

圆锥曲线解答题题型全归纳

目录

知识重构·重难梳理固根基	2
题型精研·技巧通法提能力	5
题型一 中点弦、弦长问题	5
题型二 面积问题	9
题型三 定点及其探索性问题	12
题型四 斜率有关定值问题	16
题型五 长度、角度、面积的定值问题	19
题型六 非对称韦达化处理	23
题型七 圆锥曲线与向量交汇	25
题型八 切线问题	29
题型九 定直线及其探索性问题	32
题型十 圆锥曲线新定义问题	36
实战检测·分层突破验成效	40
检测I组 重难知识巩固	40
检测II组 创新能力提升	51

知识重构·重难点梳理固根基

一、直线和曲线联立(以椭圆和抛物线为例)

1. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $l: y = kx + m$ 相交于 AB 两点, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}, (b^2 + k^2 a^2)x^2 + 2a^2 kmx + a^2 m^2 - a^2 b^2 = 0$$

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与过定点 $(m, 0)$ 的直线 l 相交于 AB 两点, 设为 $x = ty + m$, 如此消去

x , 保留 y , 构造的方程如下: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = ty + m \end{cases}, (a^2 + t^2 b^2)y^2 + 2b^2 tmy + b^2 m^2 - a^2 b^2 = 0$

注意:

①如果直线没有过椭圆内部一定点, 是不能直接说明直线与椭圆有两个交点的, 一般都需要摆出 $\Delta > 0$, 满足此条件, 才可以得到韦达定理的关系.

②焦点在 y 轴上的椭圆与直线的关系, 双曲线与直线的关系和上述形式类似, 不在赘述.

2. 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 与直线 $x = ty + m$ 相交于 A, B 两点, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

联立可得 $y^2 = 2p(ty + m)$, $\Delta > 0$ 时, $\begin{cases} y_1 + y_2 = 2pt \\ y_1 y_2 = -2pm \end{cases}$

特殊地, 当直线 AB 过焦点的时候, 即 $m = \frac{p}{2}$, $y_1 y_2 = -2pm = -p^2$, $x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = \frac{1}{4} p^2$, 因为 AB 为

通径的时候也满足该式, 根据此时 A, B 坐标来记忆.

抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 与直线 $y = kx + m$ 相交于 C, D 两点, 设 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$

联立可得 $x^2 = 2p(kx + m)$, $\Delta > 0$ 时, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2pk \\ x_1 x_2 = -2pm \end{cases}$

注意: 在直线与抛物线的问题中, 设直线的时候选择形式多思考分析, 往往可以降低计算量. 开口向上选择正设; 开口向右, 选择反设; 注意不可完全生搬硬套, 具体情况具体分析.

二、根的判别式和韦达定理

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与 $y = kx + m$ 联立, 两边同时乘上 $a^2 b^2$ 即可得到 $(a^2 k^2 + b^2)x^2 + 2kma^2 x + a^2(m^2 - b^2) = 0$, 为了方便叙述, 将上式简记为 $Ax^2 + Bx + C = 0$. 该式可以看成关于 x 的一元二次方程, 判别式为 $\Delta = 4a^2 b^2 (a^2 k^2 + b^2 - m^2)$ 可简单记 $4a^2 b^2 (A - m^2)$.

同理 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 和 $x = ty + m$ 联立 $(a^2 + t^2 b^2)y^2 + 2b^2 tmy + b^2 m^2 - a^2 b^2 = 0$, 为了方便叙述, 将上式简记为 $Ay^2 + By + C = 0$, $\Delta = 4a^2 b^2 (a^2 + t^2 b^2 - m^2)$, 可简记 $4a^2 b^2 (A - m^2)$.

l 与 C 相离 $\Leftrightarrow \Delta < 0$; l 与 C 相切 $\Leftrightarrow \Delta = 0$; l 与 C 相交 $\Leftrightarrow \Delta > 0$.

注意: (1) 由韦达定理写出 $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$, $x_1 x_2 = \frac{C}{A}$, 注意隐含条件 $\Delta > 0$.

(2) 求解时要注意题干所有的隐含条件, 要符合所有的题意.

(3) 如果是焦点在 y 轴上的椭圆, 只需要把 a^2, b^2 互换位置即可.

(4) 直线和双曲线联立结果类似, 焦点在 x 轴的双曲线, 只要把 b^2 换成 $-b^2$ 即可;

焦点在 y 轴的双曲线, 把 a^2 换成 $-b^2$ 即可, b^2 换成 a^2 即可.

(5) 注意二次曲线方程和二次曲线方程往往不能通过联立消元, 利用 Δ 判断根的关系, 因为此情况下往往会有增根, 根据题干的隐含条件可以舍去增根 (一般为交点横纵坐标的范围限制), 所以在遇到两条二次曲线交点问题的时候, 使用画图的方式分析, 或者解方程组, 真正算出具体坐标.

