 2$,

∴ 点 S 在直线 $x = x_0 - 2$ 上.

抛物线 $y^2 = 4x$ 与直线 $x = x_0 - 2$ 的交点为 $(x_0 - 2, \pm 2\sqrt{x_0 - 2})$,

显然点 S 的纵坐标的绝对值小于 $2\sqrt{x_0 - 2}$,

又 AB 不与 x 轴垂直, 故 $y \neq 0$,

∴ 点 S 的轨迹方程为 $x = x_0 - 2 (0 < |y| < 2\sqrt{x_0 - 2})$.

$$\begin{aligned} (3) |AB| &= \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + \left(\frac{y_2^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{16}(y_2 - y_1)^2(y_1 + y_2)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 \left[1 + \frac{1}{16}(y_1 + y_2)^2\right]} \\ &= \sqrt{(y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2) \left[1 + \frac{1}{16}(y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2)\right]} = \sqrt{[8(x_0 - 2) - 2y_1y_2] \left(\frac{x_0}{2} + \frac{y_1y_2}{8}\right)} \\ &= \sqrt{-\frac{1}{4}(y_1y_2)^2 - 2y_1y_2 + 4x_0(x_0 - 2)}. \end{aligned}$$

由 (2) 得 $8(x_0 - 2) = y_1^2 + y_2^2 > 2|y_1y_2|$,

故 $|y_1y_2| < 4(x_0 - 2)$, 即 $8 - 4x_0 < y_1y_2 < 4x_0 - 8$.

又 $y = -\frac{1}{4}(y_1y_2)^2 - 2y_1y_2 + 4x_0(x_0 - 2)$ 为关于 y_1y_2 的二次函数且当且仅当 $y_1y_2 = -4$ 时取得最大值 $4(x_0 - 1)^2$,

当 $8 - 4x_0 < -4$, 即 $x_0 > 3$ 时, 弦长有最大值 $2x_0 - 2$, 当且仅当 $y_1y_2 = -4$ 时取等号,

当 $2 < x_0 \leq 3$ 时, $y_1y_2 > 8 - 4x_0 \geq -4$, 则无最大值.

综上所述, 当 $x_0 \in (2, 3]$ 时无最大值, 当 $x_0 \in (3, +\infty)$ 时有最大值, 且最大值为 $2x_0 - 2$.

51. 一般地, 平面曲线 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (A, C, D, E, F 为实常数且 $A^2 + C^2 \neq 0$) 在点 $Q(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $Ax_0x + Cy_0y + D\frac{x+x_0}{2} + E\frac{y+y_0}{2} + F = 0$. 对于椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上不同的两点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 称 $\lambda x_1x_2 + \mu y_1y_2$ 为椭圆 Γ 在 M, N 两点处的线性积, 并记为 $L(\lambda, \mu)$.

(1) 证明: $\left|L\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}\right)\right| \leq 1$.

(2) 已知 $L\left(\frac{1}{a^4}, \frac{1}{b^4}\right) = 0$, 椭圆 Γ 在 M, N 两点处的切线交点的轨迹为曲线 R .

(i) 求曲线 R 的方程;

(ii) 已知 B 为椭圆 Γ 的上顶点, 若点 B 与曲线 R 上的点之间的距离的最大值为 3, 最小值为 1, 求椭圆 Γ 的方程.

【答案】(1) 证明见解析

(2) (i) $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$; (ii) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$

【分析】(1) 利用基本不等式或三角换元可证 $\left|L\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}\right)\right| \leq 1$;

(2) (i) 根据 $L\left(\frac{1}{a^4}, \frac{1}{b^4}\right) = 0$ 可得切线垂直, 设出交点坐标和对应的切线方程, 联立切线方程和椭圆方程后结合判别式为零及斜率可得交点的轨迹圆的方程. (ii) 求 B 到圆心的距离后可求线段长的最值.

【详解】(1) 法一: 因为点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 在椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上,

所以 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1,$

所以 $\left| L\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}\right) \right| = \left| \frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\left| \frac{2x_1x_2}{a^2} \right| + \left| \frac{2y_1y_2}{b^2} \right| \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{b^2} \right) = 1,$

当且仅当 $x_1 = -x_2, y_1 = -y_2$ 时等号成立.

故 $\left| L\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}\right) \right| \leq 1.$

法二: 因为点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 在椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上,

所以 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1.$

设 $\frac{x_1}{a} = \cos\alpha, \frac{y_1}{b} = \sin\alpha, \frac{x_2}{a} = \cos\beta, \frac{y_2}{b} = \sin\beta$, 其中 $\alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in [0, 2\pi)$,

则 $L\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}\right) = \frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta),$

所以 $\left| L\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}\right) \right| = |\cos(\alpha - \beta)| \leq 1$, 当 $|\alpha - \beta| = \pi$ 时等号成立.

(2) (i) 由 $L\left(\frac{1}{a^4}, \frac{1}{b^4}\right) = 0$ 得 $\frac{x_1x_2}{a^4} + \frac{y_1y_2}{b^4} = 0.$

由题可得椭圆 Γ 在点 $M(x_1, y_1)$ 处的切线 l_1 的方程为 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1,$

椭圆 Γ 在点 $N(x_2, y_2)$ 处的切线 l_2 的方程为 $\frac{x_2x}{a^2} + \frac{y_2y}{b^2} = 1,$

则由 $\frac{x_1x_2}{a^4} + \frac{y_1y_2}{b^4} = 0$ 得 $l_1 \perp l_2.$

当切线 l_1, l_2 的斜率都存在且都不为 0 时, 设 l_1 与 l_2 交于点 $P(x_P, y_P) (x_P \neq \pm a \text{ 且 } y_P \neq \pm b),$

过点 P 的椭圆 Γ 的切线方程为 $y - y_P = k(x - x_P) (k \neq 0),$

由 $\begin{cases} y - y_P = k(x - x_P) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ 得 $(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2k(y_P - kx_P)x + a^2(y_P - kx_P)^2 - a^2b^2 = 0,$

则 $\Delta = [2a^2k(y_P - kx_P)]^2 - 4(a^2k^2 + b^2)[a^2(y_P - kx_P)^2 - a^2b^2] = 0,$

整理得 $(x_P^2 - a^2)k^2 - 2x_Py_Pk + y_P^2 - b^2 = 0.$

显然 k_{l_1}, k_{l_2} 是上述方程的两个根, 故 $k_{l_1}k_{l_2} = \frac{y_P^2 - b^2}{x_P^2 - a^2} = -1,$

所以 $x_P^2 + y_P^2 = a^2 + b^2 (x_P \neq \pm a \text{ 且 } y_P \neq \pm b).$

当切线 l_1, l_2 中一条切线的斜率不存在, 一条切线的斜率为 0 时,

可得点 P 的坐标为 (a, b) 或 $(-a, b)$ 或 $(a, -b)$ 或 $(-a, -b),$

此时点 P 也满足 $x_P^2 + y_P^2 = a^2 + b^2.$

综上, $x_P^2 + y_P^2 = a^2 + b^2,$

故曲线 R 的方程为 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$

(ii) 易知 $B(0, b)$, 由 (i) 知曲线 R 是以坐标原点为圆心, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 为半径的圆,

因为 B 与曲线 R 上的点之间的距离的最大值为 3, 最小值为 1,

所以 $\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} + b = 3 \\ \sqrt{a^2 + b^2} - b = 1 \end{cases}$, 得 $a = \sqrt{3}, b = 1,$

所以椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1.$

检测 I 组 重难知识巩固

52. 已知 O 为坐标原点, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个顶点坐标为 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 短轴长为 2.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知直线交 C 于 P, Q 两点, 直线 PQ 与 x 轴不平行, 记直线 AP, BQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 = 2k_2$, 证明: 直线 PQ 恒过定点.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 根据椭圆的顶点坐标和短轴长的定义求出 a, b 的值, 进而得到椭圆方程;

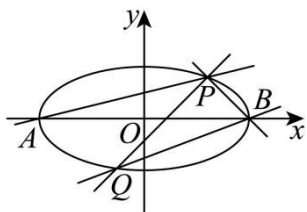
(2) 设出直线 PQ 的方程, 与椭圆方程联立, 利用韦达定理表示出 $y_1 + y_2$ 和 $y_1 y_2$, 再根据 $k_1 = 2k_2$ 建立等式, 化简后求出直线 PQ 恒过的定点.

【详解】(1) 由题意得 $a = 2$,

因为短轴长为 2, 所以 $2b = 2$,

解得 $b = 1$, 故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设直线 PQ 方程为 $x = ty + n (n \neq \pm 2), P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 如图,



联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ x = ty + n, \end{cases}$ 消去 x 得 $(t^2 + 4)y^2 + 2tny + n^2 - 4 = 0$,

则 $\Delta = (2tn)^2 - 4(t^2 + 4)(n^2 - 4) = 16(t^2 - n^2 + 4) > 0$,

故 $y_1 + y_2 = \frac{-2tn}{t^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{n^2 - 4}{t^2 + 4}$,

所以 $x_1 + x_2 = ty_1 + n + ty_2 + n = t(y_1 + y_2) + 2n = \frac{8n}{t^2 + 4}$,

$x_1 x_2 = (ty_1 + n)(ty_2 + n) = t^2 y_1 y_2 + tn(y_1 + y_2) + n^2 = \frac{4n^2 - 4t^2}{t^2 + 4}$,

因为点 $P(x_1, y_1)$ 在 C 上, 所以 $y_1^2 = \frac{4 - x_1^2}{4}$,

故 $k_1 k_{BP} = \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{y_1}{x_1 - 2} = \frac{y_1^2}{x_1^2 - 4} = \frac{\frac{4 - x_1^2}{4}}{x_1^2 - 4} = -\frac{1}{4}$,

所以 $k_1 = -\frac{1}{4k_{BP}}$.

因为 $k_1 = 2k_2$, 所以 $k_2 k_{BP} = -\frac{1}{8}$,

$$\begin{aligned} \text{故 } k_2 k_{BP} &= \frac{y_2}{x_2 - 2} \cdot \frac{y_1}{x_1 - 2} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} \\ &= \frac{\frac{n^2 - 4}{t^2 + 4}}{\frac{4n^2 - 4t^2}{t^2 + 4} - 2 \times \frac{8n}{t^2 + 4} + 4} = \frac{n^2 - 4}{4n^2 - 16n + 16} = \frac{(n+2)}{4(n-2)} = -\frac{1}{8}, \end{aligned}$$

解得 $n = -\frac{2}{3}$, 满足 $\Delta > 0$,

所以直线 PQ 的方程为 $x = ty - \frac{2}{3}$, 故直线 PQ 恒过定点 $(-\frac{2}{3}, 0)$.

53. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知 O 为坐标原点, 点 P 在 C 上, 点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{QF}$, 求直线 OQ 斜率的最大值.

【答案】(1) $y^2 = 4x$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【分析】(1) 利用抛物线的定义建立方程, 求解参数, 进而得到抛物线方程即可.

(2) 利用给定条件表示出目标式, 再分类讨论并结合基本不等式求解最值即可.

【详解】(1) 由题意得抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点为 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$,

因为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2,

且该抛物线焦点到准线的距离为 $\frac{p}{2} - (-\frac{p}{2}) = p = 2$,

所以该抛物线的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 如图, 设 $Q(x_0, y_0)$, 则 $\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{QF} = (3 - 3x_0, -3y_0)$,

所以 $P(4x_0 - 3, 4y_0)$, 由 P 在抛物线上可得 $(4y_0)^2 = 4(4x_0 - 3)$,

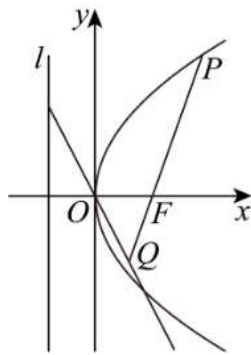
即 $x_0 = \frac{4y_0^2 + 3}{4}$, 所以直线 OQ 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0} = \frac{4y_0}{4y_0^2 + 3}$,

当 $y_0 = 0$ 时, $k_{OQ} = 0$; 当 $y_0 < 0$ 时, $k_{OQ} < 0$;

当 $y_0 > 0$ 时, $k_{OQ} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{y_0}{\frac{4y_0^2 + 3}{4}} = \frac{4}{4y_0 + \frac{3}{y_0}} \leq \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

当且仅当 $4y_0 = \frac{3}{y_0}$, 即 $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 等号成立,

综上, 直线 OQ 的斜率的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



54. 已知抛物线 C 的顶点为坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 直线 $l: x = 4$ 交 C 于 M, Q 两点, 且 $OM \perp OQ$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若点 P 是 C 的准线上的一点, 过点 P 作 C 的两条切线 PA, PB , 其中 A, B 为切点, 求点 O 到直线 AB 的距离的最大值.

【答案】(1) $y^2 = 4x$;

(2) 1.

【分析】(1) 利用抛物线的对称性, 确定抛物线过的点求出 C 的方程.

(2) 设出点 P 的坐标及切线方程, 再联立切线与抛物线方程求出切点 A, B 的坐标, 进而求出直线 AB 过

的定点即得.

【详解】(1) 依题意, 由抛物线的对称性知, 点 M, Q 关于 x 轴对称, 由 $OM \perp OQ$, 得 $\angle MOx = 45^\circ$, 不妨令点 M 在第一象限, 则 $M(4, 4)$, 设抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2px (p \neq 0)$, 即有 $4^2 = 2p \cdot 4$, 解得 $p = 2$, 所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 由 (1) 知, 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线方程为 $x = -1$, 设点 $P(-1, t) (t \in R)$,

显然切线 PA, PB 不垂直于坐标轴, 设切线方程为 $x = k(y - t) - 1$,

由 $\begin{cases} x = k(y - t) - 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 消去 x 并整理得 $y^2 - 4ky + 4kt + 4 = 0$ ①, 于是 $\Delta = 16k^2 - 16kt - 16 = 0$,

设方程 $k^2 - kt - 1 = 0$ 的一个根为 k_0 , 则该方程的另一根为 $-\frac{1}{k_0}$,

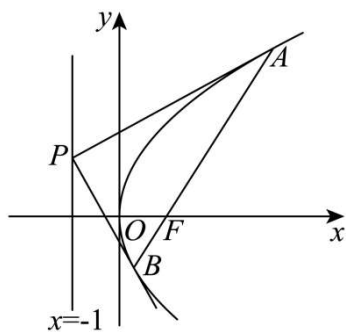
不妨令切线 PA 的方程为 $x = k_0(y - t) - 1$, 方程①中 k 取 k_0 得点 A 的纵坐标为 $2k_0$, 其横坐标为 $\frac{(2k_0)^2}{4} = k_0^2$, 即点 $A(k_0^2, 2k_0)$,

同理得 $B(\frac{1}{k_0^2}, -\frac{2}{k_0})$, 当 $k_0 \neq \pm 1$ 时, 直线 AB 方程为 $y - 2k_0 = \frac{2k_0 + \frac{2}{k_0}}{k_0^2 - \frac{1}{k_0^2}}(x - k_0^2)$, 整理得 $y = \frac{2k_0}{k_0^2 - 1}(x -$

1),

当 $k_0 = -1$ 或 $k_0 = 1$ 时, 直线 AB 方程为 $x = 1$, 因此直线 AB 过定点 $F(1, 0)$, $|OF| = 1$ 为定值,

所以当 $OF \perp AB$ 时, 点 O 到直线 AB 的距离取得最大值 1.



【点睛】思路点睛: 经过圆锥曲线上满足某条件的两个动点的直线过定点问题, 可探求出这两个动点坐标, 求出直线方程, 即可推理计算解决问题.

55. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点是 F_1, F_2 , 且过点 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF_1$ 的周长为 8, $\triangle BF_1F_2$ 的周长为 $4 + 2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 点 $P(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆 C 上, 设点 P 关于 x 轴的对称点为 Q , M 是椭圆 C 上一点, 直线 MP 和 MQ 与 x 轴分别交于点 $E, F (E, F$ 不重合), O 为原点, 证明 $|OE| \cdot |OF|$ 为定值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) 证明见解析

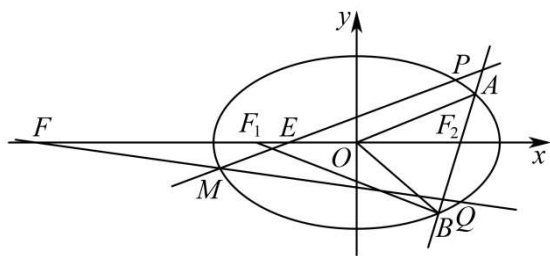
【分析】(1) 已知条件中涉及椭圆的两个特殊三角形计算得参数可得椭圆方程;

(2) 设 $M(x_0, y_0)$, 求出 MP 和 MQ 的方程, 得到 $|OE|, |OF|$ 的表达式, 计算 $|OE| \cdot |OF|$, 因为 $M(x_0, y_0)$ 在椭圆上, 利用椭圆方程化简即可.

【详解】(1) 由 $\triangle ABF_1$ 周长为 $4a = 8$, 则 $a = 2$. $\triangle BF_1F_2$ 周长为 $2a + 2c = 4 + 2\sqrt{2}$, 则 $c = \sqrt{2}$, 所以 $b^2 =$

2,

故椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.



(2) 由于点 $P(\sqrt{2}, 1)$ 关于 x 轴的对称点为 Q , 则 $Q(\sqrt{2}, -1)$.

设 $M(x_0, y_0)$, 则有 $x_0^2 + 2y_0^2 = 4$, $x_0 \neq \sqrt{2}$, $y_0 \neq \pm 1$.

直线 MP 的方程为 $y - 1 = \frac{y_0 - 1}{x_0 - \sqrt{2}}(x - \sqrt{2})$, 令 $y = 0$, 可得 $x = \frac{\sqrt{2}y_0 - x_0}{y_0 - 1}$, 所以 $|OE| = \left| \frac{\sqrt{2}y_0 - x_0}{y_0 - 1} \right|$.

直线 MQ 的方程为 $y + 1 = \frac{y_0 + 1}{x_0 - \sqrt{2}}(x - \sqrt{2})$, 令 $y = 0$, 可得 $x = \frac{\sqrt{2}y_0 + x_0}{y_0 + 1}$, 所以 $|OF| = \left| \frac{\sqrt{2}y_0 + x_0}{y_0 + 1} \right|$.

所以 $|OE| \cdot |OF| = \left| \frac{\sqrt{2}y_0 - x_0}{y_0 - 1} \right| \cdot \left| \frac{\sqrt{2}y_0 + x_0}{y_0 + 1} \right| = \left| \frac{2y_0^2 - x_0^2}{y_0^2 - 1} \right| = \left| \frac{2y_0^2 - (4 - 2y_0^2)}{y_0^2 - 1} \right| = 4$, 所以 $|OE| \cdot |OF|$ 为定值.

56. (24-25 高三上·天津河北·期末) 已知直线 $x = 2$ 经过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 且被椭圆 C 截得的线段长为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 椭圆 C 的下顶点为 A , P 是椭圆 C 上一动点, 直线 AP 与圆 $O: x^2 + y^2 = b^2$ 相交于点 M (异于点 A), M 关于 O 的对称点记为 N , 直线 AN 与椭圆 C 相交于点 Q (异于点 A). 设直线 MN, PQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 试探究当 $k_2 \neq 0$ 时, $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值, 并说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) 是定值 $\frac{3}{2}$, 理由见解析

【分析】(1) 运用椭圆的几何性质, 解方程可得 a, b, c , 进而得到所求椭圆方程;

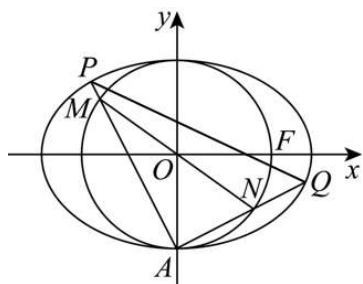
(2) 设直线 AP 的方程, 分别联立椭圆方程和圆的方程求出 P, M 的坐标, 同理可得 Q 的坐标, 运用两点的斜率公式, 分别计算直线 MN 的斜率 k_1 , 直线 PQ 的斜率 k_2 , 即可得证.

【详解】(1) 依题意, 椭圆 C 的半焦距 $c = 2$, 将 $x = 2$ 代入椭圆方程得 $\frac{4}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 则 $\frac{2b^2}{a} = 2\sqrt{2}$, 而 $a^2 = b^2 + 4$, 解得 $a = 2\sqrt{2}, b = 2$,

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 依题意, 直线 AP 的斜率存在, 且不为 0, 设直线 AP 的方程为 $y = kx - 2$,



由 $\begin{cases} y=kx-2 \\ x^2+2y^2=8 \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(1+2k^2)x^2-8kx=0$, 解得 $x=\frac{8k}{1+2k^2}$ 或 0(舍去),

将 $x=\frac{8k}{1+2k^2}$ 代入 $y=kx-2$ 得 $y=\frac{8k^2}{1+2k^2}-2=\frac{4k^2-2}{1+2k^2}$,

则点 $P\left(\frac{8k}{1+2k^2}, \frac{4k^2-2}{2k^2+1}\right)$,

由 $\begin{cases} y=kx-2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(1+k^2)x^2-4kx=0$, 解得 $x=\frac{4k}{1+k^2}$ 或 0(舍去),

将 $x=\frac{4k}{1+k^2}$ 代入 $y=kx-2$ 得 $y=\frac{4k^2}{1+k^2}-2=\frac{2k^2-2}{1+k^2}$,

则点 $M\left(\frac{4k}{1+k^2}, \frac{2k^2-2}{k^2+1}\right)$,

显然 MN 是圆 O 的直径, 则 $AM \perp AN$, 直线 AN 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x-2$,

用 $-\frac{1}{k}$ 代替 k , 得 $Q\left(-\frac{8k}{k^2+2}, \frac{4-2k^2}{2+k^2}\right)$,

直线 MN 的斜率 $k_1=k_{OM}=\frac{2k^2-2}{k^2+1} \cdot \frac{k^2+1}{4k}=\frac{k^2-1}{2k}$,

直线 PQ 的斜率 $k_2=\frac{\frac{4k^2-2}{2k^2+1}-\frac{4-2k^2}{2+k^2}}{\frac{8k}{1+2k^2}-\frac{-8k}{k^2+2}}=\frac{k^2-1}{3k}$,

因为 $k_2 \neq 0$, 所以 $k^2-1 \neq 0$, 故 $k^2 \neq 1$,

所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{k^2-1}{2k} \cdot \frac{3k}{k^2-1}=\frac{3}{2}$, 为定值.

57. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 且点 $A(\sqrt{3}, 1)$ 在椭圆上.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 椭圆 C 的左焦点为 F , 若 T 为直线 $x=-3$ 上一点, 过点 F 且与 TF 垂直的直线交椭圆 C 于 P, Q 两点, 线段 PQ 的中点为 M .

(i) 证明: 点 M 在直线 OT 上 (O 为原点);

(ii) 求 $\triangle OPQ$ 的面积的最大值, 以及此时点 T 的坐标.

【答案】(1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) (i) 证明见解析; (ii) 面积最大值为 $\sqrt{3}$, 点 T 的坐标 $(-3, \pm 1)$.

【分析】(1) 利用离心率和椭圆过的点列方程求解即可;

(2) (i) 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 易知直线 PQ 的斜率不为 0, 设 PQ 的方程为 $x=my-2$, 代入椭圆方程, 韦达定理, 求出 PQ 的中点 M 坐标, 进而有 $k_{OM}=k_{OT}$, 即可证明;

(ii) 由(i)可得 $S_{\triangle OPQ} = \frac{2\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}{m^2+3}$, 利用基本不等式求得 $\triangle OPQ$ 的面积最大值及此时点 T 的坐标.