三、点差法

设直线和曲线的两个交点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 代入椭圆方程, 得 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1; \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1;$

将两式相减, 可得 $\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0; \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} = -\frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2};$

最后整理得: $1 = -\frac{a^2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)} \Rightarrow 1 = -k \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_0}{x_0}$

同理, 双曲线用点差法, 式子可以整理成: $1 = \frac{a^2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)} \Rightarrow 1 = k \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_0}{x_0}$

设直线和曲线的两个交点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 代入抛物线方程, 得 $y_1^2 = 2px_1; y_2^2 = 2px_2;$

将两式相减, 可得 $(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2p(x_1 - x_2);$ 整理得: $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p}{y_1 + y_2}$

四、弦长公式

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

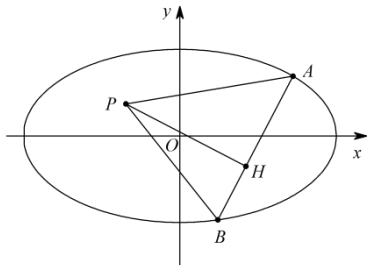
$$|AB| = \sqrt{(1 + k^2)(x_1 - x_2)^2}$$

$$= \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2|$$

$$= \sqrt{(1 + k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} \quad (\text{最常用公式, 使用频率最高})$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2}$$

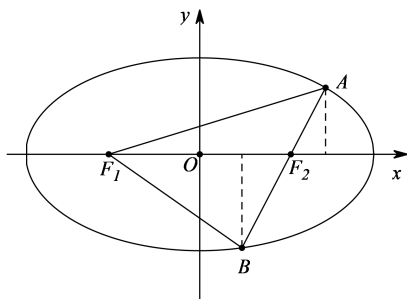
五、三角形面积问题



$$\text{直线 } AB \text{ 方程: } y = kx + m \quad d = |PH| = \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1 + k^2}}$$

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta}}{|A'|} \cdot \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\sqrt{\Delta} |kx_0 - y_0 + m|}{2|A'|}$$

六、焦点三角形的面积



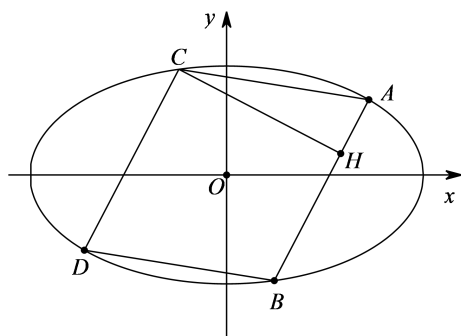
直线 AB 过焦点 F_2 , $\triangle ABF_1$ 的面积为

$$S_{\triangle ABF_1} = \frac{1}{2} |F_1F_2| \cdot |y_1 - y_2| = c|y_1 - y_2| = \frac{c\sqrt{\Delta}}{|A'|}$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |AB|d = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2} \frac{\sqrt{4a^2b^2(a^2A^2 + b^2B^2 - C^2)}}{a^2A^2 + b^2B^2} \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{ab\sqrt{(a^2A^2 + b^2B^2 - C^2)C^2}}{a^2A^2 + b^2B^2}$$

注意: A' 为联立消去 x 后关于 y 的一元二次方程的二次项系数

七、平行四边形的面积



直线 AB 为 $y = kx + m_1$, 直线 CD 为 $y = kx + m_2$

$$d = |CH| = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1 + k^2}}$$

$$|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{\left(-\frac{B'}{A'}\right)^2 - 4 \cdot \frac{C'}{A'}} = \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta}}{|A'|}$$

$$S_{\square ABCD} = |AB| \cdot d = \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta}}{|A'|} \cdot \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\sqrt{\Delta} |m_1 - m_2|}{|A'|}$$

注意: A' 为直线与椭圆联立后消去 y 后的一元二次方程的系数.

八、探索圆锥曲线的定点、定值问题

1. 定值问题

①从特殊入手, 先根据特殊位置和数值求出定值, 再证明这个值与变量无关;

②直接推理、计算, 并在计算推理的过程中消去变量, 从而得到定值.

解答的关键是认真审题, 理清问题与题设的关系, 建立合理的方程或函数, 利用等量关系统一变量, 最后消元得出定值.

2. 定点问题

定点问题是比较常见出题形式,化解这类问题的关键就是引进变的参数表示直线方程、数量积、比例关系等,根据等式的恒成立、数式变换等寻找不受参数影响的量.

①引进参数.一般是点的坐标、直线的斜率、直线的夹角等.

②列出关系式.根据题设条件,表示出对应的动态直线或曲线方程.

③探究直线过定点.一般化成点斜式 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 或者直线系方程 $f(x, y) + \lambda g(x, y) = 0$

题型精研·技巧通法提能力

题型一 中点弦、弦长问题

【技巧通法·提分快招】

1、点差法在圆锥曲线中的结论

$$(1) \text{椭圆: } k_{AB} \cdot \frac{y_0}{x_0} = k_{AB} \cdot k_{OM} = \begin{cases} -\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 \Leftrightarrow \text{焦点在 } x \text{ 轴} \\ -\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{e^2 - 1} \Leftrightarrow \text{焦点在 } y \text{ 轴} \end{cases}$$

$$(2) \text{双曲线: } k_{AB} \cdot \frac{y_0}{x_0} = k_{AB} \cdot k_{OM} = \begin{cases} \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 \Leftrightarrow \text{焦点在 } x \text{ 轴} \\ \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{e^2 - 1} \Leftrightarrow \text{焦点在 } y \text{ 轴} \end{cases}$$

$$(3) \text{抛物线: } \begin{cases} k_{AB} = \frac{p}{y_0} \Leftrightarrow \text{开口向右} \\ k_{AB} = -\frac{p}{y_0} \Leftrightarrow \text{开口向左} \\ k_{AB} = \frac{x_0}{x} \Leftrightarrow \text{开口向上} \\ k_{AB} = -\frac{x_0}{p} \Leftrightarrow \text{开口向下} \end{cases}$$

2、弦长有关的问题

$$(1) \text{弦长公式: } |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

(2) 与焦点相关的弦长计算,利用定义;

(3) 涉及到面积的计算问题.

1. (2025·海南·模拟预测) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 且该椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 l 不过原点

O 且不平行于坐标轴, l 与椭圆 C 交于 A 、 B 两点, 线段 AB 的中点为 M .

(1) 证明: 直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值;

(2) 若直线 l 的方程为 $2x - 2y + 3\sqrt{3} = 0$, 延长线段 OM 与椭圆 C 交于点 P , 四边形 $OAPB$ 为平行四边形, 求椭圆 C 的方程.

2. (25-26 高三上·陕西汉中·开学考试) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为 2, 离心率为 $\sqrt{3}$. 直线 $l: y = kx + m$ 与双曲线 C 相交于 A, B 两点.
- (1) 求双曲线 C 的方程;
- (2) 若 AB 的中点为 $M(2, 1)$, 求直线 l 的方程.

3. 过点 $P(x_0, y_0)$ 的直线交抛物线 $y^2 = 2px$ 于 A, B 两点, 求 AB 中点 M 的轨迹方程.

4. (2025·黑龙江大庆·一模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 $P\left(0, \frac{2\sqrt{5}b}{5}\right)$ 作斜率为 k 的直线 l 交 C 于 M, N 两点. 当 $k=0$ 时, $MF_2 \perp x$ 轴, 且 $|MF_1| = \frac{6\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 $|MN| = 3|PM| \cdot |PN|$, 求直线 l 的方程.

5. (2025·河北·模拟预测) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与双曲线 $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{2} = 1$ 的渐近线相同,

且经过点 $(2, 3)$, C 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 以 AB 为直径的圆与直线 $x = \frac{1}{2}$ 交于 M, N 两点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 $|MN| = 3\sqrt{3}$, 求满足条件的直线 l 有几条?

6. (2025·四川达州·模拟预测) 过抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点作平行于 x 轴的直线被抛物线 C 截得的弦长为 4, 已知点 $P(0, -2), Q(4, 2)$, 设过点 P 的直线 l 与抛物线 C 交于点 A, B , 且直线 QA 交抛物线 C 于点 M (点 M 与点 A 不重合).

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 设直线 MB 交以 PQ 为直径的圆于点 D, E , 求 $|DE|$ 的最小值.

题型二 面积问题

【技巧通法·提分快招】

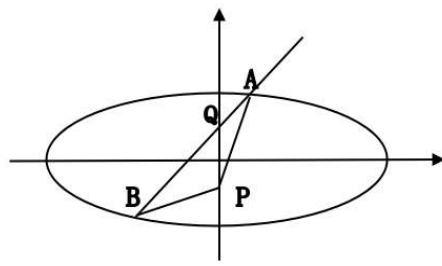
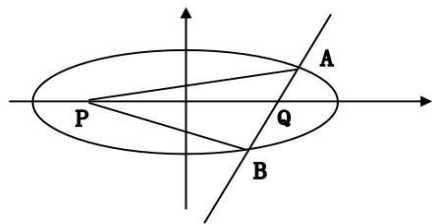
三角形的面积问题

直线与圆锥曲线相交,弦和某个定点所构成的三角形的面积,处理方法:

1、一般方法: $S = \frac{1}{2} |AB|d$ (其中 $|AB|$ 为弦长, d 为顶点到直线 AB 的距离), 设直线为斜截式 $y = kx + m$.

进一步, $S = \frac{1}{2} |AB|d = \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1+k^2}}$

2、特殊方法: 拆分法, 可以将三角形沿着 x 轴或者 y 轴拆分成两个三角形, 不过在拆分的时候给定的顶点一般在 x 轴或者 y 轴上, 此时, 便于找到两个三角形的底边长.



$$S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PQA} + S_{\triangle PQB} = \frac{1}{2} |PQ| |y_A - y_B| = \frac{1}{2} |PQ| \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2}$$

$$S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PQA} + S_{\triangle PQB} = \frac{1}{2} |PQ| |x_A - x_B| = \frac{1}{2} |PQ| \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

7. (25-26 高三上·陕西咸阳·月考) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 E 的方程;

(2) 过 E 的右焦点 F 的直线 l 交 E 于 A, B 两点, 若 $\triangle OAB$ (O 为坐标原点) 的面积为 $\frac{4\sqrt{3}}{5}$, 求 l 的方程.

8. (25-26 高三上·河北·开学考试) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 实轴长为 4.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若直线 $l: y = kx - 2 (k>0)$ 与 C 的右支交于 A, B 两点, O 为坐标原点.

(i) 求 k 的取值范围;

(ii) 若直线 l 与 y 轴交于点 P , 且 $|PA| \cdot |PB| = \frac{40}{3}$, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

9. (2025·湖南·一模) 已知 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 直线 AM, BM 相交于点 M , 且 $k_{AM} \cdot k_{BM} = -\frac{3}{4}$, 点 M 的轨迹为曲线 E .