【详解】(1) 由题知 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\therefore c = \frac{\sqrt{6}}{3}a$, $\therefore b^2 = a^2 - c^2 = \frac{1}{3}a^2$,

又 $\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1$, $\therefore a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$,

\therefore 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) (i) 由题可设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, PQ 的中点为 $M(x_0, y_0)$,

若直线 PQ 的斜率为 0, 不存在满足 $TF \perp PQ$ 的点 T ,

故设 PQ 的方程为 $x = my - 2$,

代入椭圆方程得 $(m^2+3)y^2 - 4my - 2 = 0$,

则 $y_1 + y_2 = \frac{4m}{m^2+3}$, $y_1 \cdot y_2 = \frac{-2}{m^2+3}$, $y_0 = \frac{2m}{m^2+3}$, $x_0 = -\frac{6}{m^2+3}$

$\therefore TF$ 的方程为 $y - 0 = -m(x + 2)$, 令 $x = -3$, 得 $y = m$,

$\therefore k_{OM} = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{m}{3} = k_{OT}$, $\therefore OT$ 过 PQ 的中点, 即点 M 在直线 OT 上.

(ii) 由(i)可得,

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} |OF| |y_1 - y_2| = \frac{\sqrt{16m^2 + 8(m^2+3)}}{m^2+3} = \frac{\sqrt{24(m^2+1)}}{m^2+3} = \frac{2\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}{m^2+3}.$$

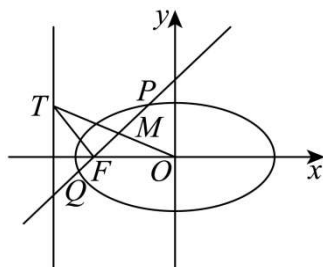
$$\therefore \frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+3} = \frac{\sqrt{m^2+1}}{(m^2+1)+2} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1} + \frac{2}{\sqrt{m^2+1}}},$$

$$\text{而 } \sqrt{m^2+1} + \frac{2}{\sqrt{m^2+1}} \geq 2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+3} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, 2\sqrt{6} \frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+3} \leq \sqrt{3},$$

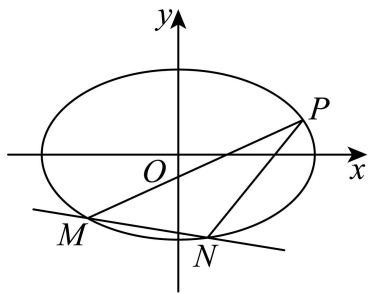
当且仅当 $\sqrt{m^2+1} = \sqrt{2}$, 即 $m = \pm 1$ 时等号成立.

$\therefore S_{\triangle OPQ} \leq \sqrt{3}$, 当且仅当 $m = \pm 1$ 时等号成立.

$\therefore \triangle OPQ$ 的面积最大值为 $\sqrt{3}$, 及此时点 T 的坐标 $(-3, \pm 1)$.



58. (24-25 高三上·山东·期中) 如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的点到其左焦点的最大距离和最小距离分别为 $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ 和 $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, 斜率为 $-\frac{1}{3}$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于异于点 $P(3, 1)$ 的 M , N 两点.



- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 若 $|MN| = \sqrt{10}$, 求直线 l 的方程;
- (3) 当直线 PM , PN 均不与 x 轴垂直时, 设直线 PM 的斜率为 k_1 , 直线 PN 的斜率为 k_2 , 求证: $k_1 k_2$ 为定

值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) $y = -\frac{1}{3}x - 2$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 根据椭圆上的点到其左焦点的最大距离和最小距离分别为 $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ 和 $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, 由 $\begin{cases} a+c=2(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ a-c=2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \end{cases}$ 求解;

(2) 设直线 l 的方程为 $y = -\frac{1}{3}x + m$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + m \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$, 利用韦达定理, 结合弦长公式求解;

(3) 利用 (2) 中的韦达定理, 由 $k_1 k_2 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 3} \cdot \frac{y_2 - 1}{x_2 - 3} = \frac{(-\frac{1}{3}x_1 + m - 1)(-\frac{1}{3}x_2 + m - 1)}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)}$ 证明.

【详解】(1) 解: 由椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的点到其左焦点的最大距离和最小距离分别为 $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ 和 $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$,

结合椭圆的几何性质, 得 $\begin{cases} a+c=2(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ a-c=2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a=2\sqrt{3} \\ c=2\sqrt{2} \end{cases}$, 则 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2$,

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 解: 设直线 l 的方程为 $y = -\frac{1}{3}x + m$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + m \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$ 消去 y , 整理得 $4x^2 - 6mx + 9m^2 - 36 = 0$.

由 $\Delta = (-6m)^2 - 144(m^2 - 4) > 0$, 得 $-\frac{4\sqrt{3}}{3} < m < \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{3m}{2}$, $x_1 x_2 = \frac{9m^2 - 36}{4}$.

$|MN| = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \sqrt{16 - 3m^2} = \sqrt{10}$,

解得 $m = 2$ 或 $m = -2$.

当 $m = 2$ 时, 直线 l 的方程为 $y = -\frac{1}{3}x + 2$, 此时直线 l 过点 $P(3, 1)$;

当 $m = -2$ 时, 直线 l 的方程为 $y = -\frac{1}{3}x - 2$, 满足题目条件.

所以直线 l 的方程为 $y = -\frac{1}{3}x - 2$.

(3) 证明: 因为直线 PM , PN 均不与 x 轴垂直,

所以直线 $l: y = -\frac{1}{3}x + m$ 不经过点 $(3, -1)$ 和 $(3, 1)$, 则 $m \neq 0$ 且 $m \neq 2$,

由 (2) 可知, $k_1 k_2 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 3} \cdot \frac{y_2 - 1}{x_2 - 3} = \frac{(-\frac{1}{3}x_1 + m - 1)(-\frac{1}{3}x_2 + m - 1)}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)}$,

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{9}x_1x_2 - \frac{1}{3}(m-1)(x_1+x_2) + (m-1)^2}{x_1x_2 - 3(x_1+x_2) + 9}, \\
&= \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{9m^2-36}{4} - \frac{1}{3}(m-1) \cdot \frac{3m}{2} + (m-1)^2}{\frac{9m^2-36}{4} - 3 \cdot \frac{3m}{2} + 9} = \frac{3m^2-6m}{9m^2-18m} = \frac{1}{3} \text{ 为定值.}
\end{aligned}$$

【点睛】思路点睛：本题第三问的基本思路是先建立模型 $k_1k_2 = \frac{y_1-1}{x_1-3} \cdot \frac{y_2-1}{x_2-3}$ ，再根据点在直线上进行消元，然后利用韦达定理求解。

59. (25-26 高三上·内蒙古·开学考试) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{3}$ ，离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 求 C 的方程。

(2) 过点 $N(m, 0) (m < 0)$ 作直线 l 与圆 $M: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 相切，且直线 l 与 C 交于 A, B 两点。

① 求 m 的取值范围；

② 求 $|AB|$ (用含 m 的式子表示)。

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) ① $(-6-2\sqrt{13}, 0)$; ② $|AB| = \frac{4\sqrt{3}(2-m)\sqrt{-m^2-12m+16}}{3m^2-12m+16}, (-6-2\sqrt{13} < m < 0)$

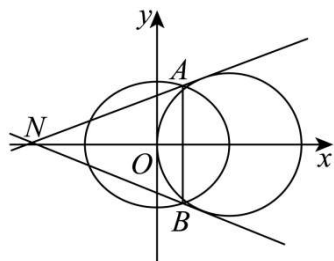
【分析】(1) 根据椭圆的短轴长和离心率，列出 a, b, c 的方程组，求解即得椭圆方程；

(2) ① 依题意设 $l: y = k(x-m) (k \neq 0)$ ，根据直线 l 与圆 $M: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 相切可得 $k^2 = \frac{4}{m^2-4m}$ ，将直线 l 与椭圆方程联立，利用 $\Delta > 0$ 推得 $4k^2 + 3 > m^2k^2$ ，将 $k^2 = \frac{4}{m^2-4m}$ 代入消元即可求得 m 的取值范围；② 由①结论写出韦达定理，利用弦长公式写出弦长，将 $k^2 = \frac{4}{m^2-4m}$ 代入化简即得弦长 $|AB|$ 表达式。

【详解】(1) 由题意可知 $\begin{cases} 2b=2\sqrt{3} \\ \frac{c}{a} = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \end{cases}$ ，

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2)



① 依题意可知直线 l 的斜率存在且不为 0，可设 $l: y = k(x-m) (k \neq 0)$ ，

由直线 l 与圆 $M: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 相切，得 $\frac{|k(2-m)|}{\sqrt{1+k^2}} = 2$ ，整理得 $k^2 = \frac{4}{m^2-4m}$ 。

将 $y = k(x-m)$ 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，可得 $3x^2 + 4k^2(x-m)^2 = 12$ ，

整理得 $(3+4k^2)x^2 - 8mk^2x + 4m^2k^2 - 12 = 0$ ，

则 $\Delta = (-8mk^2)^2 - 4(3+4k^2)(4m^2k^2-12) = 48(4k^2+3-m^2k^2) > 0$, 即 $4k^2+3 > m^2k^2$.

因 $m < 0$, 将 $k^2 = \frac{4}{m^2-4m}$ 代入 $4k^2+3 > m^2k^2$ 并整理得 $m^2+12m-16 < 0$,

解得 $-6-2\sqrt{13} < m < 0$, 故 m 的取值范围为 $(-6-2\sqrt{13}, 0)$.

② 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1+x_2 = \frac{8mk^2}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4m^2k^2-12}{3+4k^2}$,

$$\begin{aligned} \text{于是 } |AB| &= \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{8mk^2}{3+4k^2}\right)^2 - \frac{4(4m^2k^2-12)}{3+4k^2}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}\sqrt{4k^2+3-m^2k^2}}{3+4k^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{将 } k^2 = \frac{4}{m^2-4m} \text{ 代入得: } |AB| &= \frac{4\sqrt{3}\sqrt{1+\frac{4}{m^2-4m}}\sqrt{\frac{16}{m^2-4m}+3-\frac{4m^2}{m^2-4m}}}{3+\frac{16}{m^2-4m}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}|m-2|\sqrt{-m^2-12m+16}}{3m^2-12m+16} = \frac{4\sqrt{3}(2-m)\sqrt{-m^2-12m+16}}{3m^2-12m+16}, (-6-2\sqrt{13} < m < 0). \end{aligned}$$

60. (2025·北京海淀·二模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$. 设直线 $l: y = x + m$ 交椭圆 C 于不同的两点 A, B , 与 y 轴交于点 P .

(1) 当 $m = 0$ 时, 求 $|AB|$ 的值;

(2) 若点 Q 满足 $|PQ| = 3$ 且 $|QA| = |QB|$, 求 $\angle AQB$ 的大小.

【答案】(1) $2\sqrt{3}$

(2) $\frac{\pi}{3}$

【分析】(1) 当 $m = 0$ 时, 将直线 l 的方程与椭圆方程联立, 求出交点的坐标, 再利用弦长公式可求得 $|AB|$ 的值;

(2) 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 设线段 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$, 将直线 l 的方程与椭圆方程联立, 列出韦达定理, 求出 $|PM|, |AB|$, 利用勾股定理求出 $|QM|$, 可求出 $\tan \angle AQM$ 的值, 可得出 $\angle AQM$ 的值, 进而可得出 $\angle AQB$ 的值.

【详解】(1) 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 当 $m = 0$ 时, 直线 l 的方程为 $y = x$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = x \\ x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ y_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ y_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases},$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1+1^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{3}.$$

(2) 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 设线段 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$,

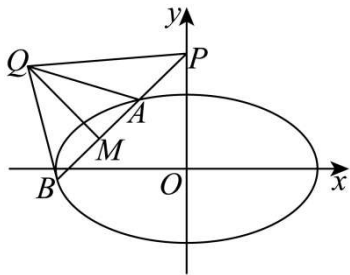
因为 $|QA| = |QB|$, 则 $QM \perp AB$, 且 $\angle AQB = 2\angle AQM$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = x + m \\ x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}, \text{ 可得 } 4x^2 + 6mx + 3m^2 - 6 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = 36m^2 - 4 \times 4 \times 3(m^2 - 2) = 12(8 - m^2) > 0,$$

$$\text{由韦达定理可得 } x_1 + x_2 = -\frac{3m}{2}, x_1x_2 = \frac{3m^2 - 6}{4},$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + 2m = \frac{m}{2}, \text{ 故点 } M\left(-\frac{3m}{4}, \frac{m}{4}\right),$$



所以, $|PM| = \sqrt{2}|x_0| = \frac{3\sqrt{2}}{4}|m|$,

$$|AB| = \sqrt{1+1^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9m^2}{4} - (3m^2-6)} = \frac{\sqrt{3(8-m^2)}}{\sqrt{2}},$$

$$|QM|^2 = |PQ|^2 - |PM|^2 = 9 - \frac{9}{8}m^2 = \frac{9}{8}(8-m^2),$$

$$\text{又因为 } |AM|^2 = \frac{1}{4}|AB|^2 = \frac{3(8-m^2)}{8}, \tan \angle AQM = \frac{|AM|}{|QM|} = \sqrt{\frac{\frac{3(8-m^2)}{8}}{\frac{9(8-m^2)}{8}}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

因为 $\angle AQM \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\angle AQM = \frac{\pi}{6}$, 故 $\angle AQB = 2\angle AQM = \frac{\pi}{3}$.

61. (25-26 高三上·云南临沧·月考) 已知椭圆 $E: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上焦点 F 也是抛物线 $C: x^2 = 4y$

的焦点, E 的上顶点为 A , 下顶点为 B , 且 $|AB| = 4$.

(1) 求 E 的方程.

(2) 过点 F 作一条斜率为 k 的直线 l , 与 E 交于 P, Q 两点, 与 C 交于 M, N 两点.

(i) 若 $\frac{2}{|PQ|} + \frac{t}{|MN|}$ 为定值, 求 t 的值.

(ii) 是否存在实数 k , 使得 $\triangle BMN$ 的面积恰好是 $\triangle APQ$ 的面积 3 倍? 若存在, 求出 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$

(2) (i) $t = -\frac{2}{3}$; (ii) 不存在, 理由见解析

【分析】(1) 根据题意可得 a, c , 然后求出 b , 可得椭圆方程;

(2) (i) 设 l 的方程为 $y = kx + 1$, 分别联立椭圆方程和抛物线方程消元, 利用弦长公式求出 $|PQ|$ 和 $|MN|$, 然后利用韦达定理化简即可得解;

(ii) 根据 $|FB| = 3|FA|$ 分析可知, 若存在满足题意的 k , 则 $|MN| = |PQ|$, 然后作出比较可解.

【详解】(1) 由 C 的方程可知 $F(0, 1)$, 所以 E 的半焦距 $c = 1$,

又 $a = \frac{|AB|}{2} = 2$, 所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$, 故 E 的方程为 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$;

(2) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), M(x_3, y_3), N(x_4, y_4)$,

由题意可得 l 的方程为 $y = kx + 1$, 与 E 的方程联立, 得 $\begin{cases} y = kx + 1 \\ \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1 \end{cases}$,

消去 y 得 $(3k^2 + 4)x^2 + 6kx - 9 = 0, \Delta_1 = 144(k^2 + 1) > 0$,

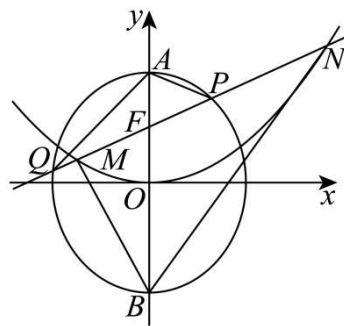
所以 $x_1 + x_2 = \frac{-6k}{3k^2 + 4}, x_1x_2 = \frac{-9}{3k^2 + 4}$,

故 $|PQ| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \sqrt{\left(\frac{-6k}{3k^2+4}\right)^2 + \frac{36}{3k^2+4}} = \frac{12(k^2+1)}{3k^2+4}$,

将 l 与 C 的方程联立, 得 $\begin{cases} y = kx + 1 \\ x^2 = 4y \end{cases}$,

消去 x 得 $y^2 - (2+4k^2)y + 1 = 0, \Delta_2 = 16k^2(k^2+1) > 0$,

所以 $y_3 + y_4 = 4k^2 + 2$, 故 $|MN| = y_3 + y_4 + 2 = 4(k^2+1)$,



(i) 要使 $\frac{2}{|PQ|} + \frac{t}{|MN|} = \frac{6k^2+8+3t}{12(k^2+1)}$ 为定值, 则 $8+3t=6$, 解得 $t=-\frac{2}{3}$,

此时 $\frac{2}{|PQ|} + \frac{t}{|MN|}$ 为定值 $\frac{1}{2}$;

(ii) 不存在, 理由如下:

由已知可得 $|FB|=3|FA|$, 则点 B 到 l 的距离是点 A 到 l 的距离的 3 倍,

要使 $\triangle BMN$ 的面积恰好是 $\triangle APQ$ 的面积 3 倍, 则必须满足 $|MN|=|PQ|$,

$$\text{而 } |MN|-|PQ|=4(k^2+1)-\frac{12(k^2+1)}{3k^2+4}=\frac{4(k^2+1)(3k^2+1)}{3k^2+4}>0,$$

即 $|MN|>|PQ|$, 故不存在满足条件的实数 k .

62. (2024·陕西安康·模拟预测) 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别是 A_1, A_2 , 直线 l 与 C 交于 M, N

两点 (不与 A_2 重合), 设直线 A_2M, A_2N, l 的斜率分别为 k_1, k_2, k , 且 $(k_1+k_2)k=-6$.

(1) 判断直线 l 是否过 x 轴上的定点. 若过, 求出该定点; 若不过, 请说明理由.

(2) 若 M, N 分别在第一和第四象限内, 证明: 直线 MA_1 与 NA_2 的交点 P 在定直线上.

【答案】(1) 过定点 $(2, 0)$.

(2) 证明过程见解析

【分析】(1) 根据题意设出直线 l 的方程, 联立直线与双曲线的方程, 得出韦达定理的等式, 再通过斜率之间的关系即可得出 $m=-2k$, 即可得出定点坐标.

(2) 根据题意得出两条直线方程, 再联立化简得到关于 x 的等式, 从而得到定直线方程.

【详解】(1) 由题意可知 $A_1(-1, 0), A_2(1, 0), k \neq 0$, 设直线 l 的方程为 $y=kx+m, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = kx + m \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 可得 } (3-k^2)x^2 - 2kmx - m^2 - 3 = 0,$$

$$\text{则 } k^2 \neq 3, \Delta = 12(m^2 + 3 - k^2) > 0, \text{ 即 } k^2 < m^2 + 3,$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2km}{3-k^2}, x_1x_2 = -\frac{m^2+3}{3-k^2}.$$

$$\text{因为 } (k_1+k_2)k = k\left(\frac{kx_1+m}{x_1-1} + \frac{kx_2+m}{x_2-1}\right) = k\left[\frac{2kx_1x_2+(m-k)(x_1+x_2)-2m}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}\right]$$

$$= k\left[\frac{2k\left(-\frac{m^2+3}{3-k^2}\right) + (m-k)\frac{2km}{3-k^2} - 2m}{-\frac{m^2+3}{3-k^2} - \frac{2km}{3-k^2} + 1}\right] = \frac{6k}{m+k} = -6,$$

所以 $m=-2k$,

故直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$, 恒过点 $(2, 0)$.

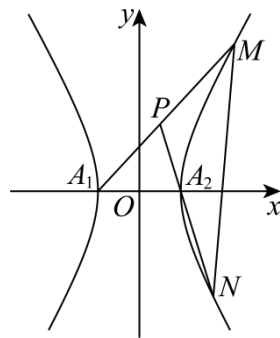
(2) 由题可知, 直线 MA_1 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1+1}(x+1)$,

直线 NA_2 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2-1}(x-1)$,

$$\text{因为 } \frac{x+1}{x-1} = \frac{y_2(x_1+1)}{y_1(x_2-1)} = \frac{(x_2-2)(x_1+1)}{(x_1-2)(x_2-1)} = \frac{x_1x_2-2x_1+x_2-2}{x_1x_2-2x_1-x_2+2}$$

$$= \frac{x_1x_2+(x_1+x_2)-3x_1-2}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+x_1+2} = \frac{\frac{-6k^2-9}{3-k^2}-3x_1}{\frac{2k^2+3}{3-k^2}+x_1} = -3,$$

所以 $x = \frac{1}{2}$, 故点 P 在定直线 $x = \frac{1}{2}$ 上.



63. (2025·广东广州·三模) 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

(1) 若直线 l 与双曲线 C 相交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点坐标为 $(3, 3)$, 求直线 l 的方程;

(2) 若 P 为双曲线 C 右支上异于右顶点的一个动点, F 为双曲线 C 的右焦点, x 轴上是否存在定点 $M(t, 0) (t < 0)$, 使得 $\angle PFM = 2\angle PMF$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $3x - y - 6 = 0$

(2) 存在定点 $M(t, 0)$, 使得 $\angle PFM = 2\angle PMF$, 此时 $t = -1$

【分析】(1) 利用点差法可求出直线斜率, 再求直线方程即可;

(2) 利用正切二倍角公式结合点在双曲线上化简可得;

【详解】(1) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} x_1^2 - \frac{y_1^2}{3} = 1 \\ x_2^2 - \frac{y_2^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 作差可得 } x_1^2 - x_2^2 - \frac{y_1^2 - y_2^2}{3} = 0, \text{ 所以 } (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{3} = 0,$$

因为线段 AB 的中点坐标为 $(3, 3)$, 所以 $x_1 + x_2 = 6, y_1 + y_2 = 6$,

$$\text{所以 } 6(x_1 - x_2) - \frac{(y_1 - y_2)6}{3} = 0,$$

所以直线的斜率为 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 3$, 所以直线 l 的方程为 $y - 3 = 3(x - 3)$,

即 $3x - y - 6 = 0$.

(2) 假设存在定点 $M(t, 0) (t < 0)$, 使得 $\angle PFM = 2\angle PMF$.

设 $P(x_0, y_0)$, 焦点 $F(2, 0)$,

因为 $\angle PFM = 2\angle PMF$, 所以 $\tan \angle PFM = \tan(2\angle PMF) = \frac{\tan \angle PMF}{1 - \tan^2 \angle PMF}$,

$$\text{即 } -\frac{y_0}{x_0 - 2} = \frac{2 \cdot \frac{y_0}{x_0 - t}}{1 - \left(\frac{y_0}{x_0 - t}\right)^2}, \text{ 化简可得 } (x_0 - t)^2 - y_0^2 = 2(2 - x_0)(x_0 - t),$$

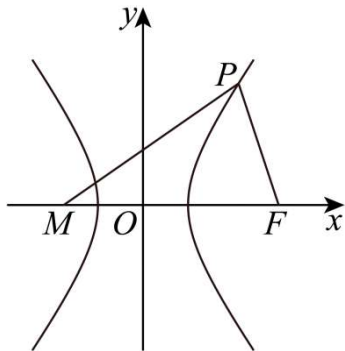
又点 P 在双曲线上, 所以 $y_0^2 = 3(x_0^2 - 1)$,

代入上式可得 $(x_0 - t)^2 - 3(x_0^2 - 1) = 2(2 - x_0)(x_0 - t)$,

整理可得 $-4tx_0 - 4x_0 + t^2 + 4t + 3 = 0$, 因为对于 $x_0 \geq 1$ 恒成立,

所以 $-4t - 4 = 0$ 且 $t^2 + 4t + 3 = 0$, 解得 $t = -1$.

当 $x_0 = 2$ 时, 代入双曲线方程可得 $y_0 = 3$,



显然, 此时 $\triangle PMF$ 为等腰直角三角形, 也成立,

综上, $t = -1$.

64. (2025·湖北襄阳·模拟预测) 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 左右焦点分别为 F_1, F_2 , 上下顶点分别为 A, B , 左右顶点分别为 C, D , 又 P, Q 是 Γ 上异于椭圆顶点的两点.