(1) 求曲线 E 的方程;

(2) 过点 $K(-1, 0)$ 的直线 l 交曲线 E 于 P, Q 两点, 直线 PO (O 为坐标原点) 与曲线 E 的另一个交点为 G ,

线段 PQ 的中点为 M , $\triangle GPM$ 的面积为 $\frac{6\sqrt{2}}{7}$, 求直线 l 的方程.

10. (25-26 高三上·安徽·开学考试) 已知 $F_1(-2,0), F_2(2,0)$ 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, x 轴上方的两动点 M, N 在 C 上, 且 $MF_1 \parallel NF_2$, 当 $|MF_1| = |NF_2|$ 时, $|MF_1| = \sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 $|MF_1| = 3|NF_2|$, 求 M 的坐标;

(3) 求四边形 MNF_2F_1 的面积 S 的取值范围.

11. (2025·河南信阳·模拟预测) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 焦距为 2.

(1) 求 E 的方程;

(2) 若 $F(1,0)$, 过 F 作两条相互垂直的直线 AB, CD 与曲线 E 分别交于 A, B, C, D 四点, 设线段 AB, CD 的中点分别为 M, N .

(i) 证明: 直线 MN 过定点;

(ii) 求四边形 $ACBD$ 面积的取值范围.

题型三 定点及其探索性问题

【技巧通法·提分快招】

圆锥曲线的定点问题

- 1、参数无关法：把直线或者曲线方程中的变量 x, y 当作常数看待，把方程一端化为零，既然是过定点，那么这个方程就要对任意参数都成立，这时的参数的系数就要全部为零，这样就得到一个关于 x, y 的方程组，这个方程组的解所确定的点就是直线或曲线所过的定点。
- 2、特殊到一般法：根据动点或动直线、动曲线的特殊情况探索出定点，再证明该定点与变量无关。
- 3、关系法：对满足一定条件上的两点连结所得直线定点或满足一定条件的曲线过定点问题，可设直线（或曲线）上两点的坐标，利用坐标在直线（或曲线）上，建立点的坐标满足方程（组），求出相应的直线（或曲线），然后再利用直线（或曲线）过定点的知识求解。

12. (25-26 高三上·北京房山·开学考试) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(2, 0)$ ，离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 设直线 l 与椭圆 E 相交于 M, N 两点，若直线 AM 与直线 AN 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$ ，判断直线 l 是否过定点，若过定点，求出该定点坐标；若不过定点，说明理由。

13. (2025·宁夏中卫·三模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的离心率为 2, 其右焦点 F 到一条渐近线的距离为 $\sqrt{3}$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若直线 $l: y = kx + m (k>0, m>0)$ 与双曲线 C 交于不同的两点 A, B , 且以线段 AB 为直径的圆经过点 $P(1, 0)$, 证明: 直线 l 过定点.

14. (24-25 高三上·四川雅安·月考) 已知 $A(0, 1), F(0, -2)$ 分别是双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的上顶点, 下焦点.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 过 F 的直线与 C 的上, 下支分别交于 B, D 两点 (B 异于 A), 直线 $x = t$ 平分线段 BD 与 C 的下支交于点 E .

(i) 求证: 直线 AE 与直线 BD 的交点在一条定直线上;

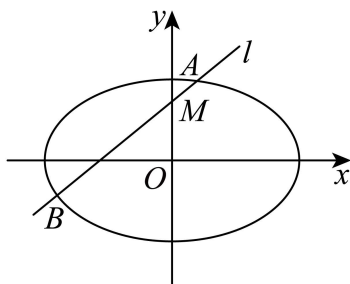
(ii) 过 B, D, E 三点的圆是否经过定点, 请说明理由.

15. (2025·陕西西安·二模) 抛物线的弦与弦的端点处的两条切线形成的三角形称为阿基米德三角形, 由抛物线的三条切线围成的三角形称为抛物线的切线三角形. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 直线 $l: y = 2$ 过点 F , 过 x 轴下方的一点 P 作 C 的两条切线 l_1 和 l_2 , 且 l_1, l_2 分别交 x 轴于点 A, B , 交 l 于点 M, N .

- (1) 求抛物线 C 的标准方程;
- (2) 若 $\triangle PMN$ 为阿基米德三角形, 求 $\angle MPN$;
- (3) 证明: 切线三角形 PAB 的外接圆过定点.

16. (2025·四川巴中·模拟预测) 如图, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $(1, 0)$, 过点 $M(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ 的动直线 l 与椭圆相交于 A, B 两点, 当直线 l 平行于 x 轴时, 直线 l 被椭圆 E 截得的线段长为 $\frac{2\sqrt{30}}{3}$.

- (1) 求椭圆 E 的方程.
- (2) 在平面直角坐标系 xOy 中, 是否存在与点 M 不同的定点 N , 使 $\frac{|NA|}{|NB|} = \frac{|MA|}{|MB|}$ 恒成立? 若存在, 求出点 N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



17. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 A , 左焦点为 F , 过点 F 且斜率为 1 的直线与 C 的一条渐近线垂直, 垂足为 N , 且 $|FN| = 1$.

(1) 求 C 的方程.