(1) 若点 Q 在第一象限且满足 $\triangle ABQ$ 的面积比 $\triangle F_1F_2Q$ 的面积大, 求点 Q 的横坐标的取值范围;

(2) 若线段 PQ 的中点坐标为 $(1, \frac{1}{2})$, 求直线 PQ 的方程;

(3) 记点 A 在直线 PQ 上的射影为点 H , 且直线 CP 的斜率是直线 DQ 的斜率的 3 倍, 试判断: 过点 A, H, O (O 为坐标原点) 三点的圆是否为定圆? 若是, 求出该圆的方程; 若不是, 请说明理由.

【答案】(1) $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 2)$

(2) $3x + 2y - 4 = 0$

(3) 定圆, $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$

【分析】(1) 由 $S_{\triangle ABQ} > S_{\triangle F_1F_2Q}$, 结合三角形的面积公式可得 $\sqrt{3}|x_0| > |y_0|$, 再由椭圆的方程代入计算, 即可得到结果;

(2) 由点差法代入计算, 即可得到结果;

(3) 联立直线 DQ 与椭圆方程, 即可表示出点 Q 的坐标, 然后联立直线 CP 与椭圆方程, 表示出点 P 的坐标, 从而表示出直线 PQ 的方程, 即可得到直线 PQ 过定点 $F_1(-1, 0)$, 从而得到结果.

【详解】(1) 设 $Q(x_0, y_0)$ ($x_0 > 0, y_0 > 0$), 由 $S_{\triangle ABQ} > S_{\triangle F_1F_2Q}$, 得 $\frac{1}{2}|AB||x_0| > \frac{1}{2}|F_1F_2||y_0|$,

所以 $\sqrt{3}|x_0| > |y_0|$, 即 $3x_0^2 > y_0^2$,

又因为 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$, 所以 $0 < y_0^2 = 3 - \frac{3x_0^2}{4} < 3x_0^2$,

解得 $\frac{2\sqrt{5}}{5} < x_0 < 2$, 即点 Q 的横坐标的取值范围为 $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 2)$;

(2) 设 $M(1, \frac{1}{2})$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

则 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1 \\ \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1 \end{cases}$, 两式相减作差可得 $\frac{x_1^2 - x_2^2}{4} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{3} = 0$,

即 $\frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = -\frac{3}{4}$, 即 $\frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)} = -\frac{3}{4}$, 即 $k_{OM} \cdot k_{PQ} = -\frac{3}{4}$,

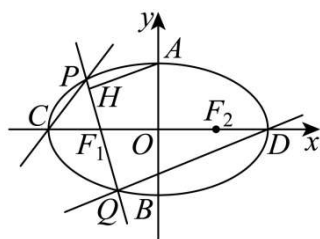
又 $k_{OM} = \frac{1}{2}$, 所以 $k_{PQ} = -\frac{3}{2}$,

由直线的点斜式可得 $y - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}(x - 1)$,

化简可得 $3x + 2y - 4 = 0$,

所以直线 PQ 的方程为 $3x + 2y - 4 = 0$;

(3)



$$C(-2,0), D(2,0),$$

设直线 CP 的方程为 $y=3k(x+2)$,

直线 DQ 的方程为 $y=k(x-2)$, $k \neq 0$,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x-2) \end{cases}, \text{消 } y \text{ 得 } (4k^2+3)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0,$$

$$\text{则 } 2x_Q = \frac{16k^2-12}{4k^2+3}, \text{ 所以 } x_Q = \frac{8k^2-6}{4k^2+3},$$

$$\text{所以 } y_Q = k\left(\frac{8k^2-6}{4k^2+3} - 2\right) = \frac{-12k}{4k^2+3}, \text{ 故 } Q\left(\frac{8k^2-6}{4k^2+3}, \frac{-12k}{4k^2+3}\right),$$

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = 3k(x+2) \end{cases}, \text{消 } y \text{ 得 } (12k^2+1)x^2 + 48k^2x + 48k^2 - 4 = 0,$$

$$\text{则 } -2x_P = \frac{48k^2-4}{12k^2+1},$$

$$\text{所以 } x_P = \frac{-24k^2+2}{12k^2+1}, \text{ 所以 } y_P = 3k\left(\frac{-24k^2+2}{12k^2+1} + 2\right) = \frac{12k}{4k^2+3},$$

$$\text{故 } P\left(\frac{-24k^2+2}{12k^2+1}, \frac{12k}{12k^2+1}\right),$$

$$\text{当 } x_P \neq x_Q, \text{ 即 } k^2 \neq \frac{1}{4} \text{ 时, } k_{PQ} = \frac{\frac{-12k}{4k^2+3} - \frac{12k}{12k^2+1}}{\frac{8k^2-6}{4k^2+3} - \frac{-24k^2+2}{12k^2+1}} = \frac{4k}{1-4k^2},$$

$$\text{则直线 } PQ \text{ 的方程为 } y + \frac{-12k}{4k^2+3} = \frac{4k}{1-4k^2}\left(x - \frac{8k^2-6}{4k^2+3}\right),$$

$$\text{即 } y = \frac{4k}{1-4k^2}(x+1), \text{ 过定点 } F_1(-1,0),$$

$$\text{当 } x_P = x_Q, \text{ 即 } k^2 = \frac{1}{4} \text{ 时, 此时 } x_P = x_Q = -1,$$

直线 PQ 过定点 $F_1(-1,0)$,

设 $H(x,y)$, 因为 $AH \perp PQ$, $AO \perp OF_1$, 所以过点 A, H, O (O 为坐标原点) 三点的圆即为过点 A, F_1, O (O 为坐标原点) 三点的圆,

因为 $(x+1)x + y(y-\sqrt{3}) = 0$ 过原点, 点 $F_1(-1,0)$, 点 $A(0, \sqrt{3})$,

所以过点 A, H, O (O 为坐标原点) 三点的圆是定圆 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$.

65. (2025·辽宁·三模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的两条渐近线的斜率之积为 -3 .

(1) 求 C 的离心率.

(2) 若过点 $D(0,5)$ 且斜率为 1 的直线与 C 交于 A, B 两点 (A 在左支上, B 在右支上), 且 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{7}\overrightarrow{DB}$.

①求 C 的方程;

②已知不经过点 $P(2,3)$ 的直线 l 与 C 交于 E, F 两点, 直线 l 的斜率存在且直线 PE 与 PF 的斜率之积为

1,证明:直线 l 过定点.

【答案】(1)2

(2) ① $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$; ② 证明见解析

【分析】(1) 根据双曲线渐近线方程和离心率公式,即可求解;

(2) ① 直线方程与双曲线方程联立,根据向量共线的条件,结合韦达定理,即可求解;

② 首先设直线方程 $y = kx + m$,与双曲线方程联立,利用韦达定理表示 $k_{PE} \cdot k_{PF} = 1$,即可证明定点问题.

【详解】(1) 由题意可知 $-\frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} = -3$,

则 $\frac{b^2}{a^2} = 3, e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2$.

(2) ① 解: 直线 AB 的方程为 $y = x + 5$,

联立 $\begin{cases} y = x + 5, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1, \end{cases}$ 得 $2x^2 - 10x - (25 + 3a^2) = 0$,

$\Delta = 300 + 24a^2 > 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = 5, x_1x_2 = -\frac{25 + 3a^2}{2}$,

由 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{7}\overrightarrow{DB}$, 得 $-x_1 = \frac{2}{7}x_2$,

代入 $x_1 + x_2 = 5, x_1x_2 = -\frac{25 + 3a^2}{2}$, 得 $a^2 = 1$,

则 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

② 证明: 设 $E(x_3, y_3), F(x_4, y_4)$, l 的方程为 $y = kx + m$.

联立 $\begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 得 $(3 - k^2)x^2 - 2kmx - (m^2 + 3) = 0$,

$\Delta = 12(m^2 - k^2 + 3) > 0$, 且 $3 - k^2 \neq 0$,

$x_3 + x_4 = \frac{2km}{3 - k^2}, x_3x_4 = -\frac{m^2 + 3}{3 - k^2}$.

因为 $k_{PE} \cdot k_{PF} = \frac{y_3 - 3}{x_3 - 2} \cdot \frac{y_4 - 3}{x_4 - 2} = 1$,

所以 $(kx_3 + m - 3)(kx_4 + m - 3) = (x_3 - 2)(x_4 - 2)$,

即 $(k^2 - 1)x_3x_4 + [k(m - 3) + 2](x_3 + x_4) + m^2 - 6m + 5 = 0$,

则 $-(k^2 - 1) \cdot \frac{m^2 + 3}{3 - k^2} + [k(m - 3) + 2] \cdot \frac{2km}{3 - k^2} + m^2 - 6m + 5 = 0$,

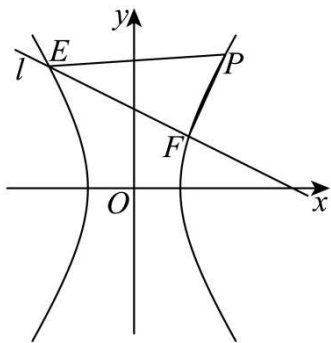
整理得 $4k^2 - 2km - 2m^2 + 9m - 9 = 0$,

即 $(2k - 2m + 3)(2k + m - 3) = 0$.

因为点 P 不在直线 l 上, 所以 $2k + m - 3 \neq 0$, 则 $2k - 2m + 3 = 0$,

则 $m = k + \frac{3}{2}, l: y = k(x + 1) + \frac{3}{2}$,

故直线 l 过定点 $(-1, \frac{3}{2})$.



【点睛】关键点点睛：本题第二问的关键是利用直线与双曲线方程联立，利用韦达定理表示坐标运算。

66. (25-26 高三上·河北·开学考试) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 四点 $P_1(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_2(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_3(0, 1)$, $P_4(1, 1)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过点 $D(4, 0)$ 且斜率不为 0 的直线 l 与椭圆 C 相交于 M, N 两点.

(i) 若 O 为原点, 求 $\triangle MON$ 面积的最大值;

(ii) 点 $A(-2, 0)$, 设点 Q 是线段 MN 上异于 M, N 的一点, 直线 QA, QM 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 + k_2 = 0$, 求 $\frac{|DM| \cdot |NQ|}{|DN| \cdot |MQ|}$ 的值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) (i) 1; (ii) $\frac{|DM| \cdot |NQ|}{|DN| \cdot |MQ|}$ 的值为 1.

【分析】(1) 根据题意先判断三点在椭圆 C 上, 再代入椭圆方程解方程组即可求解;

(2) (i) 设直线 l 的方程为 $x = ty + 4$, 点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 与椭圆方程联立, 利用韦达定理得 $y_1 + y_2, y_1 y_2$, 求得 $\triangle MON$ 面积 $S = \frac{8\sqrt{t^2-12}}{t^2+4}$, 令 $\sqrt{t^2-12} = u (u > 0)$, 得 $S = \frac{8}{u + \frac{16}{u}}$, 最后利用均值不等式即可求解;

(ii) 由 $k_1 + k_2 = 0$ 得 $|QA| = |QD|$, 即点 Q 在线段 AD 的垂直平分线上, 得 $Q(1, -\frac{3}{t})$, 利用两点间的距离公式计算 $|DM|, |DN|, |NQ|, |MQ|$, 代入得 $\frac{|DM| \cdot |NQ|}{|DN| \cdot |MQ|} = \frac{|y_1 y_2 + \frac{3}{t} y_1|}{|y_1 y_2 + \frac{3}{t} y_2|}$, 又 $y_1 y_2 = \frac{-3}{2t} (y_1 + y_2)$, 代入即可求解.

【详解】(1) 由对称性知 $P_1(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_2(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 和 $P_3(0, 1)$ 在椭圆 C 上,

所以 $\begin{cases} b=1, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1, \end{cases}$ 所以 $a=2$, 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) (i) 设直线 l 的方程为 $x = ty + 4$, 点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} x = ty + 4 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$, 消去 x 得: $(t^2 + 4)y^2 + 8ty + 12 = 0$,

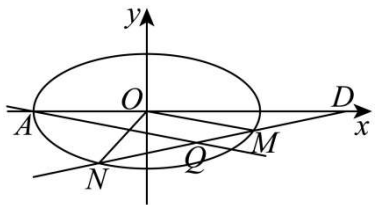
则 $\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-8t}{t^2 + 4} \\ y_1 y_2 = \frac{12}{t^2 + 4} \end{cases}$, $\Delta = 16(t^2 - 12) > 0$, 则 $t < -2\sqrt{3}$ 或 $t > 2\sqrt{3}$.

$$\text{所以 } |y_1 - y_2| = \frac{4\sqrt{t^2 - 12}}{t^2 + 4},$$

$$\text{所以 } \triangle MON \text{ 面积 } S = \frac{1}{2} \times 4 \times |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{4\sqrt{t^2 - 12}}{t^2 + 4} = \frac{8\sqrt{t^2 - 12}}{t^2 + 4}.$$

$$\text{令 } \sqrt{t^2 - 12} = u (u > 0), \text{ 则 } t^2 = u^2 + 12, S = \frac{8u}{u^2 + 16} = \frac{8}{u + \frac{16}{u}} \leq 1,$$

当且仅当 $u = 4$, 即 $t^2 = 28$ 时, $\triangle MON$ 面积的最大值为 1.



(ii) 因为 $k_1 + k_2 = 0$, 所以直线 QA, QM 的倾斜角互补, 所以 $|QA| = |QD|$,

所以点 Q 在线段 AD 的垂直平分线上, 所以 $Q(1, -\frac{3}{t})$.

$$\text{所以 } |DM| = \sqrt{(4-x_1)^2 + y_1^2} = \sqrt{t^2 + 1} |y_1|, \text{ 同理得 } |DN| = \sqrt{t^2 + 1} |y_2|,$$

$$|MQ| = \sqrt{t^2 + 1} \left| y_1 + \frac{3}{t} \right|, |NQ| = \sqrt{t^2 + 1} \left| y_2 + \frac{3}{t} \right|.$$

$$\text{所以 } \frac{|DM| \cdot |NQ|}{|DN| \cdot |MQ|} = \frac{|y_1| \cdot \left| y_2 + \frac{3}{t} \right|}{|y_2| \cdot \left| y_1 + \frac{3}{t} \right|},$$

$$\text{于是 } \frac{|DM| \cdot |NQ|}{|DN| \cdot |MQ|} = \frac{|y_1(y_2 + \frac{3}{t})|}{|y_2(y_1 + \frac{3}{t})|} = \frac{|y_1 y_2 + \frac{3}{t} y_1|}{|y_1 y_2 + \frac{3}{t} y_2|},$$

$$\text{因为 } y_1 y_2 = \frac{-3}{2t} (y_1 + y_2),$$

$$\text{所以 } \frac{|DM| \cdot |NQ|}{|DN| \cdot |MQ|} = \frac{\left| \frac{-3}{2t} (y_1 + y_2) + \frac{3}{t} y_1 \right|}{\left| \frac{-3}{2t} (y_1 + y_2) + \frac{3}{t} y_2 \right|} = \frac{\left| \frac{3}{2t} y_1 - \frac{3}{2t} y_2 \right|}{\left| \frac{3}{2t} y_2 - \frac{3}{2t} y_1 \right|} = 1.$$

$$\text{所以 } \frac{|DM| \cdot |NQ|}{|DN| \cdot |MQ|} \text{ 的值为 } 1.$$

67. (24-25 高三下·北京·月考) 已知椭圆 C 的中心在原点, 焦点在 x 轴上, 且短轴长为 $2\sqrt{3}$, 离心率等于 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 A 为椭圆 C 的左顶点, F 为右焦点, P 为椭圆 C 上一个动点. 设直线 AP 与直线 $x = 4$ 交于点 Q , 连接 FQ , 过 A 作 FQ 的平行线与 FP 交于点 M , 求 $|MF|$ 的值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) $|MF| = 3$

【分析】 (1) 由题意得 $2b = 2\sqrt{3}$, $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 再结合 $a^2 = b^2 + c^2$ 可求出 a, b , 从而可求出椭圆方程;

(2) 设 $P(m, n)$, 表示出直线 AP 的方程, 则可求出点 Q 的坐标, 求出直线 AM 和直线 PF 的方程, 两直线方程联立可求出点 M 的坐标, 进而可求出 $|MF|$ 的值.

【详解】 (1) 因为椭圆 C 的中心在原点, 焦点在 x 轴上,

$$\text{所以设椭圆方程为 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0),$$

由题意得 $\begin{cases} 2b=2\sqrt{3} \\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$, 解得 $a=2, b=\sqrt{3}, c=1$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 由题意得 $A(-2, 0), F(1, 0)$, 设 $P(m, n)$,

则 $\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{3} = 1$, 得 $3m^2 + 4n^2 = 12$, 即 $n^2 = 3 - \frac{3}{4}m^2$,

由题意得直线 AP 的斜率存在, 则 $k_{AP} = \frac{n}{m+2}$,

所以直线 AP 为 $y = \frac{n}{m+2}(x+2)$,

当 $x=4$ 时, $y = \frac{6n}{m+2}$, 所以 $Q(4, \frac{6n}{m+2})$,

所以直线 FQ 的斜率为 $\frac{\frac{6n}{m+2}}{4-1} = \frac{2n}{m+2}$,

因为直线 FQ 与直线 AM 平行, 所以直线 AM 的斜率为 $\frac{2n}{m+2}$,

所以直线 AM 为 $y = \frac{2n}{m+2}(x+2)$,

当 $m=1$ 时, 由椭圆的对称性, 不妨设点 P 为第一象限的点, 则 $n = \frac{3}{2}$,

此时直线 PF 为 $x=1$, 直线 AM 为 $y=x+2$,

由 $\begin{cases} y=x+2 \\ x=1 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$, 即 $M(1, 3)$,

所以 $|MF|=3$,

当 $m \neq 1$ 时, 直线 PF 的斜率为 $\frac{n}{m-1}$, 则直线 PF 为 $y = \frac{n}{m-1}(x-1)$,

由 $\begin{cases} y = \frac{n}{m-1}(x-1) \\ y = \frac{2n}{m+2}(x+2) \end{cases}$, 得 $x = \frac{2-5m}{m-4}, y = -\frac{6n}{m-4}$, 即 $M(\frac{2-5m}{m-4}, \frac{6n}{m-4})$,

所以 $|MF| = \sqrt{(\frac{2-5m}{m-4}-1)^2 + (\frac{6n}{m-4}-0)^2}$

$$= \sqrt{\frac{36(1-m)^2}{(m-4)^2} + \frac{36n^2}{(m-4)^2}}$$

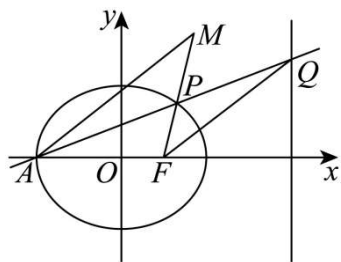
$$= 6\sqrt{\frac{1-2m+m^2+n^2}{(m-4)^2}}$$

$$= 6\sqrt{\frac{1-2m+m^2+3-\frac{3}{4}m^2}{(m-4)^2}}$$

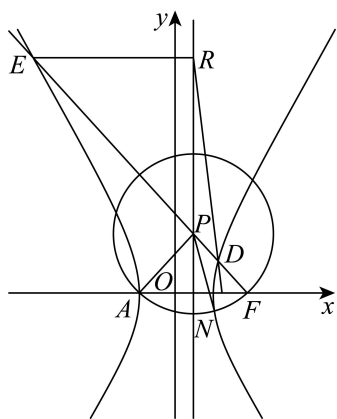
$$= 6\sqrt{\frac{m^2-8m+16}{4(m-4)^2}}$$

$$= 3\sqrt{\frac{(m-4)^2}{(m-4)^2}} = 3$$

综上, $|MF|=3$



68. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1 (a > 0)$ 的左顶点为 A , 右焦点为 F , P 是直线 $l: x = \frac{a}{2}$ 上一点, 且 P 不在 x 轴上, 以点 P 为圆心, 线段 PF 的长为半径的圆弧 AF 交 C 的右支于点 N .



(1) 证明: $\angle APN = 2\angle NPF$;

(2) 取 $a = 1$, 若直线 PF 与 C 的左、右两支分别交于 E, D 两点, 过 E 作 l 的垂线, 垂足为 R , 试判断直线 DR 是否过定点若是, 求出定点的坐标; 若不是, 请说明理由.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 答案见解析

【分析】(1) 过 N 作 l 的垂线, 垂足为 H , 且与圆弧 AF 交于点 M , 则 $MN \parallel AF$, 结合圆的知识可得 $|AM| = |NF|$, $|MH| = |HN|$, 设点 $N(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{3a^2} = 1$, 由 $\frac{|NF|}{|HN|} = 2$, 可得 $|NF| = 2|HN|$, 即得 $|AM| = |NF| = |MN|$ (用双曲线的第二定义来说明, 也可以), 由相等弦长所对的圆心角相等, 得 $\angle APM = \angle MPN = \angle NPF$, 进而求解;

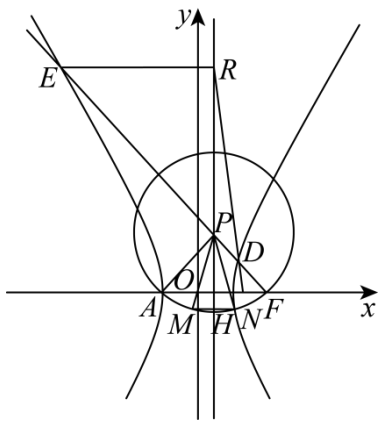
(2) 设直线 PF 的方程为 $x = my + 2$, 由题意可得 $m \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, 联立方程组, 结合韦达定理可得 $y_1 + y_2, y_1 y_2$, 由题知, 直线 DR 的方程为 $y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{\frac{1}{2} - x_1} (x - \frac{1}{2})$, 令 $y = 0$, 化简即可求解.

【详解】(1) 证明: 过 N 作 l 的垂线, 垂足为 H , 且与圆弧 AF 交于点 M , 则 $MN \parallel AF$, 连接 AM, PM, NF . 因为在圆 P 中, $PH \perp AF, PH \perp MN$, 所以 $|AM| = |NF|, |MH| = |HN|$.

由题易知右焦点 $F(2a, 0)$, 设点 $N(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{3a^2} = 1$, 整理得 $y_0^2 = 3x_0^2 - 3a^2$.

因为 $\frac{|NF|}{|HN|} = \frac{\sqrt{(x_0 - 2a)^2 + y_0^2}}{|x_0 - \frac{a}{2}|} = \frac{\sqrt{(x_0 - 2a)^2 + 3x_0^2 - 3a^2}}{|x_0 - \frac{a}{2}|} = \frac{\sqrt{(2x_0 - a)^2}}{|x_0 - \frac{a}{2}|} = \frac{|2x_0 - a|}{|x_0 - \frac{a}{2}|} = 2$,

所以 $|NF| = 2|HN|$, 所以 $|AM| = |NF| = |MN|$.



【这里若学生用双曲线的第二定义来说明,也可以. 见下:因为直线 $l: x = \frac{a}{2}$ 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$ ($a > 0$) 的准线,根据双曲线的第二定义,可知 $\frac{|NF|}{|HN|} = \frac{c}{a} = 2$,即 $|NF| = 2|HN|$,即得 $|AM| = |NF| = |MN|$.】

在圆 P 中,由相等弦长所对的圆心角相等,得 $\angle APM = \angle MPN = \angle NPF$,
所以 $\angle APN = 2\angle NPE$.

(2) 由题知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$,渐近线为: $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$,右焦点为 $F(2,0)$,

直线 PF 的斜率不为 0,设直线 PF 的方程为 $x = my + 2$

因为直线 PF 与 C 的左,右两支分别交于 E, D 两点,则 $m \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

设 $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2), R\left(\frac{1}{2}, y_2\right) (y_1 \neq y_2)$,

联立方程组 $\begin{cases} x = my + 2 \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 得 $(3m^2 - 1)y^2 + 12my + 9 = 0$,

则 $y_1 + y_2 = -\frac{12m}{3m^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{9}{3m^2 - 1}$.

由题知,直线 DR 的方程为 $y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{\frac{1}{2} - x_1} \left(x - \frac{1}{2}\right)$,

令 $y = 0$, 得 $x = \frac{x_1 y_2 - \frac{1}{2} y_1}{y_2 - y_1} = \frac{(my_1 + 2)y_2 - \frac{1}{2} y_1}{y_2 - y_1} = \frac{my_1 y_2 + 2y_2 - \frac{1}{2} y_1}{y_2 - y_1} = \frac{-\frac{3}{4}(y_1 + y_2) + 2y_2 - \frac{1}{2} y_1}{y_2 - y_1}$
 $= \frac{\frac{5}{4}(y_2 - y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{5}{4}$,

所以直线 DR 过定点 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$.

69. (2024·四川成都·模拟预测) 椭圆 C 的中心为坐标原点 O , 焦点在 y 轴上, 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆上的点到焦点的最短距离为 $1 - e$, 直线 l 与 y 轴交于点 $P(0, m)$ ($m \neq 0$), 与椭圆 C 交于相异两点 A, B , 且 $\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OP}$.

(1) 求椭圆方程;

(2) 求 m 的取值范围.

【答案】(1) $2x^2 + y^2 = 1$

$$(2) \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

【分析】(1) 由题意列出关于 a, b, c 的方程组, 求出 a, b, c 即可得解.

(2) 由向量共线得出 λ 的值、直线 l 斜率存在且不为 0, 设直线 l 方程为 $y = kx + m$, 联立椭圆方程求出 Δ 值和韦达定理, 利用 $\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OP}$ 得出 $x_1 + 3x_2 = 0$, 结合所得韦达定理即可求解.

【详解】(1) 设椭圆的方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

$$\text{由题} \begin{cases} c = \sqrt{a^2 - b^2} \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{解得 } a = 1, b = c = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a - c = 1 - e \end{cases}$$

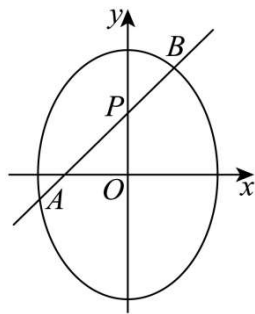
因此椭圆的方程为 $y^2 + \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$ 即 $2x^2 + y^2 = 1$.

(2) 由题意可知向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$ 起点相同, 终点共线,

又由 $\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OP}$ 得 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{4}\overrightarrow{OB}$,

故 $\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{4} = 1$, 即 $\lambda = 3$, 即 $\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OP}$,

显然直线 l 斜率存在且不为 0, 设其方程为 $y = kx + m$,



联立方程 $\begin{cases} y = kx + m \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$, 消去 y , 得 $(k^2 + 2)x^2 + 2kmx + (m^2 - 1) = 0$, 所以 $\Delta = 4(k^2 - 2m^2 + 2) > 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{2km}{k^2 + 2}, x_1x_2 = \frac{m^2 - 1}{k^2 + 2}$,

又由 $\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OP}$ 得 $x_1 + 3x_2 = 0$, 即 $x_1 = -3x_2$,

因此 $x_1 + x_2 = -2x_2$, 从而 $x_1 = \frac{-3km}{k^2 + 2}, x_2 = \frac{km}{k^2 + 2}$,

所以 $x_1x_2 = \frac{-3k^2m^2}{(k^2 + 2)^2} = \frac{m^2 - 1}{k^2 + 2}$,

整理得 $4k^2m^2 + 2m^2 - k^2 - 2 = 0$, 显然 $m^2 \neq \frac{1}{2}$,

所以 $k^2 = \frac{2 - 2m^2}{4m^2 - 1} > 0$,

解得 $-1 < m < -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2} < m < 1$. 经检验, 此时 $\Delta > 0$,

因此 m 的取值范围是 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

70. (2025·四川绵阳·模拟预测) 中心 O 在原点, 左、右焦点分别为 F_1, F_2 的椭圆的离心率 $e = \frac{\sqrt{10}}{4}$, 椭圆上的动点 P (不与顶点重合), 满足当 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ 时, P 到左焦点 F_1 的距离为 3.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 当 $|PF_1|$ 的最大值小于 5 时, 过点 P 作椭圆的切线, 与 x 轴交于 Q , 与 y 轴交于 R , 求 $S_{\triangle OQR}$ 的最小值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1$ 或 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{\frac{27}{2}} = 1$;

(2) $\sqrt{6}$.

【分析】(1) 由椭圆性质列出关于 a, b, c 的方程组, 联立求解即可;

(2) 由 $|PF_1|$ 的最大值小于 5, 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1$, 设 $P(m, n)$, 则过点 P 作椭圆的切线方程为

$\frac{mx}{4} + \frac{2ny}{3} = 1$, 分别求出 Q, R 的坐标, 即可表示三角形的面积, 再结合基本不等式即可求出.

【详解】(1) 因为动点 P 在椭圆上, 所以 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, 又 $|PF_1| = 3$, 所以 $|PF_2| = 2a - 3$,

又 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 所以 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$, 即 $3^2 + (2a - 3)^2 = (2c)^2$,

又 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{4}$, 联立可得 $\begin{cases} 9 + (2a - 3)^2 = 4c^2 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{4} \end{cases}$, 解得 $a = 2, c = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 或 $a = 6, c = \frac{3\sqrt{10}}{2}$, 又 $a^2 = b^2 +$

c^2 , 解得 $b = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $b = \frac{3\sqrt{6}}{2}$,

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1$ 或 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{\frac{27}{2}} = 1$.

(2) 根据椭圆的几何性质: $a - c \leq |PF_1| \leq a + c$, 又 $|PF_1| < 5$, 所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1$,

设切点 $P(m, n)$,

① 当 $m \neq \pm 2$ 且 $n > 0$ 时, 椭圆的方程可化为 $y = \frac{\sqrt{6}}{4} \sqrt{4 - x^2}$,

求导得 $y' = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}} (-2x) = -\frac{\sqrt{6}x}{4\sqrt{4 - x^2}}$, 所以切线斜率为 $k = -\frac{\sqrt{6}m}{4\sqrt{4 - m^2}}$,

切线方程为 $y = -\frac{\sqrt{6}m}{4\sqrt{4 - m^2}}(x - m) + n$, 整理得 $4\sqrt{4 - m^2}y = -\sqrt{6}m(x - m) + 4n\sqrt{4 - m^2}$,

又 $n = \frac{\sqrt{6}}{4}\sqrt{4 - m^2}$, 化简可得过点 P 作椭圆的切线方程为 $\frac{mx}{4} + \frac{2ny}{3} = 1$;

② 当 $m \neq \pm 2$ 且 $n < 0$ 时, 椭圆的方程可化为 $y = -\frac{\sqrt{6}}{4}\sqrt{4 - x^2}$,

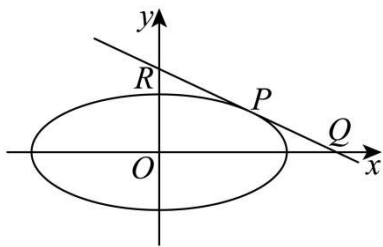
求导得 $y' = -\frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}} (-2x) = \frac{\sqrt{6}x}{4\sqrt{4 - x^2}}$, 所以切线斜率为 $k = \frac{\sqrt{6}m}{4\sqrt{4 - m^2}}$,

切线方程为 $y = \frac{\sqrt{6}m}{4\sqrt{4 - m^2}}(x - m) + n$, 整理得 $4\sqrt{4 - m^2}y = \sqrt{6}m(x - m) + 4n\sqrt{4 - m^2}$,

又 $n = \frac{\sqrt{6}}{4}\sqrt{4 - m^2}$, 化简可得过点 P 作椭圆的切线方程为 $\frac{mx}{4} + \frac{2ny}{3} = 1$;

③ 当 $m = \pm 2$ 且 $n = 0$ 时, 过点 P 作椭圆的切线方程为 $x = \pm 2$,

综上所述, 过椭圆上一点 P 作椭圆的切线方程为 $\frac{mx}{4} + \frac{2ny}{3} = 1$,



令 $x=0$, 可得 $y=\frac{3}{2n}$, 即 $R(0, \frac{3}{2n})$, 同理可得 $Q(\frac{4}{m}, 0)$,

$$\text{所以 } S_{\triangle OQR} = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{3}{2n} \right| \cdot \left| \frac{4}{m} \right| = \left| \frac{3}{mn} \right|,$$

$$\text{又 } \frac{m^2}{4} + \frac{2n^2}{3} = 1 \geq 2\sqrt{\frac{m^2}{4} \cdot \frac{2n^2}{3}} = 2\frac{|mn|}{\sqrt{6}}, \text{ 所以 } |mn| \leq \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 即 } \frac{1}{|mn|} \geq \frac{2}{\sqrt{6}},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle OQR} = \left| \frac{3}{mn} \right| \geq 3 \times \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}, \text{ 当且仅当 } \frac{|m|}{2} = \frac{\sqrt{2}|n|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时取等号,}$$

所以 $S_{\triangle OQR}$ 的最小值为 $\sqrt{6}$.

71. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , O 为坐标原点, 点 $P(-1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 且 $|PF_2| = \frac{5}{2}$, 直线 l 过点 F_1 且与椭圆 C 交于 A, B 两点.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 已知 $\overrightarrow{OF_1} = \overrightarrow{F_1M}$, $\overrightarrow{OF_2} = \overrightarrow{F_2N}$, 若直线 AM, BN 交于点 D , 探究: 点 D 是否在某定直线上? 若是, 求出该直线的方程; 若不是, 请说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 点 D 在直线 $x=-4$ 上.

【分析】

(1) 利用两点距离公式可计算焦点坐标, 待定系数法计算椭圆方程即可;

(2) 由题意先确定 M, N 位置, 设直线 l 与 A, B 坐标, 联立直线与椭圆方程利用韦达定理得出 A, B 纵坐标关系式, 再利用点 A, B 坐标表示直线 AM, BN , 法一、求出 D 点横坐标化简计算即可; 法二、直接利用直线 AM, BN 方程作比计算 $\frac{x_D+2}{x_D-2}$ 为定值, 计算即可.

【详解】(1) 设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0), (c > 0)$,

$$\text{则 } |PF_2| = \sqrt{(-1-c)^2 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2},$$

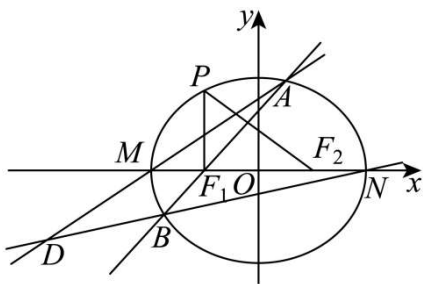
$$\text{则 } (c+1)^2 = 4, \text{ 解得 } c=1 (c=-3 \text{ 舍去}),$$

$$\text{则 } a^2 - b^2 = 1, \text{ ①}$$

$$\text{代入点 } P(-1, \frac{3}{2}) \text{ 得 } \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1, \text{ ②}$$

$$\text{联立 ①②, 解得 } a^2 = 4, b^2 = 3,$$

$$\text{故椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1;$$



(2)

依题意, $M(-2,0)$, $N(2,0)$,

设直线 $l: x = my - 1$, 联立 $\begin{cases} x = my - 1 \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases}$,

整理得 $(3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0$,

$\Delta = 36m^2 + 36(3m^2 + 4) = 144(1 + m^2) > 0$;

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

则 $y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4}$, $y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4}$,

所以 $2my_1 y_2 + 3(y_1 + y_2) = 0$.

可设直线 $AM: y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$, 直线 $BN: y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$,

法一: 联立 $\begin{cases} y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), \\ y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2), \end{cases}$

得 $x_D = 2 \left[\frac{y_2(x_1 + 2) + y_1(x_2 - 2)}{y_2(x_1 + 2) - y_1(x_2 - 2)} \right]$
 $= 2 \left[\frac{y_2(my_1 + 1) + y_1(my_2 - 3)}{y_2(my_1 + 1) - y_1(my_2 - 3)} \right] = 2 \left(\frac{2my_1 y_2 + y_2 - 3y_1}{y_2 + 3y_1} \right)$
 $= 2 \left[\frac{2my_1 y_2 + 3(y_1 + y_2) - 2(y_2 + 3y_1)}{y_2 + 3y_1} \right] = -4$,

故点 D 在直线 $x = -4$ 上.

法二: 故 $\frac{x_D + 2}{x_D - 2} = \frac{y_2(x_1 + 2)}{y_1(x_2 - 2)} = \frac{my_1 y_2 + y_2}{my_1 y_2 - 3y_1} = \frac{-\frac{3}{2}(y_1 + y_2) + y_2}{-\frac{3}{2}(y_1 + y_2) - 3y_1} = \frac{-\frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2}{-\frac{9}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2} = \frac{1}{3}$,

解得 $x_D = -4$,

故点 D 在直线 $x = -4$ 上.

【点睛】方法点睛: 利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下:

- (1) 设直线方程, 设交点坐标为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ;
- (2) 联立直线与圆锥曲线的方程, 得到关于 x (或 y) 的一元二次方程, 必要时计算 Δ ;
- (3) 列出韦达定理;
- (4) 将所求问题或题中的关系转化为 $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ (或 $y_1 + y_2$, $y_1 y_2$) 的形式;
- (5) 代入韦达定理求解.

检测Ⅱ组 创新能力提升

72. (23-24 高三上·贵州黔西·月考) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 过焦点的直线 l 与抛物线 C 交于两点

A, B , 当直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 时, $|AB| = 16$.

(1) 求抛物线 C 的标准方程和准线方程;

(2) 记 O 为坐标原点, 直线 $x = -2$ 分别与直线 OA, OB 交于点 M, N , 求证: 以 MN 为直径的圆过定点, 并求出定点坐标.

【答案】(1) 抛物线的方程为 $y^2 = 4x$, 准线方程为 $x = -1$

(2) 证明见解析, 定点坐标为 $(2, 0)$ 或 $(-6, 0)$

【分析】(1) 根据已知得出直线 l 的方程, 与抛物线联立, 根据过焦点的弦长公式, 列出关系式, 即可得出 p ;

(2) 设 $l: x = my + 1$, 联立方程根据韦达定理得出 y_1, y_2 的关系. 进而表示出 OA, OB 的方程, 求出 M, N 的坐标, 得出圆的方程. 取 $m = 0$, 即可得出定点坐标.

【详解】(1) 由已知可得, 抛物线的焦点坐标为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 直线 l 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{p}{2}\right)$.

联立抛物线与直线的方程 $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{p}{2}\right) \\ y^2 = 2px \end{cases}$ 可得,

$$x^2 - 7px + \frac{p^2}{4} = 0.$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由韦达定理可得 $x_1 + x_2 = 7p$,

则 $|AB| = x_1 + x_2 + p = 8p = 16$, 所以 $p = 2$.

所以, 抛物线的方程为 $y^2 = 4x$, 准线方程为 $x = -1$.

(2) 设直线 $l: x = my + 1$,

联立直线与抛物线的方程 $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 可得, $y^2 - 4my - 4 = 0$.

所以, $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4$.

又 $k_{OA} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{4}{y_1}$, $l_{OA}: y = \frac{4}{y_1}x$, 所以 $M\left(-2, \frac{-8}{y_1}\right)$.

同理可得 $N\left(-2, \frac{-8}{y_2}\right)$.

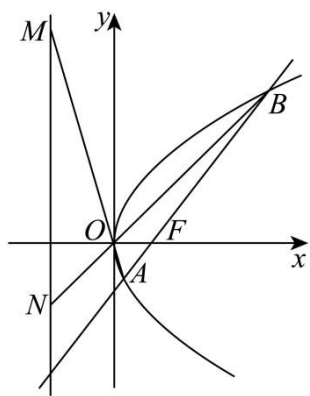
设圆上任意一点为 $Q(x, y)$, 则由 $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN} = 0$ 可得,

圆的方程为 $(x+2)^2 + \left(y + \frac{8}{y_1}\right)\left(y + \frac{8}{y_2}\right) = 0$,

整理可得, $(x+2)^2 + y^2 + y\left(\frac{8}{y_2} + \frac{8}{y_1}\right) + \frac{64}{y_1 y_2} = (x+2)^2 + y^2 - 8my - 16 = 0$.

令 $y = 0$, 可得 $x = 2$ 或 $x = -6$,

所以, 以 MN 为直径的圆过定点, 定点坐标为 $(2, 0)$ 或 $(-6, 0)$.



【点睛】思路点睛：直线或圆过定点问题，先根据已知表示出直线或圆的方程，令变参数为0，得出方程，求解即可得出求出定点的坐标。

73. (2025·黑龙江哈尔滨·模拟预测) 平面直角坐标系 xOy 中，已知曲线 E 上任意一点到点 $F(2,0)$ 的距离比到直线 $x=-1$ 的距离大1.

(1) 求曲线 E 的方程；

(2) 过点 $F(2,0)$ 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 ，直线 l_1 与曲线 E 交于 A, B 两点，直线 l_2 与曲线 E 交于 C, D 两点，求 $|AB|^2 + |CD|^2$ 的最小值.

【答案】(1) $y^2 = 8x$

(2) 512

【分析】(1) 先判断曲线的类型，再确定其解析式.

(2) 设直线 $l_1: y = k(x-2)$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，根据焦点弦公式分别求弦长 $|AB|$ 和 $|CD|$ ，再结合基本不等式和换元法求 $|AB|^2 + |CD|^2$ 的最小值.

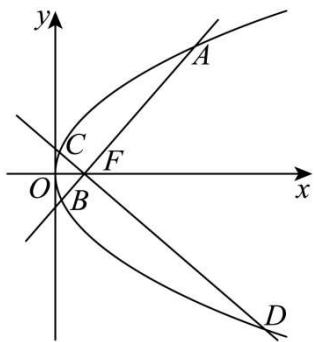
【详解】(1) 因为曲线 E 上任意一点到点 $F(2,0)$ 的距离比到直线 $x=-1$ 的距离大1.

所以曲线 E 上任意一点到点 $F(2,0)$ 的距离与到直线 $x=-2$ 的距离相等，

所以曲线 E 为抛物线，且 $F(2,0)$ 为焦点， $x=-2$ 为准线，

所以 $p=4$ ，所以曲线的方程为： $y^2 = 8x$.

(2) 如图：



设直线 $l_1: y = k(x-2)$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

代入抛物线得： $y^2 = 8x$ ，得 $k^2(x-2)^2 = 8x$ ，

整理得： $k^2x^2 - (4k^2+8)x + 4k^2 = 0$.

由韦达定理： $x_1 + x_2 = \frac{4k^2+8}{k^2} = 4 + \frac{8}{k^2}$.

所以 $|AB| = x_1 + x_2 + p = 4 + \frac{8}{k^2} + 4 = 8 + \frac{8}{k^2}$.

用 $-\frac{1}{k}$ 代替 k , 可得 $|CD| = 8 + 8k^2$.

$$\text{所以 } |AB|^2 + |CD|^2 = \left(8 + \frac{8}{k^2}\right)^2 + (8 + 8k^2)^2 = 64 \left[\left(k^2 + \frac{1}{k^2}\right)^2 + 2 \left(k^2 + \frac{1}{k^2}\right) \right].$$

设 $t = k^2 + \frac{1}{k^2}$, 则 $t = k^2 + \frac{1}{k^2} \geq 2\sqrt{k^2 \times \frac{1}{k^2}} = 2$, 当且仅当 $k^2 = 1$ 时取等号.

$$\text{则 } |AB|^2 + |CD|^2 = \left(8 + \frac{8}{k^2}\right)^2 + (8 + 8k^2)^2 = 64(t^2 + 2t) = 64[(t+1)^2 - 1] \geq 64(3^2 - 1) = 512.$$

74. (23-24 高三上·山西·期末) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 焦点到渐近线的距离为 1.

(1) 求 C 的方程.

(2) 过点 $M(3, 0)$ 的直线 l 与 C 交于不同的两点 A, B , 问: 在 x 轴上是否存在一个定点 P , 使得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 为定值? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

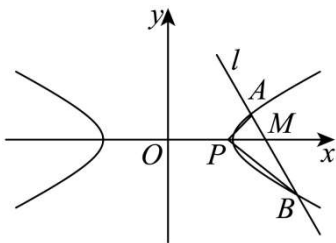
(2) 存在, $P\left(\frac{47}{24}, 0\right)$

【分析】(1) 根据题意列出关于 a, b, c 的方程组, 解之即得;

(2) 由题意可设直线 l 的横截距方程, 与双曲线方程联立消元得到一元二次方程, 得出韦达定理, 不妨假设存在点 P , 求出 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的表达式, 代入韦达定理, 化简后分析即得.

【详解】(1) 设双曲线 C 的半焦距为 $c (c > 0)$, 则双曲线 C 的渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$.

$$\text{由题可知 } \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}, \text{ 故 } C \text{ 的方程为: } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$



(2)

①当直线 l 的倾斜角不为 0 时, 如图, 设直线 l 的方程为 $x = ty + 3$.

$$\text{联立直线与双曲线的方程可得 } \begin{cases} x = ty + 3 \\ \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \end{cases},$$

消去 x , 整理得: $(t^2 - 4)y^2 + 6ty + 5 = 0$.

显然 $t^2 \neq 4$ 且 $\Delta > 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } y_1 + y_2 = \frac{-6t}{t^2 - 4}, y_1 y_2 = \frac{5}{t^2 - 4}.$$

假设存在点 $P(m, 0)$, 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 为定值, 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (x_1 - m, y_1) \cdot (x_2 - m, y_2) = (x_1 - m)(x_2 - m) + y_1 y_2 = (ty_1 + 3 - m)(ty_2 + 3 - m) + y_1 y_2 \\ &= (t^2 + 1)y_1 y_2 + t(3 - m)(y_1 + y_2) + (3 - m)^2 = (t^2 + 1) \frac{5}{t^2 - 4} + t(3 - m) \frac{-6t}{t^2 - 4} + (3 - m)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{-4t^2 - 31 + m^2 t^2 - 4m^2 + 24m}{t^2 - 4} = m^2 - 4 + \frac{24m - 47}{t^2 - 4},$$

故当 $m = \frac{47}{24}$ 时, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \left(\frac{47}{24}\right)^2 - 4$, 为定值, 此时点 $P\left(\frac{47}{24}, 0\right)$.

②当 l 的倾斜角为 0 , 即 l 为 x 轴时, 不妨设 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, 取 $P\left(\frac{47}{24}, 0\right)$, 此时 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \left(-2 - \frac{47}{24}, 0\right) \cdot \left(2 - \frac{47}{24}, 0\right) = \left(\frac{47}{24}\right)^2 - 4$, 为定值.

综上, 当 P 点的坐标为 $\left(\frac{47}{24}, 0\right)$ 时, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 为定值.

【点睛】关键点点睛: 本题主要考查直线与双曲线相交产生的定值问题, 属于较难题.

解题关键有两个, 其一, 选设直线方程, 如果设直线的横截距方程, 比较有利于检验直线斜率为零时的情况; 其二, 在化简 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 得过程中, 要注意利用点在直线上这个条件进行消元, 再代入韦达定理, 并尽量将得到的分式化简到易于发现定值的条件为止.

75. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, F 为 C 的左焦点, P 是 C 右支上的点, 点 P 到 C 的两条渐近线的距离之积为 $\frac{3}{4}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若线段 PF 与 C 的左支交于点 Q , 与两条渐近线交于点 A, B , 且 $3|AB| = |PQ|$, 求 $|PQ|$.