(2) 过点 $M(-2, 0)$ 的直线交 C 于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两点, 直线 AP, AQ 分别交 y 轴于点 G, H , 试问在 x 轴上是否存在定点 T , 使得 $TG \perp TH$? 若存在, 求点 T 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

题型四 斜率有关定值问题

【技巧通法·提分快招】

圆锥曲线的定值问题

1、解析几何中的定值问题是指某些几何量(线段长度,图形面积,角度,直线的斜率等)的大小或某些代数表达式的值和题目中的参数无关,不依参数的变化而变化,而始终是一个确定的值,

求定值问题常见的解题方法有两种:

法一、先猜后证(特例法):从特殊入手,求出定值,再证明这个定值与变量无关;

法二、引起变量法(直接法):直接推理、计算,并在计算推理过程中消去参数,从而得到定值。

2、直接法解题步骤

第一步设变量:选择适当的量当变量,一般情况先设出直线的方程: $y = kx + b$ 或 $x = my + n$ 、点的坐标;

第二步表示函数:要把证明为定值的量表示成上述变量的函数,一般情况通过题干所给的已知条件,进行正确的运算,将需要用到的所有中间结果(如弦长、距离等)用引入的变量表示出来;

第三步定值:将中间结果代入目标量,通过计算化简得出目标量与引入的变量无关,是一个常数。

18. (2025·甘肃白银·模拟预测) 已知抛物线 $C: y^2 = -2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $Q(x_0, 2)$ 在 C 上, 且 $|QF| = 2|OF|$, 其中 O 为坐标原点, 过点 $A(0, 1)$ 的直线 l 与 C 相交.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 l 与 C 仅有一个公共点且斜率存在, 求 l 的斜率;

(3) 若 l 与 C 交于 M, N 两点, 记直线 OM 与直线 ON 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: $k_1 + k_2$ 为定值, 并求出该定值.

19. (25-26 高三上·山西长治·开学考试) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线交 C 于 A, B 两点, 其中点 A 在第一象限. 若 AF 的中点 M 到 y 轴的距离为 p , 且 $|OA| = \sqrt{21}$ (O 为坐标原点).

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积;

(3) 过点 $Q(-3, 0)$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 D, E 两点, 问: 在 x 轴上是否存在定点 T , 设直线 DT, ET 的斜率分别为 k_1, k_2 , 使 $k_1 k_2$ 为定值, 若存在, 求出点 T 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

20. (2025·河北·模拟预测) 已知圆 $F: (x-1)^2 + y^2 = 8$, 圆 N 过点 $(-1, 0)$ 且与圆 F 内切, 若圆 N 的圆心的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 若过点 F 的直线 l 与曲线 C 交于 P, Q 两点 (P 在 x 轴上方), 且曲线 C 与 x 轴交于 A, B 两点 (A 在 B 点左侧), 记直线 AP, BQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 请问 $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值, 如果是请求出定值; 如果不是, 请说明理由.

21. (24-25 高三上·甘肃白银·月考) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$, 点 $(3, -1)$

在双曲线 C 上, 过 C 的左焦点 F 的直线 l 与 C 的左支相交于 A, B 两点, 且 l 分别交 C 的两条渐近线于 M, N 两点.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若 O 是坐标原点, $|MN| = 8\sqrt{6}$, 求 $\triangle MON$ 的面积;

(3) 已知点 $P(-4, 2)$, 直线 AP 交直线 $x = -2$ 于点 Q , 设直线 QA, QB 的斜率分别 k_1, k_2 , 求证: $k_1 - k_2$ 为定值.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A, B, C 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$ 的右顶点、上顶点、左顶点,

若 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|AB| = \sqrt{5}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 已知 M, N 两点, 其中点 M 在线段 CO 上运动 (不含端点), N 与 M 关于 A 点对称, 直线 BN 与椭圆 E 的另一交点为 P 点, 直线 BM 与椭圆 E 的另一交点为 Q 点, 设直线 BM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 直线 AP, AQ 的斜率分别为 k_3, k_4 .

(i) 求 $\triangle BNQ$ 的面积 S 的最大值;

(ii) 求证: $\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)(k_3 + k_4)$ 为定值, 并求出该定值.

题型五 长度、角度、面积的定值问题

【技巧通法·提分快招】

角度关系的证明往往转化为斜率问题或坐标问题,其中角相等问题优先考虑转为斜率之和为零处理,或考虑用向量进行计算。

23. (2025·四川南充·模拟预测) 已知 F', F 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点, 点 $A(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 且 $\triangle AFF'$ 的面积为 $\frac{3}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

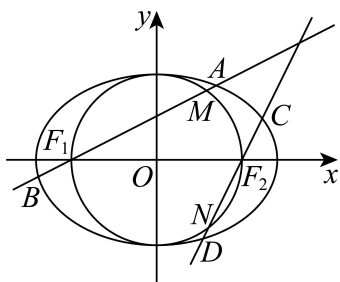
(2) 过点 $T(4, 0)$ 的直线 l 与线段 AF 相交于 S , 与椭圆交于 P, Q 两点, 证明: $\angle PFS = \angle QFS$.

24. (2025·重庆·模拟预测) 已知焦点在 x 轴上的椭圆 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $M(\sqrt{2}, 1)$, A, B 为椭圆 E 的左、右顶点, $\triangle PAB$ 的周长为 $4\sqrt{2} + 4$, 记动点 P 的轨迹为 Ω .