【答案】(1) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

(2) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

【分析】(1) 利用待定系数法即可求得曲线 C 的方程;

(2) 设直线 PF 的方程为 $x = my - 2$, 再与曲线 C 联立方程组, 再利用韦达定理以及弦长公式即可得出结论 >

【详解】(1) 由题意得 $\frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故 $c^2 = \frac{4}{2}a^2$,

又 $a^2 + b^2 = c^2$, C 的两条渐近线方程分别为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

设 $P(x_1, y_1)$, 则 $\frac{\left|\frac{b}{a}x_1 - y_1\right|}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}} \cdot \frac{\left|-\frac{b}{a}x_1 - y_1\right|}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}} = \frac{3}{4}$, 即 $\frac{\left|\frac{b^2}{a^2}x_1^2 - y_1^2\right|}{\frac{b^2}{a^2} + 1} = \frac{a^2b^2\left|\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right|}{b^2 + a^2} = \frac{a^2b^2}{c^2} = \frac{3}{4}$

所以 $a^2b^2 = \frac{3}{4}c^2 = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3}a^2$, 所以 $b^2 = 1$, $a^2 = 3$, 故 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

(2) 由 (1) 知 $F(-2, 0)$, 设直线 PF 的方程为 $x = my - 2$, $Q(x_2, y_2)$, $A(x_3, y_3)$, $B(x_4, y_4)$,

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{3} - y^2 = 1, \\ x = my - 2, \end{cases}$ 得 $(m^2 - 3)y^2 - 4my + 1 = 0$,

则 $y_1 + y_2 = \frac{4m}{m^2 - 3}$, $y_1 y_2 = \frac{1}{m^2 - 3}$,

因为 P 是 C 右支上的点, 所以 $m^2 > 3$,

$|PQ| = \sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2]} = \sqrt{(1+m^2)\left[\left(\frac{4m}{m^2-3}\right)^2 - \frac{4}{m^2-3}\right]} = 2\sqrt{3} \times \frac{m^2+1}{|m^2-3|} = \frac{2\sqrt{3}(m^2+1)}{m^2-3},$

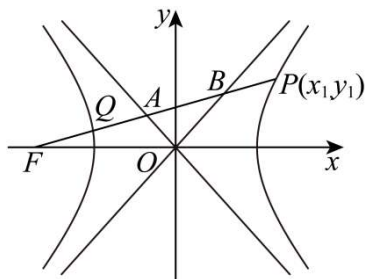
$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{3} - y^2 = 0 \\ x = my - 2 \end{cases}, \text{ 得 } (m^2 - 3)y^2 - 4my + 4 = 0,$$

$$\text{则 } y_3 + y_4 = \frac{4m}{m^2 - 3}, y_3 y_4 = \frac{4}{m^2 - 3},$$

$$|AB| = \sqrt{(1+m^2)[(y_3+y_4)^2 - 4y_3y_4]} = \sqrt{(1+m^2)\left[\left(\frac{4m}{m^2-3}\right)^2 - \frac{16}{m^2-3}\right]} = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{m^2+1}}{|m^2-3|} = \frac{4\sqrt{3}\sqrt{m^2+1}}{m^2-3},$$

$$\text{又 } 3|AB| = |PQ|, \text{ 所以 } 2\sqrt{3} \times \frac{m^2+1}{m^2-3} = 12\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2-3}, \text{ 解得 } m^2 = 35,$$

$$\text{所以 } |PQ| = 2\sqrt{3} \times \frac{m^2+1}{m^2-3} = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$



【点睛】关键点睛：第(2)小问求 $|AB|$ 的运算能力是关键，本题考查了直线与双曲线的位置关系，以及双曲线的综合应用，属于较难题。

76. 已知圆 $C_1: (x + \sqrt{5})^2 + y^2 = 1$ ，圆 $C_2: (x - \sqrt{5})^2 + y^2 = 25$ ，动圆 C 与圆 C_1 和圆 C_2 均相切，且一个内切、一个外切。

(1) 求动圆圆心 C 的轨迹 E 的方程。

(2) 已知点 $A(0, -2)$ ， $B(0, 2)$ ，过点 $(0, 1)$ 的直线 l 与轨迹 E 交于 M, N 两点，记直线 AM 与直线 BN 的交点为 P 。试问：点 P 是否在一条定直线上？若在，求出该定直线；若不在，请说明理由。

【答案】(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \left(x \neq -\frac{6\sqrt{5}}{5} \right)$

(2) 点 P 恒在定直线 $y = 4$ 上

【分析】(1) 设动圆的圆心为 $C(x, y)$ ，利用两圆外切和内切的关系得到 $|CC_1| + |CC_2| = 6 > |C_1C_2|$ ，由椭圆的定义即可得到动点的轨迹，利用待定系数法求出方程即可；

(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx + 1$ ，直曲联立，结合韦达定理得到 $2kx_1x_2 = 3(x_1 + x_2)$ ，求出直线 AM 与直线 BN 的方程，进而得到点 P 满足的关系式，整理化简可得点 P 恒在定直线 $y = 4$ 上。

【详解】(1) 设点 C 的坐标为 (x, y) ，圆 C 的半径为 R 。

由已知条件，得 $|C_1C_2| = 2\sqrt{5}$ 。

① 当动圆 C 与圆 C_1 外切，与圆 C_2 内切时， $|CC_1| = 1 + R$ ， $|CC_2| = 5 - R$ ，从而 $|CC_1| + |CC_2| = 6 > |C_1C_2|$ 。

② 当动圆 C 与圆 C_1 内切，与圆 C_2 外切时， $|CC_1| = 1 - R$ ， $|CC_2| = 5 + R$ ，从而 $|CC_1| + |CC_2| = 6 > |C_1C_2|$ 。

综上所述，圆心 C 的轨迹 E 是以 C_1, C_2 为焦点，6为长轴长的椭圆。

易得圆 C_1 与圆 C_2 交于点 $\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 与 $\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ ，

所以动圆圆心 C 的轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq -\frac{6\sqrt{5}}{5})$.

(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx + 1$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

联立直线 l 与轨迹 E 的方程, 得 $\begin{cases} y = kx + 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq -\frac{6\sqrt{5}}{5}) \end{cases}$

消去 y 并整理, 得 $(9k^2 + 4)x^2 + 18kx - 27 = 0 (x \neq -\frac{6\sqrt{5}}{5})$.

所以 $x_1 + x_2 = \frac{-18k}{9k^2 + 4}$, $x_1 x_2 = \frac{-27}{9k^2 + 4}$,

则有 $2kx_1 x_2 = 3(x_1 + x_2)$.

由已知条件, 得直线 AM 的方程为 $x = \frac{x_1}{y_1 + 2}(y + 2)$,

直线 BN 的方程为 $x = \frac{x_2}{y_2 - 2}(y - 2)$,

则点 P 的坐标 (x, y) 满足 $x_1(y_2 - 2)(y + 2) = x_2(y_1 + 2)(y - 2)$.

又 $y_2 = kx_2 + 1, y_1 = kx_1 + 1$,

所以 $y = \frac{4kx_1 x_2 + 6x_2 - 2x_1}{3x_2 + x_1}$.

把 $2kx_1 x_2 = 3(x_1 + x_2)$ 代入上式, 得 $y = \frac{6x_1 + 6x_2 + 6x_2 - 2x_1}{3x_2 + x_1} = \frac{12x_2 + 4x_1}{3x_2 + x_1} = 4$.

故点 P 恒在定直线 $y = 4$ 上.

77. (23-24 高三上·湖南株洲·开学考试) 已知 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点, O 为坐标原

点, M 为椭圆上任意一点, 椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\triangle MOF$ 的面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) A, B 为椭圆的左, 右顶点, 点 $P(1, 0)$, 当 M 不与 A, B 重合时, 射线 MP 交椭圆 C 于点 N , 直线 AM, BN 交于点 T , 求 $\angle ATB$ 的最大值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) $\frac{\pi}{6}$

【分析】

(1) 根据条件, 列出关于 a, b, c 的方程, 即可求解; (2) 首先设直线 MN 的方程为 $x = my + 1$, 与椭圆方程联立, 得到根与系数的关系, 并利用坐标表示直线 AM, BN 的方程, 并且联立方程求点 T 的轨迹方程, 再利用两直线的倾斜角表示 $\angle ATB$, 利用斜率表示 $\tan \angle ATB$, 再利用基本不等式即可求解.

【详解】(1) 由 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}cb = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$, 解得 $a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$ 所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 由题知 MN 不与 x 轴重合, 设直线 MN 的方程为 $x = my + 1$,

联立方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x = my + 1 \end{cases}$, 消 x 整理得 $(m^2 + 4)y^2 + 2my - 3 = 0, \Delta = 4m^2 + 12(m^2 + 4) = 48(m^2 + 1) > 0$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{-2m}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-3}{m^2 + 4}$.

因为 AM 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$, AN 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$

两直线方程联立得: $\frac{x-2}{x+2} = \frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)} = \frac{y_1(my_2+1-2)}{y_2(my_1+1+2)} = \frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}$

因为 $my_1y_2 = -\frac{3m}{m^2+4} = \frac{3}{2}(y_1+y_2)$. 所以 $\frac{x-2}{x+2} = \frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2} = \frac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2} = \frac{1}{3}$, 解得 $x=4$.

所以动点 T 的轨迹方程为 $x=4(y \neq 0)$

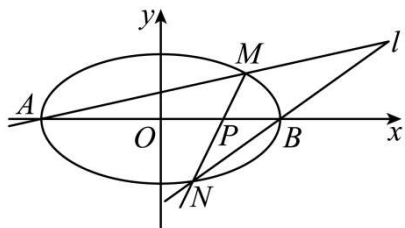
由椭圆的对称性不妨设 $T(4, t)(t > 0)$, 直线 TA 、 TB 的倾斜角为 α, β ,

由图可知 $\beta > \alpha$, 且 $0 < \beta - \alpha < \pi$, 因为 $\angle ATB = \beta - \alpha$, 则 $\tan \angle ATB = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$,

因为 $\tan \alpha = k_{TA} = \frac{t}{6}$, $\tan \beta = k_{TB} = \frac{t}{2}$,

所以 $\tan \angle ATB = \frac{\frac{t}{2} - \frac{t}{6}}{1 + \frac{t}{2} \times \frac{t}{6}} = \frac{3}{1 + \frac{t^2}{12}} = \frac{4t}{t^2 + 12} = \frac{4}{t + \frac{12}{t}} \leq \frac{4}{2\sqrt{t \cdot \frac{12}{t}}} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

当且仅当 $t = 2\sqrt{3}$ 时等号成立, 此时 $T(4, 2\sqrt{3})$, $\angle ATB = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\angle ATB$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.



【点睛】关键点点睛: 本题考查直线与椭圆的位置关系, 动点轨迹, 第二问的关键是根据韦达定理, 联立两直线方程可化简求得点 T 的轨迹, 再利用倾斜角表示 $\angle ATB$.

78. (2025·上海杨浦·三模) 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 上下顶点分别为 B_1, B_2 , $\triangle B_1F_1F_2$ 是面积为 1 的直角三角形, 过焦点的直线交椭圆 Γ 于 P, Q 两点 (P, Q 分别在第一、四象限).

- (1) 求椭圆 Γ 的离心率;
- (2) 已知点 $M(0, m)$, $m > 0$, 求椭圆 Γ 上的动点 R 到点 M 的最大距离;
- (3) 求四边形 B_1B_2QP 面积的取值范围.

【答案】(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 答案详见解析

(3) $\left(\frac{4}{3}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]$

【分析】(1) 根据题意: 利用 $\triangle B_1F_1F_2$ 为面积为 1 的直角三角形, 可得到 $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ c = 1 \end{cases}$, 再求解离心率即可.

(2) 设 $R(x, y)$, 利用两点间距离公式表示 $|RM|^2$, 转化为二次函数分类讨论求解最值即可.

(3) 设直线的方程为 $x = my + 1 (m \neq 0)$, $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 利用圆锥曲线“设而不求”的方法可以把四边形的面积可表示为关于 m 的函数, 再利用函数单调性求得范围即可.

【详解】(1) 如图, 设椭圆 C 的焦距为 $|F_1F_2| = 2c (c > 0)$,

易得 $|OF_1| = c$, $|OB_1| = b$, $|B_1F_1| = a$,

又因为 $\triangle B_1F_1F_2$ 为面积为 1 直角三角形, $\begin{cases} |B_1F_1|=a=\sqrt{2} \\ |OF_1|=c=1 \end{cases}$,

所以椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 有第一问知 $\begin{cases} a=\sqrt{2} \\ c=1 \end{cases}$, 故椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$,

设 $R(x, y)$, 且 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$, 即 $x^2 = 2 - 2y^2$,

$$|RM|^2 = x^2 + (y-m)^2 = 2 - 2y^2 + y^2 - 2my + m^2 = -y^2 - 2my + m^2 + 2,$$

其对称轴为 $y = -m < 0$, 而 $-1 \leq y \leq 1$, 当 $-m \leq -1$, 即 $m \geq 1$ 时,

$|RM|^2$ 在 $y = -1$ 时取得最大值, $|RM|_{\max} = m + 1$;

当 $0 > -m > -1$, 即 $0 < m < 1$ 时,

$|RM|^2$ 在 $y = -m$ 时取得最大值, $|RM|_{\max} = \sqrt{2m^2 + 2}$.

综上, 当 $0 < m < 1$ 时, 最大距离为 $\sqrt{2m^2 + 2}$; 当 $m \geq 1$ 时, 最大距离为 $m + 1$.

(3) 设直线 PQ 的方程为 $x = my + 1$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1 \end{cases}$, 消去 x 整理得 $(m^2 + 2)y^2 + 2my - 1 = 0$,

$$\text{则 } \Delta > 0, y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 + 2}.$$

因为点 P, Q 分别在第一、四象限,

$$\text{所以 } \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} m(y_1 + y_2) + 2 > 0 \\ m^2 y_1 y_2 + m(y_1 + y_2) + 1 > 0 \end{cases},$$

$$\text{故 } \begin{cases} \frac{-2m^2}{m^2 + 2} + 2 > 0 \\ \frac{-m^2}{m^2 + 2} - \frac{2m^2}{m^2 + 2} + 1 > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } -1 < m < 1,$$

得到四边形 B_1B_2QP 的面积为 $S = S_{\triangle OB_1P} + S_{\triangle OB_2Q} + S_{\triangle OPQ}$,

$$= \frac{1}{2} |OB_1| \cdot x_1 + \frac{1}{2} |OB_2| \cdot x_2 + \frac{1}{2} |OF_2| \cdot |y_1 - y_2|,$$

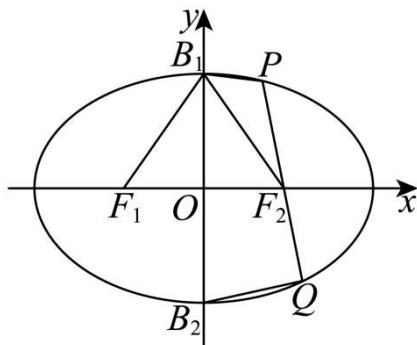
因为 $|B_1B_2| = 2$, $x_1 = my_1 + 1$, $x_2 = my_2 + 1$,

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2} m(y_1 + y_2) + 1 + \frac{1}{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{2 + \sqrt{2m^2 + 2}}{m^2 + 2},$$

$$\text{令 } t = 2 + \sqrt{2m^2 + 2}, \sqrt{2} + 2 \leq t < 4, \text{ 则 } S = \frac{2t}{t^2 - 4t + 6} = \frac{2}{t + \frac{6}{t} - 4},$$

因为 $\sqrt{2} + 2 > \sqrt{6}$, 所以 $y = t + \frac{6}{t}$ 在 $[\sqrt{2} + 2, 4)$ 上单调递增,

故 $S \in \left(\frac{4}{3}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right]$, 即四边形 B_1B_2QP 面积的取值范围为 $\left(\frac{4}{3}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right]$.



79. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(4, 0)$, 渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{3}x$.

(1) 求 C 的方程.

(2) 若动直线 l 过点 F , 且与 C 交于 M, N 两点 (M 在第一象限, N 在第四象限), 过点 M 作直线 $x = 1$ 的垂线, 垂足为 D .

(i) 证明: 直线 DN 恒过点 $\left(\frac{5}{2}, 0 \right)$;

(ii) 设 O 为坐标原点, $\triangle ODN$ 的面积为 S , 求 S 的最小值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

(2) (i) 证明见解析; (ii) 15

【分析】(1) 由渐近线方程与右焦点建立方程, 结合双曲线标准方程, 可得答案.

(2) (i) 设出点的坐标以及直线方程, 联立方程组, 写出韦达定理, 由题意整理代数式, 结合直线过定点, 可得答案; (ii) 由题意作图, 利用三角形面积公式, 整理其函数解析式, 根据函数单调性, 可得答案.

【详解】(1) 由题意知 $\begin{cases} \frac{b}{a} = \sqrt{3}, \\ a^2 + b^2 = 4^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 2\sqrt{3}, \end{cases}$

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

(2) (i) 设 $l: x = my + 4$, 点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $D(1, y_1)$.

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1, \\ x = my + 4, \end{cases}$ 可得 $(3m^2 - 1)y^2 + 24my + 36 = 0$,

因为 l 与 C 在第一象限和第四象限各有一个交点, 所以 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$,

且 $y_1 + y_2 = \frac{24m}{1 - 3m^2}$, $y_1 y_2 = \frac{36}{3m^2 - 1}$,

直线 $DN: y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - 1}(x - 1) + y_1$,

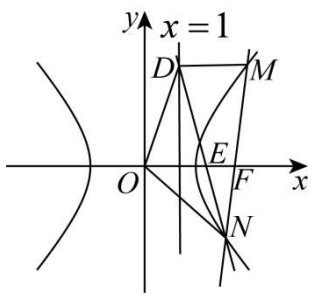
令 $x = \frac{5}{2}$, 得 $y = \frac{3(y_2 - y_1) + 2y_1(x_2 - 1)}{2(x_2 - 1)} = \frac{3y_2 - 5y_1 + 2y_1 x_2}{2(x_2 - 1)}$,

又 $3y_2 - 5y_1 + 2y_1 x_2 = 3y_2 - 5y_1 + 2y_1(my_2 + 4) = 3(y_1 + y_2) + 2my_1 y_2 = \frac{72m}{1 - 3m^2} + \frac{72m}{3m^2 - 1} = 0$,

所以直线 DN 恒过点 $(\frac{5}{2}, 0)$.

(ii) 如图, 设 $E(\frac{5}{2}, 0)$,

则 $S = \frac{1}{2} |OE| |y_1 - y_2| = \frac{5}{4} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{15\sqrt{m^2 + 1}}{1 - 3m^2}$.



设 $\sqrt{m^2 + 1} = t$, 则 $1 \leq t < \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $S = \frac{15t}{4 - 3t^2} = \frac{15}{\frac{4}{t} - 3t}$ 在 $[1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ 上单调递增,

所以当 $t = 1$ 时, S 取最小值, 最小值为 15.

80. (25-26 高三上·山东泰安·开学考试) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{8} = 1 (a > 2\sqrt{2})$ 的左顶点为 A , 右焦点为 F , 且

$|AF| = 4$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过 A 且不与 x 轴重合的直线与 C 的另一个交点为 P , 与直线 $x=9$ 交于点 Q , 过 A 且平行于 QF 的直线与直线 PF 交于点 R .

(i) 若 $|PQ|=2|PA|$, 求 $\triangle AFR$ 的面积;

(ii) 证明: 存在定点 G , 使得 $\angle ARG = \angle FRQ$.

【答案】(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$;

(2) (i) 8; (ii) 证明见解析.

【分析】(1) 根据给定条件, 列式求出 a 即可.

(2) (i) 由已知求出点 P 的坐标, 再借助平行关系求得 $|RF|=|AF|=4$, 进而求出面积; (ii) 由 (i) 的信息可得 QF 平分角 $\angle PFS$, 当 PF 不垂直于 x 轴时, 设出直线 AP 方程, 并与椭圆方程联立求出点 P, Q 坐标, 借助二倍角的正切公式证得 QF 平分角 $\angle PFS$, 结合相似三角形性质推理得证.

【详解】(1) 设 $F(c, 0)$ ($c > 0$), 而 $A(-a, 0)$, 则 $|AF|=a+c=4$,

又 $a^2 - c^2 = 8$, 解得 $\begin{cases} a=3 \\ c=1 \end{cases}$, 则 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{2}$

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

(2) (i) 由 A, P, Q 共线, 且 A, Q 的横坐标分别为 $x_A = -3, x_Q = 9$, $|PQ|=2|PA|$,

则由 $9 - x_P = 2(x_P + 3)$, 可得点 P 的横坐标为 1, 因 $F(1, 0)$, 则 $PF \perp x$ 轴,

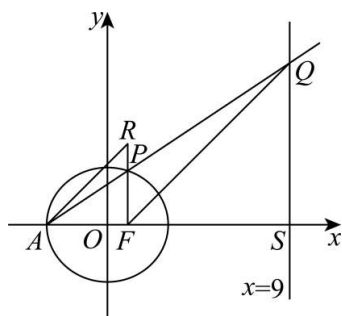
由对称性不妨设 P 在第一象限, 由 $\frac{1^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$, 得 $y = \frac{8}{3}$, 即 $P(1, \frac{8}{3})$,

设 $Q(9, y_Q)$, 由 $\frac{\frac{8}{3}}{y_Q} = \frac{|PA|}{|AQ|} = \frac{1}{3}$, 解得 $y_Q = 8$, 直线 QF 的斜率 $k_{QF} = \frac{8-0}{9-1} = 1$,

设直线 $x=9$ 与 x 轴的交点为 S , 因 $|QS|=8=|FS|$, 可得 $\angle QFS = \frac{\pi}{4}$,

又 $AR \parallel FQ$, 则 $\angle RAF = \angle QFS = \frac{\pi}{4}$, 又 $RF \perp x$ 轴, 则 $|RF|=|AF|=4$,

所以 $\triangle AFR$ 的面积 $S_{\triangle AFR} = \frac{1}{2}|AF| \cdot |RF| = 8$.



(ii) 由 (i) 猜想 QF 平分角 $\angle PFS$,

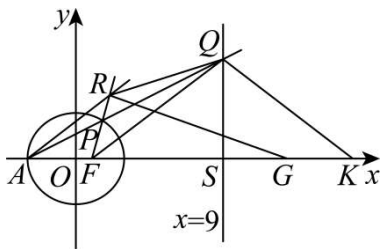
由 $A(-3, 0)$, 设直线 AP 的方程为 $y = k(x+3)$ ($k \neq 0$),

由 $\begin{cases} y = k(x+3) \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \end{cases}$ 消去 y , 得 $(8+9k^2)x^2 + 54k^2x + 81k^2 - 72 = 0$,

设 $P(x_1, y_1)$, 则 $-3x_1 = \frac{81k^2 - 72}{8+9k^2}$, 可得 $x_1 = \frac{24-27k^2}{8+9k^2}$,

则有 $P(\frac{24-27k^2}{8+9k^2}, \frac{48k}{8+9k^2})$, $Q(9, 12k)$,

所以存在定点 $G(13,0)$, 使得 $\angle ARG = \angle FRQ$.



- (3) 过点 P 作 $PH \perp CD$, 垂足为 H , 求 $|PH|$ 的最大值.

(2) 由 (1) 可得 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$,

由题意知 k_1, k_2 均存在且不等于 0,

则设直线 AB 的方程为: $x = my - 1, k_1 = \frac{1}{m} (m \neq 0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则 $x_1 = my_1 - 1, x_2 = my_2 - 1, 3x_1^2 + 4y_1^2 = 12$.