(1) 求曲线 Ω 的方程;

(2) 过点 M 作椭圆 E 的切线交曲线 Ω 于 T, S 两点 (含 $y = 0$ 情况), 记 $\triangle ATM, \triangle AMS$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值.

25. 如图, F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点, M, N 是以 F_1F_2 为直径的圆上关于 x 轴对称的两个动点.

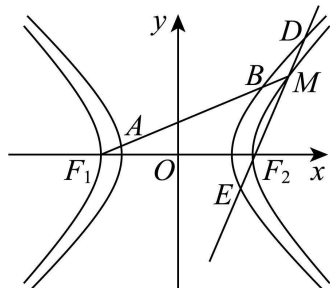


- (1) 设直线 MF_1, NF_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求 $k_1 k_2$.
 - (2) 直线 MF_1 和 NF_2 与椭圆的交点分别为 A, B 和 C, D . 问: 是否存在实数 λ , 使得 $\lambda(|AB| + |CD|) = |AB| \cdot |CD|$ 恒成立? 若存在, 求实数 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.
26. 过坐标原点 O 作圆 $C: (x+3)^2 + y^2 = 6$ 的两条切线, 切点为 M, N , 直线 MN 恰为抛物线 $T: y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线.
- (1) 求 T 的方程;
 - (2) 将抛物线 T 向左移 4 个单位长度得到新抛物线 Γ , 抛物线 Γ 交 y 轴于 A, B 两点, E, Q 为抛物线上不重合的两点, AE 交 BQ 于点 Z . 若直线 EQ 经过坐标原点, 求证: $\triangle ABZ$ 的面积恒为定值.

27. (2025·河南南阳·模拟预测) 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的两条渐近线分别为 $l_1: y = \sqrt{3}x$, $l_2: y = -\sqrt{3}x$, 若点 A, B 分别在 l_1, l_2 上 (A, B 不同于原点 O), 且直线 AB 是 C 的切线, 则称 $\triangle OAB$ 是 C 的“渐切三角形”. 已知 C 在点 (s, t) 处的切线方程为 $sx - \frac{ty}{b^2} = 1$.

- (1) 写出 C 的一个“渐切三角形”的顶点 A, B 的坐标及切线 AB 的方程, 并求出其面积;
- (2) 已知点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (x_1 x_2 > 0)$ 分别在 l_1, l_2 上, $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 试问 $\triangle OAB$ 是否是 C 的“渐切三角形”? 并说明理由;
- (3) 若 $\triangle OAB$ 是 C 的“渐切三角形”, AB 与 C 相切的切点 M 的横坐标大于 0, F 为 C 的左焦点, 证明: $\angle AFB$ 为定值.

28. (2024·湖南长沙·二模) 如图, 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点 F_1, F_2 分别为双曲线 $C_2: \frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{4b^2} = 1$ 的左、右顶点, 过点 F_1 的直线分别交双曲线 C_1 的左、右两支于 A, B 两点, 交双曲线 C_2 的右支于点 M (与点 F_2 不重合), 且 $\triangle BF_1F_2$ 与 $\triangle ABF_2$ 的周长之差为 2.



(1) 求双曲线 C_1 的方程;

(2) 若直线 MF_2 交双曲线 C_1 的右支于 D, E 两点.

① 记直线 AB 的斜率为 k_1 , 直线 DE 的斜率为 k_2 , 求 k_1k_2 的值;

② 试探究: $|DE| - |AB|$ 是否为定值? 并说明理由.

题型六 非对称韦达化处理

29. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, M, N 分别为左右顶点, 直

线 $l: x = ty + 1$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 当 $t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, A 是椭圆的上顶点, 且 $\triangle AF_1F_2$ 的周长为 6.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 AM, BN 交于点 Q , 证明: 点 Q 在定直线上.

(3) 设直线 AM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值.

30. 已知 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$ 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, P 是椭圆 C 上的一点,

当 $PF_1 \perp F_1F_2$ 时, $|PF_2| = 2|PF_1|$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过点 $Q(-4, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 点 M 关于 x 轴的对称点为点 M' , 证明: 直线 NM' 过定点.

31. 已知 $B(-1,0), C(1,0)$ 为 $\triangle ABC$ 的两个顶点, P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 边 AC, AB 上的两条中线长度之和为 6.

(1) 求点 P 的轨迹 T 的方程.

(2) 已知点 $N(-3,0), E(-2,0), F(2,0)$, 直线 PN 与曲线 T 的另一个公共点为 Q , 直线 EP 与 FQ 交于点 M , 试问: 当点 P 变化时, 点 M 是否恒在一条定直线上? 若是, 请证明; 若不是, 请说明理由.

题型七 圆锥曲线与向量交汇

【技巧通法·提分快招】

三点共线问题的解题策略

- (1) 斜率法:若过任意两点的直线的斜率都存在,通过计算证明过任意两点的直线的斜率相等来证明三点共线;
- (2) 距离法:计算出任意两点间的距离,若某两点间的距离等于另外两个距离之和,则这三点共线;
- (3) 向量法:利用向量共线定理证明三点共线;
- (4) 直线方程法:求出过其中两点的直线方程,在证明第三点也在该直线上;
- (5) 点到直线的距离法:求出过其中某两点的直线方程,计算出第三点到该直线的距离,若距离为0,则三点共线;
- (6) 面积法:通过计算求出以三点为三角形的面积,若面积为0,则三点共线,在处理三点共线问题,离不开解析几何的重要思想:“设而不求思想”。

32. 已知直线 $l: y = -x + 1$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{m^2} - y^2 = 1 (m > 0)$ 的右支交于不同的两点 M, N .