设直线 AC 方程为: $x = ny + 1, n = \frac{x_1 - 1}{y_1}, C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$

与椭圆方程联立得: $(3n^2 + 4)y^2 + 6ny - 9 = 0, \Delta = (6n)^2 + 36(3n^2 + 4) = 144n^2 + 144 > 0$,

所以 $y_1 y_3 = -\frac{9}{3n^2 + 4} = -\frac{9}{3\left(\frac{x_1 - 1}{y_1}\right)^2 + 4} = -\frac{9y_1^2}{3(x_1 - 1)^2 + 4y_1^2} = -\frac{9y_1^2}{3x_1^2 + 4y_1^2 - 6x_1 + 3} = \frac{3y_1^2}{2x_1 - 5}$, 因为 $y_1 \neq$

0,

故 $y_3 = \frac{3y_1}{2x_1 - 5}$, 因此 $x_3 = ny_3 + 1 = \frac{x_1 - 1}{y_1} \cdot \frac{3y_1}{2x_1 - 5} + 1 = \frac{5x_1 - 8}{2x_1 - 5}$.

同理 $y_4 = \frac{3y_2}{2x_2 - 5}, x_4 = \frac{5x_2 - 8}{2x_2 - 5}$.

CD 斜率为 $k_2 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{\frac{3y_2}{2x_2 - 5} - \frac{3y_1}{2x_1 - 5}}{\frac{5x_2 - 8}{2x_2 - 5} - \frac{5x_1 - 8}{2x_1 - 5}} = \frac{3y_2(2x_1 - 5) - 3y_1(2x_2 - 5)}{(5x_2 - 8)(2x_1 - 5) - (5x_1 - 8)(2x_2 - 5)}$

$= \frac{3y_2(2my_1 - 7) - 3y_1(2my_2 - 7)}{(5x_2 - 8)(2x_1 - 5) - (5x_1 - 8)(2x_2 - 5)} = \frac{7(y_1 - y_2)}{3(x_1 - x_2)} = \frac{7}{3} k_1$,

故 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{3}{7}$.

(3) 由 (2) 知: 直线 CD 的方程为: $y - \frac{3y_1}{2x_1 - 5} = \frac{7}{3m} \left(x - \frac{5x_1 - 8}{2x_1 - 5} \right)$,

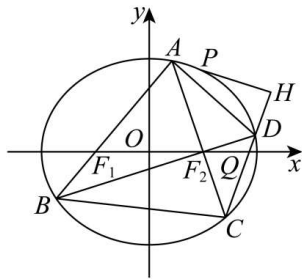
即 $y = \frac{7}{3m} x + \frac{3y_1}{2x_1 - 5} - \frac{7}{3m} \cdot \frac{5x_1 - 8}{2x_1 - 5} = \frac{7}{3m} x + \frac{9my_1 - 7(5x_1 - 8)}{3m(2x_1 - 5)}$

$= \frac{7}{3m} x + \frac{9my_1 - 7(5my_1 - 13)}{3m(2my_1 - 7)} = \frac{7}{3m} x + \frac{-13(2my_1 - 7)}{3m(2my_1 - 7)} = \frac{7}{3m} \left(x - \frac{13}{7} \right)$

所以直线 CD 过定点 $Q\left(\frac{13}{7}, 0\right)$.

因为 $PH \perp CD$, 由几何意义知: $|PH| \leq |PQ| = \frac{3\sqrt{65}}{14}$,

故 $|PH|$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{65}}{14}$.



82. (2025·重庆·模拟预测) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右焦点为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, P 为 C 上一动点, $\triangle PF_1F_2$ 内切圆面积的最大值为 $\frac{\pi}{3}$, 且 F_2 到直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 的距离为 $3c$, 过 F_2 的直线 l 交 C 于 A, B 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 $OP \perp AB$, 探究: $\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|OP|^2}$ 是否为定值, 若为定值, 求出定值; 若不为定值, 请说明理由;

(3) 若 $P(1, y_0) (y_0 > 0)$, 直线 l 与直线 $x = 4$ 相交于点 Q , 记 PA, PQ, PB 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 求证: k_1, k_2, k_3 成等差数列.

【答案】(1) $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 是定值, $\frac{7}{12}$;

(3) 证明见解析.

【分析】(1) 根据已知得 $\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 = \frac{1}{3}$ 、 $a^2 = 4c^2$, 结合椭圆参数关系求参数, 即可得方程;

(2) 令 $l: x = ty + 1$, 联立椭圆并应用韦达定理得 $y_A + y_B = -\frac{6t}{3t^2+4}$, $y_A y_B = -\frac{9}{3t^2+4}$, 再由弦长公式得到 $|AB| = \frac{12(1+t^2)}{4+3t^2}$, 由 $OP: x = -\frac{y}{t}$ 联立椭圆求 P 坐标, 进而有 $\frac{1}{|OP|^2} = \frac{3+4t^2}{12(1+t^2)}$, 注意讨论 $l: y = 0$ 的情况, 即可得结论;

(3) 首先得到 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 再设 $l: y = k(x-1)$, 联立椭圆及韦达定理得 $x_A + x_B = \frac{8k^2}{3+4k^2}$, $x_A x_B = \frac{4k^2-12}{3+4k^2}$, 并求得 $Q(4, 3k)$, 最后应用两点式求斜率并化简整理 $k_1 + k_3$, 判断其与 $2k_2$ 是否相等, 即可证.

【详解】(1) 由题设, 若 $\triangle PF_1 F_2$ 内切圆面积最大, 即其半径 r 最大, 此时 P 为椭圆的上(下)顶点,

所以 $\begin{cases} \frac{1}{2} r_{\max}(2a+2c) = \frac{1}{2} b \cdot 2c \\ \pi r_{\max}^2 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$, 可得 $\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 = \frac{1}{3}$, 又 $\frac{a^2}{c} - c = 3c$, 则 $a^2 = 4c^2$, 且 $b^2 + c^2 = a^2$,

所以 $\begin{cases} a=2c \\ b=\sqrt{3}c \end{cases}$, 故 $\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$, 得 $c=1$, 所以 $a^2=4, b^2=3$, 即方程为 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 令 $l: x = ty + 1$, 联立椭圆方程有 $\frac{(ty+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 整理得 $(3t^2+4)y^2 + 6ty - 9 = 0$,

显然 $\Delta > 0$, 则 $y_A + y_B = -\frac{6t}{3t^2+4}$, $y_A y_B = -\frac{9}{3t^2+4}$,

故 $|AB| = \sqrt{1+t^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{6t}{3t^2+4}\right)^2 + \frac{36}{3t^2+4}} = \frac{12(1+t^2)}{4+3t^2}$, 则 $\frac{1}{|AB|} = \frac{4+3t^2}{12(1+t^2)}$

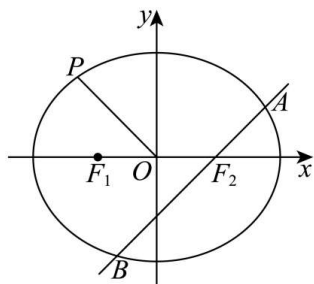
由 $OP \perp AB$, 则 $OP: x = -\frac{y}{t}$, 代入椭圆有 $\frac{y^2}{4t^2} + \frac{y^2}{3} = 1$, 可得 $y_P^2 = \frac{12t^2}{3+4t^2}$,

所以 $\frac{1}{|OP|^2} = \frac{1}{\frac{12}{3+4t^2} + \frac{12t^2}{3+4t^2}} = \frac{3+4t^2}{12(1+t^2)}$,

此时, $\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|OP|^2} = \frac{4+3t^2}{12(1+t^2)} + \frac{3+4t^2}{12(1+t^2)} = \frac{7}{12}$,

当 $l: y = 0$ 时, $|AB| = 2a = 4$, $|OP|^2 = b^2 = 3$, 则 $\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|OP|^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$,

综上, $\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|OP|^2} = \frac{7}{12}$ 为定值;



(3) 由题设 $\frac{1}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$ 且 $y_0 > 0$, 则 $y_0 = \frac{3}{2}$, 即 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$,

显然直线 l 的斜率存在, 设 $l: y = k(x-1)$, 联立 $3x^2 + 4y^2 = 12$,

所以 $3x^2 + 4k^2(x-1)^2 = 12$, 整理得 $(3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$,

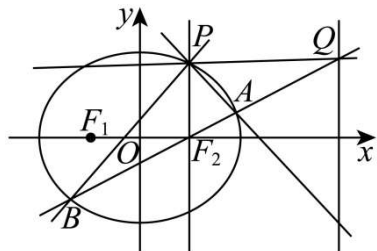
所以 $x_A + x_B = \frac{8k^2}{3+4k^2}$, $x_A x_B = \frac{4k^2-12}{3+4k^2}$, 令 $x=4$, 则 $y_Q = 3k$,

由 $k_1 = \frac{y_A - \frac{3}{2}}{x_A - 1}$, $k_3 = \frac{y_B - \frac{3}{2}}{x_B - 1}$, 则 $k_1 + k_3 = \frac{y_A - \frac{3}{2}}{x_A - 1} + \frac{y_B - \frac{3}{2}}{x_B - 1}$, 且 $k_2 = \frac{3k - \frac{3}{2}}{4 - 1} = k - \frac{1}{2}$,

$$k_1 + k_3 = k - \frac{3}{2(x_A - 1)} + k - \frac{3}{2(x_B - 1)} = 2k - \frac{3}{2} \times \frac{x_A + x_B - 2}{x_A x_B - (x_A + x_B) + 1} = 2k - \frac{3}{2} \times$$

$$\frac{\frac{8k^2}{3+4k^2} - 2}{\frac{4k^2-12}{3+4k^2} - \frac{8k^2}{3+4k^2} + 1} = 2k - \frac{3}{2} \times \frac{-\frac{6}{3+4k^2}}{-\frac{9}{3+4k^2}} = 2k - \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 2k - 1,$$

所以 $k_1 + k_3 = 2k_2$, 即 k_1, k_2, k_3 成等差数列.



83. (2025·吉林·模拟预测) 已知对任意平面向量 $\overrightarrow{AB} = (x, y)$, 把向量 \overrightarrow{AB} 绕其起点沿逆时针方向旋转 θ 角后得到向量 $\overrightarrow{AP} = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$, 叫做把点 B 绕点 A 沿逆时针方向旋转 θ 角得到点 P .

(1) 若平面内点 $A(1, 2)$, 点 $B(1 + \sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})$, 把点 B 绕点 A 沿顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到点 P , 求点 P 的坐标;

(2) 若双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 得到曲线 $y = \frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{x}$.

(i) 求双曲线 E 的标准方程及离心率;

(ii) 双曲线 E 的左顶点为 A , 右焦点为 F , 过点 F 且斜率存在的直线 l 交双曲线 E 于 M, N 两点, 点 T 是 $\triangle AMN$ 的外心, 求证: 直线 OT 与直线 l 的斜率之积为定值.

【答案】(1) $(0, -1)$

(2) (i) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1, \frac{2\sqrt{3}}{3}$; (ii) 证明见解析

【分析】(1) 设 $P(x, y)$, 再利用新定义求出 \overrightarrow{AP} 的坐标即可求解;

(2) (i) 双曲线 E 上任取一点 $M(x, y)$, 根据新定义得出其旋转后的点 M' 坐标, 再将其坐标代入 $y = \frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{x}$ 中即可求得双曲线 E 的标准方程, 进而求得离心率;

(ii) 设直线 $l: x = my + 4 (m \neq 0)$, 与双曲线方程联立得出韦达定理, 再分别用点 M, N 坐标求出线段 AM, AN 的中垂线方程, 设 $T(x_0, y_0)$, 将点 T 坐标代入两条中垂线方程中, 再利用同构思想得出 y_1, y_2 是方程 $2y^2 - (x_0 m + y_0)y - (4 + 2\sqrt{3})x_0 = 0$ 的两个根, 再根据两次韦达定理建立关系式, 即可求出 $\frac{y_0}{x_0}$, 进而得

出 $k_l k_{OT} = \frac{1}{m} \cdot \frac{y_0}{x_0}$ 为定值.

【详解】(1) 设 $P(x, y)$, 则 $\overrightarrow{AP} = (x - 1, y - 2)$, $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$,

将 \overrightarrow{AB} 绕点 A 沿顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 到 \overrightarrow{AP} , 相当于沿逆时针方向旋转 $\frac{7\pi}{4}$ 到 \overrightarrow{AP} ,

$$\text{则 } \overrightarrow{AP} = \left(\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{4} + 2\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{4}, \sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{4} - 2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{4} \right) = (-1, -3),$$

$$\text{则 } \begin{cases} x-1=-1 \\ y-2=-3 \end{cases}, \text{解得 } x=0, y=-1, \text{因此点 } P \text{ 的坐标是 } (0, -1).$$

(2) (i) 在双曲线 E 上任取一点 $M(x, y)$,

将 $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ 绕原点 O 沿逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$,

$$\text{得到 } \overrightarrow{OM'} = \left(x\cos\frac{\pi}{3} - y\sin\frac{\pi}{3}, x\sin\frac{\pi}{3} + y\cos\frac{\pi}{3} \right) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right),$$

$$\text{则 } M' \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right)$$

$$\text{又点 } M' \text{ 在曲线 } y = \frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{x} \text{ 上, 则 } \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \right) + \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y},$$

$$\text{化简得双曲线 } E \text{ 的标准方程为: } \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

$$\text{则 } a = 2\sqrt{3}, b = 2, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4, \text{故离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(ii) 由 (i) 可知 $A(-2\sqrt{3}, 0), F(4, 0)$, 由题意可知直线 l 的斜率存在不为 0,

故设直线 l 方程为: $x = my + 4 (m \neq 0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = my + 4 \end{cases}, \text{得 } (m^2 - 3)y^2 + 8my + 4 = 0,$$

$$\text{则 } m^2 \neq 3, \Delta > 0, y_1 + y_2 = -\frac{8m}{m^2 - 3}, y_1 y_2 = \frac{4}{m^2 - 3},$$

$$\text{因线段 } AM \text{ 的中点为 } \left(\frac{x_1 - 2\sqrt{3}}{2}, \frac{y_1}{2} \right), k_{AM} = \frac{y_1}{x_1 + 2\sqrt{3}},$$

$$\text{所以线段 } AM \text{ 的垂直平分线为 } y - \frac{y_1}{2} = -\frac{x_1 + 2\sqrt{3}}{y_1} \left(x - \frac{x_1 - 2\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\text{即 } 2(x_1 + 2\sqrt{3})x + 2y_1 y - y_1^2 - (x_1^2 - 12) = 0,$$

$$\text{又 } x_1^2 - 12 = 3y_1^2, x_1 = my_1 + 4,$$

$$\text{则线段 } AM \text{ 的垂直平分线为 } (my_1 + 4 + 2\sqrt{3})x + y_1 y - 2y_1^2 = 0,$$

$$\text{同理线段 } AN \text{ 的垂直平分线为 } (my_2 + 4 + 2\sqrt{3})x + y_2 y - 2y_2^2 = 0,$$

设 $T(x_0, y_0)$,

$$\text{因点 } T \text{ 是 } \triangle AMN \text{ 的外心, 则有 } \begin{cases} (my_1 + 4 + 2\sqrt{3})x_0 + y_1 y_0 - 2y_1^2 = 0 \\ (my_2 + 4 + 2\sqrt{3})x_0 + y_2 y_0 - 2y_2^2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{则 } y_1, y_2 \text{ 是方程 } (my + 4 + 2\sqrt{3})x_0 + y y_0 - 2y^2 = 0,$$

$$\text{即 } 2y^2 - (x_0 m + y_0)y - (4 + 2\sqrt{3})x_0 = 0 \text{ 的两个根,}$$

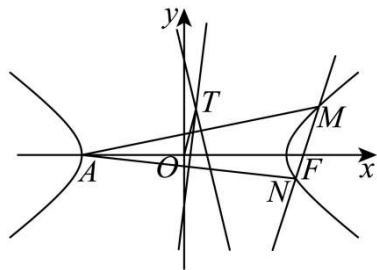
$$\text{则 } y_1 + y_2 = \frac{x_0 m + y_0}{2}, y_1 y_2 = \frac{-(4 + 2\sqrt{3})x_0}{2},$$

$$\text{故 } -\frac{8m}{m^2 - 3} = \frac{x_0 m + y_0}{2}, \frac{4}{m^2 - 3} = \frac{-(4 + 2\sqrt{3})x_0}{2},$$

$$\text{两式作商得, } -\frac{8m}{4} = \frac{x_0 m + y_0}{-(4 + 2\sqrt{3})x_0} = \frac{1}{-(4 + 2\sqrt{3})} \left(m + \frac{y_0}{x_0} \right),$$

$$\text{得 } \frac{y_0}{x_0} = (7 + 4\sqrt{3})m, \text{则 } k_{OT} = \frac{1}{m} \cdot \frac{y_0}{x_0} = 7 + 4\sqrt{3},$$

即直线 OT 与直线 l 的斜率之积为定值 $7 + 4\sqrt{3}$.



84. (24-25 高三下·重庆·月考) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$, 点

$P_1(1,1)$ 在 C 上. 按如下方式构造点 $P_n (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$: 过点 P_{n-1} 作斜率为 1 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1} , 点 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点为 P_n , 记点 P_n 的坐标为 (x_n, y_n) , O 为坐标原点.

(1) 求 $\triangle OQ_1Q_2$ 的面积;

(2) 记 $a_n = 2x_n - y_n$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列;

(3) G, H 分别为线段 $P_nP_{n+2}, P_{n+1}P_{n+3}$ 的中点, 记 $\triangle OQ_nQ_{n+1}, \triangle OGH$ 的面积分别为 S_1, S_2 . 判断 $\frac{S_1}{S_2}$ 是否为定值, 如果是定值, 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值; 如果不是, 请说明理由.

【答案】(1) 1

(2) 证明见解析

(3) 是定值, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{25}$

【分析】(1) 根据渐近线方程, 可求得双曲线方程, 利用题意求得 Q_1, Q_2 坐标, 进而求得三角形面积;

(2) 根据 $P_n (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 的构成方式, 得到 $x_n - y_n$ 与 $x_{n-1} - y_{n-1}$ 的关系式, 从而的数列递推关系式, 从而证明 $\{a_n\}$ 为等比数列;

(3) 借助第 (2) 小问的结论, 写出数列通项公式, 得到 y_n 与 x_n 的关系式, 再利用点 P_n 在双曲线上, 求得 $P_nP_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}$ 的坐标, 进而求得 Q_n, Q_{n+1} 的坐标, 求得两个三角形的面积, 进而求得 $\frac{S_1}{S_2}$.

【详解】(1) 由题知 $b = 2a$, 又 $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$, 所以 $a^2 = \frac{3}{4}, b^2 = 3$,

故双曲线的方程为 $4x^2 - y^2 = 3$.

又过点 $P_1(1,1)$, 斜率为 1 的直线方程为 $y = x$, 如图,

由双曲线与直线的对称性可知 $Q_1(-1, -1)$, 所以 $P_2(1, -1)$,

又过 $P_2(1, -1)$, 且斜率为 1 的直线方程为 $y + 1 = x - 1$, 即 $y = x - 2$,

由 $\begin{cases} y = x - 2 \\ 4x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$, 解得 $x = 1$ 或 $x = -\frac{7}{3}$,

当 $x = -\frac{7}{3}$ 时, $y = -\frac{7}{3} - 2 = -\frac{13}{3}$, 所以 $Q_2(-\frac{7}{3}, -\frac{13}{3})$;

于是: $S_{\triangle OQ_1Q_2} = \frac{1}{2} \left| (-1) \times (-\frac{13}{3}) - (-1) \times (-\frac{7}{3}) \right| = 1$.

(2) 设 $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}) (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$,

则过 $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}) (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$, 且斜率为 1 的直线方程为 $y - y_{n-1} = x - x_{n-1}$,

联立 $\begin{cases} y - y_{n-1} = x - x_{n-1} \\ 4x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$, 消 y 得到 $3x^2 + 2(x_{n-1} - y_{n-1})x - (x_{n-1} - y_{n-1})^2 - 3 = 0$,

由题有 $-x_n + x_{n-1} = -\frac{2}{3}(x_{n-1} - y_{n-1})$, 得到 $3x_n = 5x_{n-1} - 2y_{n-1}$,

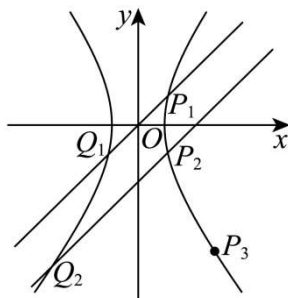
由题知点 $Q_{n-1}(-x_n, y_n)$ 在直线 $y - y_{n-1} = x - x_{n-1}$ 上, 即有 $y_n - y_{n-1} = -x_n - x_{n-1}$,

所以 $y_n = y_{n-1} - x_n - x_{n-1}$, 所以 $2x_n - y_n = 6x_{n-1} - 3y_{n-1}$, 所以 $a_n = 3a_{n-1}$,

由 (1) 知 $a_1 = 2 - 1 = 1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 3 为公比的等比数列.

(3) 由 (2) 知 $a_n = 2x_n - y_n = 3^{n-1}$, 得到 $y_n = 2x_n - 3^{n-1}$,

由 $4x_n^2 - y_n^2 = 3$, 即 $4x_n^2 - y_n^2 = (2x_n - y_n)(2x_n + y_n) = 3$,



$$\text{即 } 2x_n + y_n = \frac{3}{2x_n - y_n} = \frac{3}{3^{n-1}} = 3^{2-n}, \text{ 则 } x_n = \frac{(2x_n + y_n) + (2x_n - y_n)}{4} = \frac{3^{2-n} + 3^{n-1}}{4},$$

$$y_n = \frac{(2x_n + y_n) - (2x_n - y_n)}{2} = \frac{3^{2-n} - 3^{n-1}}{2},$$

$$\text{故 } P_n\left(\frac{3^{2-n} + 3^{n-1}}{4}, \frac{3^{2-n} - 3^{n-1}}{2}\right), P_{n+1}\left(\frac{3^{1-n} + 3^n}{4}, \frac{3^{1-n} - 3^n}{2}\right),$$

$$P_{n+2}\left(\frac{3^{-n} + 3^{n+1}}{4}, \frac{3^{-n} - 3^{n+1}}{2}\right), P_{n+3}\left(\frac{3^{-n-1} + 3^{n+2}}{4}, \frac{3^{-n-1} - 3^{n+2}}{2}\right),$$

$$\text{故 } x_G = \frac{1}{2} \left(\frac{3^{2-n} + 3^{n-1}}{4} + \frac{3^{-n} + 3^{n+1}}{4} \right) = \frac{5(3^{-n} + 3^{n-1})}{4},$$

$$y_G = \frac{1}{2} \left(\frac{3^{2-n} - 3^{n-1}}{2} + \frac{3^{-n} - 3^{n+1}}{2} \right) = \frac{5(3^{-n} - 3^{n-1})}{2},$$

$$\text{即 } G\left(\frac{5(3^{-n} + 3^{n-1})}{4}, \frac{5(3^{-n} - 3^{n-1})}{2}\right), \text{ 则 } H\left(\frac{5(3^{-n-1} + 3^n)}{4}, \frac{5(3^{-n-1} - 3^n)}{2}\right),$$

$$\text{由 } Q_n\left(-\frac{3^{1-n} + 3^n}{4}, \frac{3^{1-n} - 3^n}{2}\right), Q_{n+1}\left(-\frac{3^{-n} + 3^{n+1}}{4}, \frac{3^{-n} - 3^{n+1}}{2}\right) \text{ 可得:}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} |x_{n+1}y_{n+2} - x_{n+2}y_{n+1}| = \frac{1}{2} \left| \left(-\frac{3^{1-n} + 3^n}{4}\right) \left(\frac{3^{-n} - 3^{n+1}}{2}\right) - \left(-\frac{3^{-n} + 3^{n+1}}{4}\right) \left(\frac{3^{1-n} - 3^n}{2}\right) \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{(3^{1-n} + 3^n)(3^{-n} - 3^{n+1}) - (3^{-n} + 3^{n+1})(3^{1-n} - 3^n)}{8} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{3^{1-2n} + 1 - 9 - 3^{2n+1} - 3^{1-2n} - 9 + 1 + 3^{2n+1}}{8} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{-16}{8} \right| = 1,$$

$$\text{由 } G\left(\frac{5(3^{-n} + 3^{n-1})}{4}, \frac{5(3^{-n} - 3^{n-1})}{2}\right), H\left(\frac{5(3^{-n-1} + 3^n)}{4}, \frac{5(3^{-n-1} - 3^n)}{2}\right) \text{ 可得:}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} |x_G y_H - x_H y_G| = \frac{1}{2} \left| \frac{5(3^{-n} + 3^{n-1})}{4} \cdot \frac{5(3^{-n-1} - 3^n)}{2} - \frac{5(3^{-n-1} + 3^n)}{4} \cdot \frac{5(3^{-n} - 3^{n-1})}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{25}{8} |(3^{-n} + 3^{n-1})(3^{-n-1} - 3^n) - (3^{-n-1} + 3^n)(3^{-n} - 3^{n-1})|$$

$$= \frac{25}{16} \left| 3^{-2n-1} - 1 + \frac{1}{9} - 3^{2n-1} - 3^{-2n-1} - 1 + \frac{1}{9} + 3^{2n-1} \right| = \frac{25}{16} \left| \frac{-16}{9} \right| = \frac{25}{9},$$

$$\text{所以: } \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{25}.$$

【点睛】本题利用点的坐标求三角形面积,利用公式为:

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 三角形的面积 } S = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

85. (24-25 高三上·湖北·月考) 现有一双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $F_1(-2, 0)$ 和 $F_2(2, 0)$ 分别为 Γ 的左焦点和右

焦点, P 是双曲线 Γ 上一动点, $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的最大值为 3.