- (1) 求实数 m 的取值范围;
- (2) 直线 l 与 y 轴交于点 P , 是否存在实数 m 使得 $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PN}$ 成立? 若存在, 求出实数 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

33. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 l 过 F_2 且与双曲线交于 A, B 两点.

(1) 若双曲线的离心率为 2; 求 b 的值;

(2) 若 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$, $\triangle F_1AB$ 是等边三角形, 求双曲线的渐近线方程;

(3) 设 $b = \sqrt{3}$, 若 l 的斜率存在, 且 $(\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 求 l 的斜率.

34. (24-25 高三下·广东·开学考试) 已知动点 P 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{a^2} = 1 (a > 0)$ 上, 且 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 设直线 $l: x = \sqrt{2}a$, A, B 为 l 上不重合的两点.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 已知 $F_1A \perp F_2B$;

(i) 证明: 点 A, B 在 x 轴的异侧;

(ii) 证明: 当 $\triangle PAB$ 的面积取最小值时, 存在常数 λ 使得 $\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_2B} = \lambda \overrightarrow{F_1F_2}$, 并求 λ 的值.

35. 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 设 A, B 分别为 E 的左、右顶点, C, D 分别为上、下顶点, 四边形 $ACBD$ 的面积为 4.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 若直线 $y = x - 1$ 与椭圆交于 G, H , 求 $\triangle OGH$ 的面积;

(3) 过点 $(1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 E 交于两点 P, Q (不与 A, B 重合), 若直线 PB 与直线 $x = 4$ 相交于点 N , 求证: 三点 A, Q, N 共线.

36. (23-24 高三上·河北保定·期末) 已知动点 M 在 $x^2 + y^2 = 4$ 上, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N , 若 H 为 MN 中点.

(1) 求点 H 的轨迹方程;

(2) 过 $A(0, \frac{1}{2})$ 作直线 l 交 H 的轨迹于 P, Q 两点, 并且交 x 轴于 B 点. 若 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{QA} = \mu \overrightarrow{QB}$, 求

证: $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 为定值.

37. (2024·贵州贵阳·三模) 已知 A 为双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右顶点, 过点 $B(0, 2)$ 的直线 l 交 C 于 D 、 E 两点.

(1) 若 $AD \perp AE$, 试求直线 l 的斜率;

(2) 记双曲线 C 的两条渐近线分别为 l_1, l_2 , 过曲线 C 的右支上一点 P 作直线与 l_1, l_2 分别交于 M 、 N 两点, 且 M 、 N 位于 y 轴右侧, 若满足 $\overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{PN}$, $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 4\right]$, 求 $S_{\triangle MON}$ 的取值范围 (O 为坐标原点).

题型八 切线问题

【技巧通法·提分快招】

1、椭圆(双曲线)的切线

(1) 设切线方程为 $y = kx + m$ 与椭圆方程联立, 由 $\Delta = 0$ 进行求解;

(2) 椭圆(双曲线) $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在其上一点 (x_0, y_0) 的切线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} \pm \frac{y_0 y}{b^2} = 1$, 再应用此方程时,

首先应证明直线 $\frac{x_0 x}{a^2} \pm \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ 与椭圆(双曲线) $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相切.

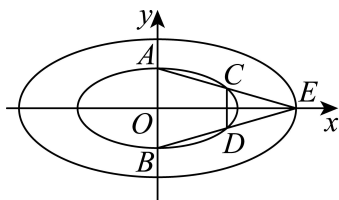
双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的以 (x_0, y_0) 为切点的切线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.)

2、抛物线的切线

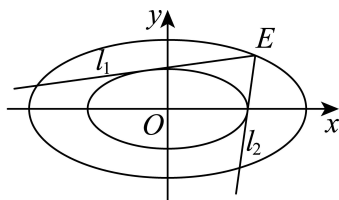
(1) 点 $P(x_0, y_0)$ 是抛物线 $y^2 = 2mx (m \neq 0)$ 上一点, 则抛物线过点 P 的切线方程是: $y_0 y = m(x_0 + x)$;

(2) 点 $P(x_0, y_0)$ 是抛物线 $x^2 = 2my (m \neq 0)$ 上一点, 则抛物线过点 P 的切线方程是: $x_0 x = m(y_0 + y)$.

38. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 过原点的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 且 $|AB|$ 的最大值为 4.



图①



图②

(1) 求椭圆 Γ 的方程;

(2) 若点 E 在椭圆 $\Gamma': \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上.

(i) 如图①, 当 A, B 是 Γ 短轴端点, E 为 Γ' 右顶点时, AE, BE 交 Γ 于 C, D , 求 $|CD|$ 的长度;

(ii) 如图②, 过 $E(x_0, y_0)$ 作 Γ 两条切线 l_1, l_2 , 若其斜率之积为 1, 求 x_0^2 的值.