(1) 求双曲线 Γ 的标准方程;

(2) 过 F_1 的直线交双曲线左支于 A, B 两点 (点 A 在点 B 上方), 判断 $\frac{1}{|AF_1|} + \frac{1}{|BF_1|}$ 是否是定值, 并给出

理由;

(3) 在 (2) 的条件下, 过点 F_2 作平行于 AB 的直线交双曲线右支于 C, D 两点 (点 C 在点 D 上方), AF_2 与 CF_1 相交于点 W , 求证: $|WF_1| + |WF_2|$ 为定值.

【答案】(1) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

(2) $\frac{1}{|AF_1|} + \frac{1}{|BF_1|} = \frac{2}{3}$, 是定值, 理由见解析

(3) 证明见解析

【分析】1) 解出 $\therefore \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{x+2a}{x} = 1 + \frac{2a}{x}$, 再利用单调性解出最值, 最后求出双曲线 Γ 的标准方程即可;

(2) 利用直曲联立解出一元二次方程, 利用韦达定理解出定值即可;

(3) 利用对称性和三角形相似解出 $\therefore |WF_1| + |WF_2| = 3 + 3\left(\frac{1}{|BF_1|} + \frac{1}{|DF_2|}\right)$, 再解出 $\therefore |WF_1| + |WF_2| = 3 + 3\left(\frac{1}{|BF_1|} + \frac{1}{|DF_2|}\right) = 3 + 3\left(\frac{1}{|BF_1|} + \frac{1}{|BF_1|}\right) = 5$ 即可.

【详解】(1) 设 $|PF_2| = x$, 则 $|PF_1| = x + 2a > 0$,

由 $|PF_1| + |PF_2| \geq |F_1F_2|$ 得 $x \geq 2 - a$.

$\therefore \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{x+2a}{x} = 1 + \frac{2a}{x}$ 在区间 $[2-a, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore x = 2 - a$ 时, $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 取最大值 3,

$\therefore 1 + \frac{2a}{2-a} = 3$, 解得 $a = 1$.

$\therefore b^2 = 2^2 - 1 = 3$.

\therefore 由题意可得双曲线 Γ 的标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

直线 AB 为 $x = my - 2 \left(m^2 \neq \frac{1}{3}\right)$,

联立 $\begin{cases} x = my - 2, \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 得 $(3m^2 - 1)y^2 - 12my + 9 = 0$,

$\Delta = 144m^2 - 36(3m^2 - 1) = 36(m^2 + 1)$,

$\therefore y_1 + y_2 = \frac{12m}{3m^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{9}{3m^2 - 1}$,

$|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{6\sqrt{m^2 + 1}}{|3m^2 - 1|}$,

$\therefore \frac{1}{|AF_1|} + \frac{1}{|BF_1|} = \frac{|AF_1| + |BF_1|}{|AF_1||BF_1|} = \frac{\sqrt{1+m^2}|y_1 - y_2|}{\sqrt{1+m^2}|y_1|\sqrt{1+m^2}|y_2|}$
 $= \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \frac{|y_1 - y_2|}{|y_1 y_2|} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \frac{\frac{6\sqrt{m^2+1}}{|3m^2-1|}}{\left|\frac{9}{3m^2-1}\right|} = \frac{2}{3}.$

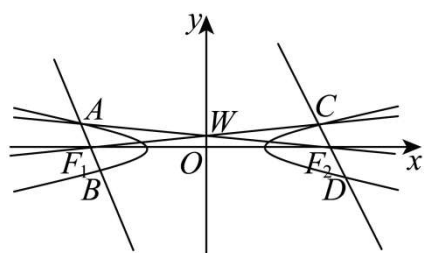
(3)

证明: 如图: 由对称性可知 $AF_2 \parallel DF_1, CF_1 \parallel BF_2$,

$\therefore |AF_1| = |DF_2|, |BF_1| = |CF_2|$.

易知 $\triangle AF_1W \sim \triangle ABF_2$,

$\therefore \frac{|AF_1|}{|AB|} = \frac{|WF_1|}{|F_2B|} = \frac{|WF_1|}{|BF_1| + 2a} = \frac{|WF_1|}{|BF_1| + 2},$



由(2)可知 $\frac{|AF_1|+|BF_1|}{|AF_1||BF_1|} = \frac{|AB|}{|AF_1||BF_1|} = \frac{2}{3}$,

代入上式可得 $|WF_1| = (|BF_1|+2) \frac{3}{2|BF_1|} = \frac{3}{2} + \frac{3}{|BF_1|}$,

同理可得 $|WF_2| = \frac{3}{2} + \frac{3}{|DF_2|}$,

$\therefore |WF_1| + |WF_2| = 3 + 3\left(\frac{1}{|BF_1|} + \frac{1}{|DF_2|}\right) = 3 + 3\left(\frac{1}{|AF_1|} + \frac{1}{|BF_1|}\right) = 5$, 为定值.

【点睛】方法点睛:在圆锥曲线中,利用对称性和三角形相似进行转化是解决定值问题的一种非常常用的方法.

86. (2025·河北邯郸·一模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 短轴的一个顶点到长轴的一个顶点的距离为 $\sqrt{3}$, O 为坐标原点, $T(2, 0)$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 C 上存在不关于 x 轴对称的两点 M, N , 使得 $\angle MTN$ 恰好被 x 轴平分, 求 $\triangle MTN$ 面积的取值范围;

(3) 过 T 的直线 l' 与 C 交于不同的两点 A, B , 椭圆在 A, B 两点处的切线相交于 P, Q 为线段 AB 的中点, 证明: O, P, Q 三点共线.

【答案】(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

(2) $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 由条件可得到关于 a, b 的方程, 解方程即可得答案.

(2) 直线 MN 的方程可设为 $x = my + t (m \neq 0)$, 联立椭圆的方程, 利用韦达定理可得到关于 M, N 点纵坐标的关系式, 再由 $\angle MTN$ 恰好被 x 轴平分, 即 $\angle MTO = \angle NTO$, 可知直线 MT 的斜率 k_{MT} 与直线 NT 的斜率 k_{NT} 存在且 $k_{MT} + k_{NT} = 0$, 即可得到关于 m, t 的关系式, 再把 $\triangle MTN$ 的面积表示成关于 m, t 的函数, 代入, 求函数值域即可得答案.

(3) 利用导数求出 A, B 处的切线方程, 同构可得到直线 AB 的方程, 再利用直线 AB 过点 T , 可得到 P 点坐标, 进而可得到 OP 的斜率; 再利用点差法可得到 OQ 的斜率, 即可得到答案.

【详解】(1) 依题意可得 $\begin{cases} \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2+b^2=3, \end{cases}$ 解得 $a = \sqrt{2}, b = 1$, 所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 由题意可知, 直线 MN 的方程可设为 $x = my + t (m \neq 0)$, 设 $M(my_1+t, y_1), N(my_2+t, y_2)$,

联立 $\begin{cases} x = my + t, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$ 整理得 $(m^2+2)y^2 + 2mty + t^2 - 2 = 0, \Delta = 8(m^2 - t^2 + 2) > 0$,

$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-2mt}{m^2+2}, \\ y_1 y_2 = \frac{t^2-2}{m^2+2}. \end{cases}$ 因为 $\angle MTN$ 恰好被 x 轴平分, 即 $\angle MTO = \angle NTO$,

易知直线 MT 的斜率 k_{MT} 与直线 NT 的斜率 k_{NT} 存在且 $k_{MT} + k_{NT} = 0$,

即 $\frac{y_1}{my_1+t-2} + \frac{y_2}{my_2+t-2} = 0$,

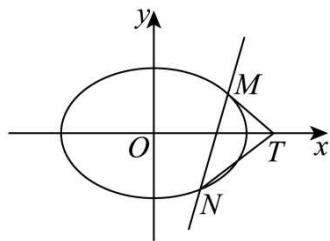
整理得 $2my_1y_2 + (t-2)(y_1+y_2) = 0$, 即 $2m(t^2-2) - (t-2) \cdot 2mt = 0$, 即 $m(t-1) = 0$.

因为 $m \neq 0$, 所以 $t = 1$ 时符合题意, 即直线 MN 经过定点 $(1, 0)$,

所以 $\triangle MTN$ 的面积 $S_{\triangle MTN} = \frac{1}{2} |y_1 - y_2| = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{m^2 + 1}}{2(m^2 + 2)} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$,

当且仅当 $\sqrt{m^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}$ 时, 即 $m = 0$ 时, 等号成立,

因为 $m \neq 0$, 所以 $\triangle MTN$ 面积的取值范围是 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.



(3) 证明: 依题意, 根据对称性, 不妨设 A, B 在 x 轴上方,

于是 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 可化为 $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$, 则 $y' = -\frac{x}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}} = -\frac{x}{2\sqrt{y^2}} = -\frac{x}{2y}$,

设直线 AB 的方程为 $x = ny + 2$, $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$,

则 C 在 A, B 两点处的切线分别为 $y - y_A = -\frac{x_A}{2y_A}(x - x_A)$, $y - y_B = -\frac{x_B}{2y_B}(x - x_B)$,

整理可得 C 在 A, B 两点处的切线分别为 $\frac{x_A x}{2} + y_A y = 1$, $\frac{x_B x}{2} + y_B y = 1$.

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_A x_0}{2} + y_A y_0 = 1$, $\frac{x_B x_0}{2} + y_B y_0 = 1$,

所以 A, B 两点均在直线 $\frac{x_0 x}{2} + y_0 y = 1$ 上, 即直线 AB 的方程为 $\frac{x_0 x}{2} + y_0 y = 1$.

又直线 AB 的方程为 $x = ny + 2$, 即 $\frac{x}{2} - \frac{ny}{2} = 1$, 所以 $x_0 = 1, y_0 = -\frac{n}{2}$, 即 $P(1, -\frac{n}{2})$,

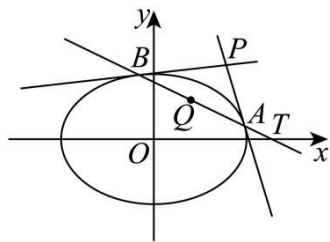
则 $k_{OP} \cdot k_{AB} = -\frac{n}{2} \times \frac{1}{n} = -\frac{1}{2}$,

又 $Q(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$,

联立 $\begin{cases} \frac{x_A^2}{2} + y_A^2 = 1, \\ \frac{x_B^2}{2} + y_B^2 = 1, \end{cases}$ 两式作差可得 $\frac{(x_A + x_B)(x_A - x_B)}{2} + (y_A + y_B)(y_A - y_B) = 0$,

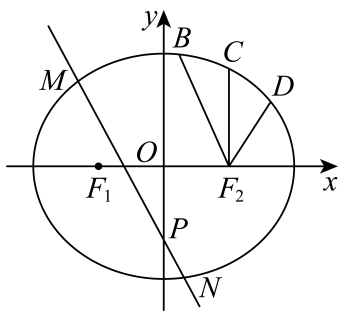
即 $\frac{(y_A + y_B)(y_A - y_B)}{(x_A + x_B)(x_A - x_B)} = -\frac{1}{2}$, 即 $\frac{2y_Q}{2x_Q} \cdot k_{AB} = -\frac{1}{2}$, 即 $k_{OQ} \cdot k_{AB} = -\frac{1}{2}$,

所以 $k_{OQ} = k_{OP}$, 所以 O, P, Q 三点共线.



87. (2024·安徽淮北·二模) 如图, 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2 , 短轴长为 6, A 为 Γ

上一点, $G(1, \frac{1}{2})$ 为 $\triangle AF_1 F_2$ 的重心.



- (1) 求椭圆 Γ 的方程;
- (2) 椭圆 Γ 上不同三点 B, C, D , 满足 $CF_2 \perp OF_2$, 且 $|BF_2|, |CF_2|, |DF_2|$ 成等差数列, 线段 BD 中垂线交 y 轴于 E 点, 求点 E 纵坐标的取值范围;
- (3) 直线 $l: y = kx - 2$ 与 Γ 交于 M, N 点, 交 y 轴于 P 点, 若 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PN}$, 求实数 λ 的取值范围.

【答案】(1) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$

(2) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

(3) $-5 < \lambda < -\frac{1}{5}$

【分析】(1) 利用三角形重心坐标公式先求 A 坐标, 再代入椭圆方程结合其性质计算即可;

(2) 设 B, D, E 坐标, 并根据焦半径公式得 BF_2, DF_2 , 由等差中项的性质得出 $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \sqrt{3}$, 再根据点差法得出中垂线的斜率 $\frac{4y_0}{3x_0} = \frac{4y_0}{3\sqrt{3}}$, 表示 BD 中垂线方程, 结合点在椭圆内计算范围即可;

(3) 设 M, N 坐标, 联立椭圆方程结合韦达定理得出其横坐标关系, 再根据平面向量的坐标表示 $\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 = \frac{64k^2}{-5(4k^2 + 3)}$, 利用函数的性质计算范围即可.

【详解】(1) 不妨设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$,

因 $G(1, \frac{1}{2})$ 为 $\triangle AF_1F_2$ 的重心, 所以 $A(3, \frac{3}{2})$,

所以 $\frac{9}{a^2} + \frac{\frac{9}{4}}{b^2} = 1$,

又短轴长为 6, 所以 $b = 3$, 代入解得 $a^2 = 12$,

所以椭圆方程为: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$;

(2) 由上可知 $F_2(\sqrt{3}, 0)$, 设 $B(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$, BD 中点 $E(x_0, y_0)$,

则 $|BF_2| = \sqrt{(x_1 - \sqrt{3})^2 + y_1^2}$,

又 $\frac{x_1^2}{12} + \frac{y_1^2}{9} = 1$, 消去 y_1 并整理得 $|BF_2| = 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}x_1$,

同理 $|DF_2| = 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}x_2$,

又 $|CF_2| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

由题意得 $2\sqrt{3} - \frac{1}{2}x_1 + 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}x_2 = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

即 $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \sqrt{3}$,

因 B, D 在 Γ 上, 易得 $\frac{x_1^2 - x_2^2}{12} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{9} = 0$, 化简得 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{9}{12} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = -\frac{3x_0}{4y_0}$,

所以线段 BD 中垂线的斜率 $\frac{4y_0}{3x_0} = \frac{4y_0}{3\sqrt{3}}$,

线段 BD 中垂线方程: $y - y_0 = \frac{4y_0}{3\sqrt{3}}(x - \sqrt{3})$,

令 $x = 0$ 得 $y_E = y_0 - \frac{4}{3}y_0 = -\frac{1}{3}y_0$,

又线段 BD 中点在椭圆内所以 $\frac{3}{12} + \frac{y_0^2}{9} < 1 \Rightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{2} < y_0 < \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

所以 $y_E \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

(3) 设 $M(x_3, y_3), N(x_4, y_4)$, 由 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PN}$ 得 $x_3 = \lambda x_4, \lambda < 0$,

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = kx - 2 \end{cases}$ 消 y 整理得 $(4k^2 + 3)x^2 - 16kx - 20 = 0$,

得 $x_3 + x_4 = \frac{16k}{4k^2 + 3}, x_3 x_4 = \frac{-20}{4k^2 + 3}$,

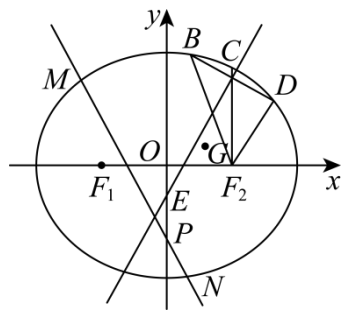
所以 $\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 = \frac{x_3}{x_4} + \frac{x_4}{x_3} + 2 = \frac{(x_3 + x_4)^2}{x_3 x_4} = \frac{64k^2}{-5(4k^2 + 3)}$,

当 $k = 0$ 时, $\lambda = -1$,

当 $k \neq 0$ 时, $\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 = \frac{64k^2}{-5(4k^2 + 3)} = -\frac{1}{5} \left(16 - \frac{48}{4k^2 + 3}\right) \in \left(-\frac{16}{5}, 0\right)$,

解不等式得 $-5 < \lambda < -\frac{1}{5}$.

【点睛】思路点睛: 根据焦半径公式及等差中项的性质可确定 B, D 中点横坐标, 再由中垂线方程得出 E 与 B, D 中点的关系结合点在椭圆内计算范围即可解决第二问; 利用平面向量共线的坐标表示结合韦达定理计算 M, N 横坐标关系, 分类讨论斜率是否为零, 再含参表示 $\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$ 结合函数的性质求范围解不等式即可.



88. (23-24 高三上·上海杨浦·期中) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过 $A(1, 0), B(0, b)$ 两点. O 为坐标原点, 且 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 过点 $P(0, 1)$ 且斜率为 $k (k > 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 有两个不同的交点

M, N . 且直线 AM, AN 分别与 y 轴交于点 S, T .

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若以 MN 为直径的圆经过坐标原点, 求直线 l 的方程;

(3) 设 $\overrightarrow{PS} = \lambda \overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PT} = \mu \overrightarrow{PO}$, 求 $\lambda + \mu$ 的取值范围.

【答案】(1) $x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$

(2) $y = \sqrt{2}x + 1$

(3) $(\sqrt{2}, 2)$

【分析】(1) 把点 A 坐标代入椭圆的方程得 $a = 1$, 由 $\triangle AOB$ 的面积可得 $\frac{1}{2}ab = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 解得 b , 进而得椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 l 的方程为 $y=kx+1$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$. 联立直线 l 与椭圆 C 的方程的关于 x 的一元二次方程, 由 $\Delta > 0$, 进而解得 k 的取值范围, 再列出韦达定理, 由 $OM \perp ON$, 则 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$, 即可求出 k , 从而得解;

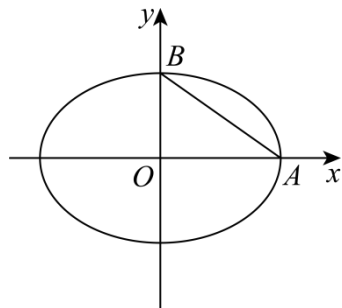
(3) 因为 $A(1, 0)$, $P(0, 1)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 写出直线 AM 的方程, 令 $x=0$, 解得 $y = \frac{-y_1}{x_1-1}$. 点 S 的坐标为 $(0, \frac{-y_1}{x_1-1})$. 同理可: 点 T 的坐标为 $(0, \frac{-y_2}{x_2-1})$. 用坐标表示 \overrightarrow{PS} , \overrightarrow{PT} , \overrightarrow{PQ} , 代入 $\overrightarrow{PS} = \lambda \overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{PT} = \mu \overrightarrow{PO}$, 得 $\lambda = \frac{y_1}{x_1-1} + 1 = \frac{kx_1+1}{x_1-1} + 1$, 同理 $\mu = \frac{kx_2+1}{x_2-1} + 1$. 由 x_1+x_2 , x_1x_2 , 代入 $\lambda+\mu$, 化简再求取值范围.

【详解】(1) 因为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 经过点 $A(1, 0)$,

所以 $a^2=1$ 解得 $a=1$ (负值舍去).

由 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 可知 $\frac{1}{2}ab = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 解得 $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以椭圆 C 的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$.



(2) 设直线 l 的方程为 $y=kx+1$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

联立 $\begin{cases} x^2+2y^2=1 \\ y=kx+1 \end{cases}$, 消 y 整理可得 $(2k^2+1)x^2+4kx+1=0$.

因为直线与椭圆有两个不同的交点,

所以 $\Delta = 16k^2 - 4(2k^2+1) > 0$, 解得 $k^2 > \frac{1}{2}$,

因为 $k > 0$, 所以 k 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$,

所以 $x_1+x_2 = -\frac{4k}{2k^2+1}$, $x_1x_2 = \frac{1}{2k^2+1}$,

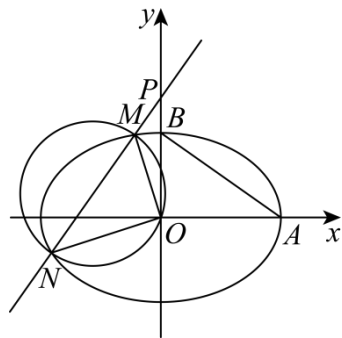
则 $y_1y_2 = (kx_1+1)(kx_2+1) = k^2x_1x_2 + k(x_1+x_2) + 1$

$= k^2 \times \frac{1}{2k^2+1} + k(-\frac{4k}{2k^2+1}) + 1 = \frac{-k^2+1}{2k^2+1}$,

因为以 MN 为直径的圆经过坐标原点, 所以 $OM \perp ON$,

则 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$, 即 $\frac{1}{2k^2+1} + \frac{-k^2+1}{2k^2+1} = 0$, 解得 $k = \sqrt{2}$ (负值舍去),

所以直线 l 的方程为 $y = \sqrt{2}x + 1$.



(3) 因为 $A(1, 0)$, $P(0, 1)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

所以直线 AM 的方程是: $y = \frac{y_1}{x_1-1}(x-1)$,

令 $x=0$, 解得 $y = \frac{-y_1}{x_1-1}$, 所以点 S 的坐标为 $(0, \frac{-y_1}{x_1-1})$.

同理可得点 T 的坐标为 $(0, \frac{-y_2}{x_2-1})$.

所以 $\overrightarrow{PS} = (0, \frac{-y_1}{x_1-1} - 1)$, $\overrightarrow{PT} = (0, \frac{-y_2}{x_2-1} - 1)$, $\overrightarrow{PO} = (0, -1)$.

由 $\overrightarrow{PS} = \lambda \overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{PT} = \mu \overrightarrow{PO}$,

$$\text{可得 } \frac{-y_1}{x_1-1} - 1 = -\lambda, \frac{-y_2}{x_2-1} - 1 = -\mu,$$

$$\text{所以 } \lambda = \frac{y_1}{x_1-1} + 1 = \frac{kx_1+1}{x_1-1} + 1,$$

$$\text{同理 } \mu = \frac{kx_2+1}{x_2-1} + 1,$$

$$\text{由 (2) 得 } x_1 + x_2 = -\frac{4k}{2k^2+1}, x_1x_2 = \frac{1}{2k^2+1},$$

$$\text{所以 } \lambda + \mu = \frac{kx_1+1}{x_1-1} + \frac{kx_2+1}{x_2-1} + 2 = \frac{2kx_1x_2 + (1-k)(x_1+x_2) - 2}{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1} + 2$$

$$= \frac{2k \cdot \frac{1}{2k^2+1} + (1-k) \left(-\frac{4k}{2k^2+1} \right) - 2}{\frac{1}{2k^2+1} - \left(-\frac{4k}{2k^2+1} \right) + 1} + 2$$

$$= \frac{2k - 4k + 4k^2 - 2(2k^2+1)}{1 + 4k + 2k^2 + 1} + 2$$

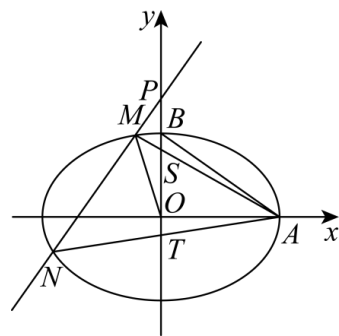
$$= \frac{-(k+1)}{(k+1)^2} + 2$$

$$= -\frac{1}{k+1} + 2,$$

$$\text{因为 } k \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right), \text{ 所以 } k+1 \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, +\infty \right), \text{ 所以 } \frac{1}{k+1} \in (0, 2-\sqrt{2}),$$

$$\text{则 } -\frac{1}{k+1} \in (-2+\sqrt{2}, 0), \text{ 所以 } -\frac{1}{k+1} + 2 \in (\sqrt{2}, 2),$$

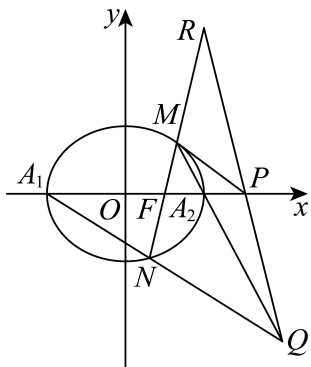
所以 $\lambda + \mu$ 的范围是 $(\sqrt{2}, 2)$.



【点睛】方法点睛:利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下:

- (1) 设直线方程, 设交点坐标为 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) ;
- (2) 联立直线与圆锥曲线的方程, 得到关于 x (或 y) 的一元二次方程, 必要时计算 Δ ;
- (3) 列出韦达定理;
- (4) 将所求问题或题中的关系转化为 $x_1 + x_2$ 、 x_1x_2 的形式;
- (5) 代入韦达定理求解.

89. (2025·浙江·二模) 已知 F 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, 椭圆离心率 $e = \frac{1}{2}$, 且椭圆上任意一点与点 F 距离的最大值为 3.



(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 点 $M(x_1, y_1) (x_1 > 0, y_1 > 0)$ 在椭圆 E 上, 椭圆在点 M 处的切线 $l: \frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{3} = 1$ 交 x 轴于点 P .

①求 $|FP| - 4|FM|$ 的最小值;

②设 A_1, A_2 分别为椭圆 E 的左、右顶点, 不垂直 x 轴的直线 MF 交椭圆于另一点 N , 直线 NA_1 与直线 MA_2 交于点 Q , 问直线 MN 与直线 PQ 的交点 R 是否在一条定直线上? 若是, 求出该直线方程; 若不是, 请说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) ① $4\sqrt{2} - 9$; ②是, 直线方程为 $x = 2$, 理由见解析

【分析】(1) 由已知得到关于 a, c 的方程, 解得 a, c , 然后求解 b^2 , 即可得椭圆方程;

(2) ①由已知可得 $P\left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$, 根据两点间距离公式可得 $|FM| = 2 - \frac{1}{2}x_1$, 代入 $|FP| - 4|FM|$, 由基本不等式即可求解; ②设直线 $MN: x = my + 1 (m \neq 0)$, $N(x_2, y_2)$, 与椭圆方程联立由韦达定理可得 $my_1y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2)$, 由已知可得 l_{A_1N}, l_{A_2M} 的方程, 联立可得 $Q\left(4, \frac{2y_1}{x_1 - 2}\right)$, 将直线 PQ 的方程与直线 MN 联立即可求解.

【详解】(1) 由已知 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ a + c = 3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 2 \\ c = 1 \end{cases}$,

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$, 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) ①因为切线 $l: \frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{3} = 1$ 交 x 轴于点 P , 所以 $P\left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$, $|FP| = \frac{4}{x_1} - 1$,

因为点 $M(x_1, y_1) (x_1 > 0, y_1 > 0)$ 在椭圆 E 上, 所以 $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1$, 即 $y_1^2 = 3 - \frac{3}{4}x_1^2$,

又 $|FM| = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1 + 1 + 3 - \frac{3}{4}x_1^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x_1 - 2\right)^2} = \left|\frac{1}{2}x_1 - 2\right|$,

因为 $|FP| = \frac{4}{x_1} - 1 > 0$, 所以 $0 < x_1 < 4$, 所以 $\frac{1}{2}x_1 - 2 < 0$,

所以 $|FM| = 2 - \frac{1}{2}x_1$,

所以 $|FP| - 4|FM| = \frac{4}{x_1} - 1 - 4\left(2 - \frac{1}{2}x_1\right) = \frac{4}{x_1} + 2x_1 - 9 \geq 2\sqrt{\frac{4}{x_1} \times 2x_1} - 9 = 4\sqrt{2} - 9$,

当且仅当 $\frac{4}{x_1} = 2x_1$, 即 $x_1 = \sqrt{2}$ 时等号成立, 所以 $|FP| - 4|FM|$ 的最小值为 $4\sqrt{2} - 9$;

②由已知设直线 $MN: x = my + 1 (m \neq 0)$, $N(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = my + 1 \end{cases}$ 消元得 $(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$,

则 $y_1 + y_2 = \frac{-6m}{3m^2 + 4}$, $y_1y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}$,

所以 $my_1y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2)$,

因为 $A_1(-2, 0)$, $N(x_2, y_2)$, 所以 $l_{A_1N}: y = \frac{y_2}{x_2 + 2}(x + 2)$,

因为 $A_2(2, 0)$, $M(x_1, y_1)$, 所以 $l_{A_2M}: y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$,

$$\begin{aligned}\text{所以 } x_Q &= \frac{2y_2(x_1-2)+2y_1(x_2+2)}{y_1(x_2+2)-y_2(x_1-2)} = \frac{4my_1y_2-2y_2+6y_1}{3y_1+y_2} \\ &= \frac{6y_1+6y_2-2y_2+6y_1}{3y_1+y_2} = \frac{12y_1+4y_2}{3y_1+y_2} = 4,\end{aligned}$$

$$\text{即点 } Q\left(4, \frac{2y_1}{x_1-2}\right), \text{ 所以直线 } PQ \text{ 的方程为 } y = \frac{x_1y_1}{2(x_1-2)(x_1-1)}\left(x - \frac{4}{x_1}\right),$$

$$\text{与直线 } MN \text{ 联立, 得 } x = \frac{mx_1y_1}{2(x_1-2)(x_1-1)}\left(x - \frac{4}{x_1}\right) + 1,$$

$$\text{因为 } x_1 = my_1 + 1, \text{ 所以 } y_1 = \frac{x_1-1}{m}, \text{ 代入上式可得}$$

$$x = \frac{mx_1 \cdot \frac{x_1-1}{m}}{2(x_1-2)(x_1-1)}\left(x - \frac{4}{x_1}\right) + 1 = \frac{x_1}{2(x_1-2)}\left(x - \frac{4}{x_1}\right) + 1 = \frac{x_1}{2(x_1-2)}x - \frac{2}{x_1-2} + 1,$$

$$\text{即 } \left[\frac{x_1}{2(x_1-2)} - 1\right]x = \frac{2}{x_1-2} - 1 = \frac{4-x_1}{x_1-2}, \text{ 解得 } x = 2,$$

即点 R 在直线 $x=2$ 上.

90. (24-25 高三下·山东·月考) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 焦距为 $2\sqrt{7}$, 且点 F_2 到其渐近线的距离为 $\sqrt{3}$.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 若点 $P(x_0, y_0)$ 是 C 上第一象限的动点, 过点 $P(x_0, y_0)$ 作直线 l (l 不与渐近线平行), 若 l 与 C 只有一个公共点, 且 l 与 x 轴相交于点 M .

(i) 证明: $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|MF_1|}{|MF_2|}$;

(ii) 若点 N 在直线 l 上, 且 $F_2N \perp F_2P$, 那么点 N 是否在定直线上? 若在定直线上, 求出该直线方程; 若不在定直线上, 请说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

(2) (i) 证明见解析; (ii) 点 N 在定直线 $x = \frac{4\sqrt{7}}{7}$ 上

【分析】(1) 由已知条件求出 c, b 的值, 可得出 a 的值, 由此可得出双曲线 C 的方程;

(2) (i) 利用两点间的距离公式化简 $|PF_1|, |PF_2|$ 的表达式, 证明出双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 在点 P 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{4} - \frac{y_0y}{3} = 1$, 求出点 T 的坐标, 由此可证得 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|TF_1|}{|TF_2|}$;

(ii) 求出直线 F_2N 的方程, 将该直线方程与直线 l 的方程联立, 求出点 N 的坐标, 即可得出结论.

【详解】(1) 由题意可知 $|F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{7}$, 可得 $c = \sqrt{7}$,

双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 即 $bx \pm ay = 0$,

点 F_2 到其渐近线的距离为 $\frac{bc}{\sqrt{b^2+a^2}} = \frac{bc}{c} = b = \sqrt{3}$, 所以 $a = \sqrt{c^2-b^2} = \sqrt{7-3} = 2$,

因此, 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) (i) 因为 $P(x_0, y_0)$ 是 C 上第一象限的动点, 则 $\frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{3} = 1$,

可得 $y_0^2 = \frac{3x_0^2}{4} - 3$ 且 $x_0 > 2$, 易知点 $F_1(-\sqrt{7}, 0)$ 、 $F_2(\sqrt{7}, 0)$,

$$\begin{aligned} \text{所以, } |PF_2| &= \sqrt{(x_0 - \sqrt{7})^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 - 2\sqrt{7}x_0 + 7 + \frac{3x_0^2}{4} - 3} \\ &= \sqrt{\frac{7x_0^2}{4} - 2\sqrt{7}x_0 + 4} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x_0 - 2\right)^2} = \left|\frac{\sqrt{7}}{2}x_0 - 2\right| = \frac{\sqrt{7}}{2}x_0 - 2, \end{aligned}$$

由双曲线的定义可得 $|PF_1| = |PF_2| + 2a = \frac{\sqrt{7}}{2}x_0 - 2 + 4 = \frac{\sqrt{7}}{2}x_0 + 2$,

$$\text{所以 } \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}x_0 + 2}{\frac{\sqrt{7}}{2}x_0 - 2} = \frac{\sqrt{7}x_0 + 4}{\sqrt{7}x_0 - 4},$$

先证明: 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{4} - \frac{y_0y}{3} = 1$.

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x_0x}{4} - \frac{y_0y}{3} = 1 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 可得 } \frac{x^2y_0^2}{4} - 3\left(\frac{x_0x}{4} - 1\right)^2 = y_0^2, \text{ 又 } y_0^2 = \frac{3x_0^2}{4} - 3,$$

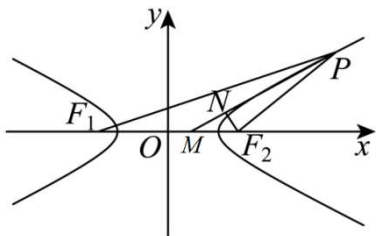
整理可得 $(x - x_0)^2 = 0$, 解得 $x = x_0$,

所以双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 在点 P 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{4} - \frac{y_0y}{3} = 1$,

由 $\frac{x_0x}{4} - \frac{y_0y}{3} = 1$, 令 $y = 0$, 可得 $x = \frac{4}{x_0}$, 即点 $M\left(\frac{4}{x_0}, 0\right)$, 且 $0 < \frac{4}{x_0} < 2$,

$$\text{所以 } \frac{|MF_1|}{|MF_2|} = \frac{\frac{4}{x_0} + \sqrt{7}}{\sqrt{7} - \frac{4}{x_0}} = \frac{\sqrt{7}x_0 + 4}{\sqrt{7}x_0 - 4}, \text{ 因此 } \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|MF_1|}{|MF_2|}.$$

(ii) 如下图所示:



直线 PF_2 的斜率为 $k_{PF_2} = \frac{y_0}{x_0 - \sqrt{7}}$,

因为 $F_2N \perp F_2P$, 则直线 F_2N 的斜率为 $k_{F_2N} = -\frac{1}{k_{PF_2}} = -\frac{x_0 - \sqrt{7}}{y_0}$,

所以, 直线 F_2N 的方程为 $y = -\frac{x_0 - \sqrt{7}}{y_0}(x - \sqrt{7})$,

$$\text{联立直线 } F_2N \text{ 和直线 } l \text{ 的方程 } \begin{cases} y = -\frac{x_0 - \sqrt{7}}{y_0}(x - \sqrt{7}), \\ \frac{x_0x}{4} - \frac{y_0y}{3} = 1, \end{cases},$$

消去 y , 可得 $\left(\frac{7x_0}{4} - \sqrt{7}\right)x = \sqrt{7}x_0 - 4$, 解得 $x = \frac{4\sqrt{7}}{7}$,

因此点 N 在定直线 $x = \frac{4\sqrt{7}}{7}$ 上.

91. 法国数学家加斯帕尔·蒙日是 18 世纪著名的几何学家, 他创立了画法几何学, 推动了空间解析几何学的

独立发展,奠定了空间微分几何学的宽厚基础,根据他的研究成果,我们定义:给定椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 则称圆心在原点 O , 半径为 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 的圆为“椭圆 C 的伴随圆 C' ”. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F_1 , 点 $A(1, \frac{3}{2})$ 在 C 上, 且 $|AF_1| = \frac{5}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程以及椭圆 C 的伴随圆 C' 的方程;

(2) 将 C' 向上平移 6 个单位长度得到曲线 C'' , 已知 $D(0, -1)$, 动点 E 在曲线 C'' 上, 探究: 是否存在定点 $G(0, t) (t \neq -1)$, 使得 $\frac{|EG|}{|ED|}$ 为定值, 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由;

(3) 已知不过点 A 的直线 $l: y = \frac{1}{2}x + m$ 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 点 $P(0, y_P), Q(0, y_Q)$ 分别在直线 AM, AN 上, 证明: $|AP| = |AQ|$.

【答案】(1) $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, C': x^2 + y^2 = 7$

(2) 存在, 且 $t = 5$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 将点 $A(1, \frac{3}{2})$ 代入椭圆方程, 结合两点间距离公式计算即可得椭圆方程, 再借助伴随圆定义即可得伴随圆方程;

(2) 得到 C' 方程后, 假设存在该定点, 设 $\frac{|EG|}{|ED|}$ 为定值 $s, E(p, q)$, 利用两点间距离公式表示出 $|EG|$ 、

$|ED|$, 则可由 $p^2 + (q-6)^2 = 7$, 得到方程 $t^2 - 29 + 28s^2 = 2q(7s^2 + t - 6)$, 再令 $\begin{cases} t^2 - 29 + 28s^2 = 0 \\ 7s^2 + t - 6 = 0 \end{cases}$, 解出即可得解;

(3) 联立直线与椭圆方程, 可得与交点横坐标有关韦达定理, 再求出直线 AM , 即可得 y_P , 同理可得 y_Q , 则可结合韦达定理得到线段 PQ 中点为定点, 再由几何性质即可得证.

【详解】(1) 由题意可得 $\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \\ (c+1)^2 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \\ c=1 \end{cases}$, 则 $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7}$,

即椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 伴随圆 C' 的方程为 $x^2 + y^2 = 7$;

(2) 由 C' 的方程为 $x^2 + y^2 = 7$, 则曲线 C'' 的方程为 $x^2 + (y-6)^2 = 7$,

假设存在该点, 其 $\frac{|EG|}{|ED|}$ 为定值 s ,

令 $E(p, q)$, 则有 $p^2 + (q-6)^2 = 7$,

则 $|EG|^2 = p^2 + (q-t)^2 = 7 - (q-6)^2 + (q-t)^2 = t^2 - 2qt + 12q - 29$,

$|ED|^2 = p^2 + (q+1)^2 = 7 - (q-6)^2 + (q+1)^2 = 14q - 28$,

则有 $\frac{|EG|^2}{|ED|^2} = \frac{t^2 - 2qt + 12q - 29}{14q - 28} = s^2$, 整理得 $t^2 - 29 + 28s^2 = 2q(7s^2 + t - 6)$,

令 $\begin{cases} t^2 - 29 + 28s^2 = 0 \\ 7s^2 + t - 6 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} t=5 \\ s=\frac{\sqrt{7}}{7} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t=-1 \\ s=1 \end{cases}$ (舍去),

故存在 $t=5$, 即定点 $G(0,5)$, 使得 $\frac{|EG|}{|ED|}$ 为定值 $\frac{\sqrt{7}}{7}$;

(3) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 消去 y 可得 $x^2 + mx + m^2 - 3 = 0$,

$\Delta = m^2 - 4(m^2 - 3) = 12 - 3m^2 > 0$, 即 $-2 < m < 2$,

$x_1 + x_2 = -m, x_1 x_2 = m^2 - 3$,

$l_{AM}: y = \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1}(x - 1) + \frac{3}{2}$,

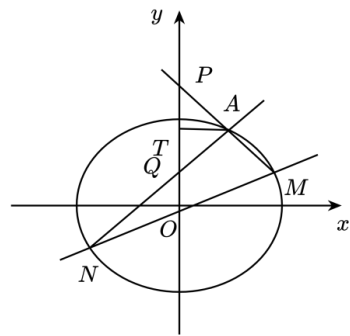
令 $x=0$, 则 $y_P = \frac{3}{2} - \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1} = \frac{3x_1 - 2y_1}{2(x_1 - 1)} = \frac{2x_1 - 2m}{2(x_1 - 1)} = \frac{x_1 - m}{x_1 - 1}$,

同理可得 $y_Q = \frac{x_2 - m}{x_2 - 1}$,

则 $y_P + y_Q = \frac{x_1 - m}{x_1 - 1} + \frac{x_2 - m}{x_2 - 1} = \frac{2x_1 x_2 - (m+1)(x_1 + x_2) + 2m}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1}$
 $= \frac{2(m^2 - 3) + m^2 + m + 2m}{m^2 - 3 + m + 1} = \frac{3m^2 + 3m - 6}{m^2 + m - 2} = 3$,

即线段 PQ 中点坐标为 $T(0, \frac{3}{2})$, 则 $AT \perp PQ$, 故 $|AP| = |AQ|$.

【点睛】关键点点睛: 最后一问关键点在于由 y_P, y_Q 得到线段 PQ 中点坐标, 从而利用几何性质证明 $|AP| = |AQ|$.



92. (2024·海南海口·模拟预测) 对于二次曲线 $\Gamma: \lambda x^2 + \mu y^2 = 1$, 我们有: 若 $Q(x', y')$ 是曲线 Γ 上的一点, 则过点 Q 与曲线 Γ 相切的直线方程为 $\lambda x'x + \mu y'y = 1$. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $a^2 = 13b^2$, 动圆 $C_2: x^2 + y^2 = r^2 (b < r < a)$, 点 $P(x_0, y_0)$ 是 C_1 与 C_2 在第一象限的交点.

(1) 求椭圆 C_1 的离心率 e ;

(2) 过点 P 作动圆 C_2 的切线 l , l 经过椭圆 C_1 的右焦点 $F(c, 0)$, 求 x_0 与 c 满足的关系式 $f(x_0, c) = 0$;

(3) 若 $b=1$, 直线 AB 与 C_1, C_2 均相切, 切点 A 在 C_1 上, 切点 B 在 C_2 上, 求 $|AB|$ 的最大值.

【答案】(1) $e = \frac{2\sqrt{39}}{13}$;

(2) $f(x_0, c) = x_0 c - r^2 \left(x_0 = \frac{\sqrt{39}}{6} \cdot \sqrt{r^2 - b^2}, b < r < \sqrt{13}b, y_0 > 0 \right)$;

(3) $\sqrt{13} - \sqrt{2}$.

【分析】(1) 根据给定条件, 利用椭圆离心率公式计算即得.

(2) 求出切线 l 的方程, 将 $(c, 0)$ 代入即可得解.

(3) 分别求出 C_1, C_2 在点 A, B 处的方程, 结合两切线重合探讨点 A, B 的坐标关系, 再利用两点间距离公式, 结合方程组的思想将 $|AB|^2$ 表示为 r 的函数, 利用基本不等式求出最大值.

【详解】(1) 在椭圆 C_1 中, 由 $a^2 = 13b^2$, 得 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{12}b}{\sqrt{13}b} = \frac{2\sqrt{39}}{13}$,

所以椭圆 C_1 的离心率 $e = \frac{2\sqrt{39}}{13}$.

(2) 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{13} + y^2 = b^2$, 由 $\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = r^2 \\ \frac{1}{13}x_0^2 + y_0^2 = b^2 \end{cases}$, 解得 $x_0^2 = \frac{13}{12}(r^2 - b^2)$,

而 $x_0 > 0$, 则 $x_0 = \frac{\sqrt{39}}{6} \cdot \sqrt{r^2 - b^2}$, $b < r < \sqrt{13}b$,

圆 $C_2: x^2 + y^2 = r^2$ 在 $P(x_0, y_0)$ 处切线 l 方程为 $x_0x + y_0y = r^2$, 又 l 过焦点 $F(c, 0)$, 则 $x_0c - r^2 = 0$,

所以 $f(x_0, c) = x_0c - r^2 \left(x_0 = \frac{\sqrt{39}}{6} \cdot \sqrt{r^2 - b^2}, b < r < \sqrt{13}b, y_0 > 0 \right)$.

(3) 当 $b = 1$ 时, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{13} + y^2 = 1$, $1 < r < \sqrt{13}$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

椭圆 C_1 在 A 处切线为 $\frac{1}{13}x_1x + y_1y = 1$, 圆 C_2 在 B 处切线为 $x_2x + y_2y = r^2$,

由直线 AB 与 C_1, C_2 均相切, 得 $\frac{x_2}{\frac{1}{13}x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{r^2}{1}$, 即 $x_2 = \frac{r^2}{13}x_1, y_2 = r^2y_1$,

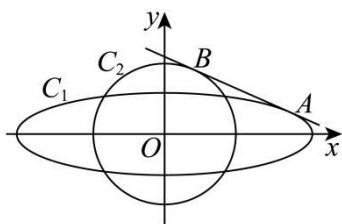
由 $\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = r^2 \\ \frac{1}{13}x_1^2 + y_1^2 = 1 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} \frac{r^4}{169}x_1^2 + r^4y_1^2 = 1 \\ \frac{1}{13}x_1^2 + y_1^2 = 1 \end{cases}$, 解得 $x_1^2 = \frac{169}{12}\left(1 - \frac{1}{r^4}\right), y_1^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{13}{r^4} - 1\right)$,

$$|AB|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \left(\frac{13 - r^2}{13}\right)^2 x_1^2 + (r^2 - 1)^2 y_1^2$$

$$= \left(\frac{13 - r^2}{13}\right)^2 \cdot \frac{169}{12}\left(1 - \frac{1}{r^4}\right) + (r^2 - 1)^2 \cdot \frac{1}{12}\left(\frac{13}{r^4} - 1\right) = 15 - \left(2r^2 + \frac{13}{r^2}\right)$$

$$\leq 15 - 2\sqrt{2r^2 \cdot \frac{13}{r^2}} = 15 - 2\sqrt{26}, \text{ 当且仅当 } 2r^2 = \frac{13}{r^2}, \text{ 即 } r = \sqrt{\frac{13}{2}} \text{ 时取等号,}$$

即 $|AB|^2$ 的最大值为 $15 - 2\sqrt{26}$, 所以 $|AB|$ 的最大值为 $\sqrt{15 - 2\sqrt{26}} = \sqrt{13} - \sqrt{2}$.



【点睛】关键点点睛: 第3问, 利用公切线探求出两个切点坐标的关系是求解的关键.