39. (23-24 高三下·山东济宁·开学考试) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ,

渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 且经过点 $P(-2, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 过点 P 作双曲线 C 的切线 l , l 与 x 轴交于点 Q , 试判断 $\angle F_1PQ$ 与 $\angle F_2PQ$ 的大小关系, 并给予证明.

40. 已知一结论: 若圆 C 的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$, 则经过圆 C 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $x_0x + y_0y = r^2$.

(1) 由上面结论分别写出下面两个所求的切线方程 (不需要解题过程)

① 经过双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 上一点 $N(x_0, y_0)$ 的切线方程

② 经过抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点 $Q(x_0, y_0)$ 的切线方程

(2) 已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, A 为椭圆上顶点, P 为椭圆的右顶点, 求椭圆上点 $M(x_0, y_0)$ 到直线 AP 距离的最大值并求出点 M 坐标 (注: 若需要椭圆上经过某点的切线方程可以直接写)

41. (2024·河南郑州·模拟预测) 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , $P(x_0, y_0)$ 是 C 上一点且 $|PF|^2 - |PF| = x_0^2 + x_0$, 直线 l 经过点 $Q(-8, 0)$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) ①若 l 与 C 相切, 且切点在第一象限, 求切点的坐标;

②若 l 与 C 在第一象限内的两个不同交点为 A, B , 且 Q 关于原点 O 的对称点为 R , 证明: 直线 AR, BR 的倾斜角之和为 π .

42. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F_1(-\sqrt{7}, 0)$, $F_2(\sqrt{7}, 0)$, 点 M 满足: $|MF_1| - |MF_2| = 4$. 记 M 的轨迹为 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 过点 $A(3, 1)$ 的直线 l 交曲线 C 于 M, N 两点, 过点 M, N 分别作曲线 C 的切线, 两切线交于点 P , 试探究: 动点 P 是否在一 条定直线上? 若不在, 请说明理由; 若在, 求出该直线的方程.

题型九 定直线及其探索性问题

【技巧通法·提分快招】

定直线问题

定直线问题是指因图形变化或点的移动而产生的动点在定直线上的问题,解决这类问题,一般可以套用求轨迹方程的通用方法,也可以根据其本身特点的独特性采用一些特殊方法.

【一般策略】

- ①联立方程消去参;
- ②挖掘图形的对称性,解出动点横坐标或纵坐标;
- ③将横纵坐标分别用参数表示,再消参;
- ④设点,对方程变形解得定直线.

解题技巧:动点在定直线上:题设为某动点 $P(x_0, y_0)$ 在某定直线.

目标:需要消掉关于动点横坐标或者纵坐标的所有参数,从而建立一个无参的直线方程,此时会分为三种情况:

- (1) $x_0 = a$, 即动点恒过直线 $x = a$.
- (2) $y_0 = b$, 即动点恒过直线 $y = b$.
- (3) $y_0 = f(x_0)$, 即动点恒过直线 $y = f(x)$.

43. (24-25 高三上·江苏常州·期末) 平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$,

其右焦点与抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点重合.

(1) 求 C_1, C_2 的方程;

(2) 点 P 是 C_2 上位于第一象限的动点, C_2 在点 P 处的切线与 C_1 交于不同的两点 A, B , 线段 AB 的中点为 Q , 直线 OQ 与过 P 且垂直于 y 轴的直线交于点 M . 问点 M 是否在一条定直线 l 上, 若在, 求出直线 l 的方程; 若不在, 说明理由.

44. 已知 $A(0,1)$, $F(0,-2)$ 分别是双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的上顶点, 下焦点.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 过 F 的直线与 C 的上、下支分别交于 B, D 两点 (B 异于 A), 直线 $x=t$ 平分线段 BD 与 C 的下支交于点 E , 证明: 直线 AE 与直线 BD 的交点在定直线上.

45. (24-25 高三上·上海·月考) 已知 A, B 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a>1)$ 的左、右顶点, 椭圆 E 的长轴长是短轴长的 2 倍, 点 $M(m,0) (m>0)$ 与椭圆上的点的距离的最小值为 1.

(1) 求椭圆的离心率和标准方程;

(2) 求点 M 的坐标;

(3) 过点 M 作直线 l 交椭圆 E 于 C, D 两点 (与 A, B 不重合), 连接 AC, BD 交于点 G . 证明: 点 G 在定直线上;

46. (2024·江苏苏州·模拟预测) 已知点 $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$ 和动点 $P(x,y)$ 满足 y^2 是 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的等差中项.

(1) 求 P 点的轨迹方程;

(2) 设 P 点的轨迹为曲线 C_1 按向量 $\vec{a} = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{16}\right)$ 平移后得到曲线 C_2 , 曲线 C_2 上不同的两点 M, N 的连线交 y 轴于点 $Q(0,b)$, 如果 $\angle MON$ (O 为坐标原点) 为锐角, 求实数 b 的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 如果 $b=2$ 时, 曲线 C_2 在点 M 和 N 处的切线的交点为 R , 求证: R 在一条定直线上.

47. (2025·甘肃白银·三模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线的方程为 $y = \frac{\sqrt{7}}{3}x$, 虚轴的一个端点到渐近线的距离为 $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. 双曲线 C 的右焦点为 F , 点 M 在 C 上, 且 $MF \perp x$ 轴, 过点 M 与 C 相切的直线 l 与 x 轴交于点 P .
- (1) 求双曲线 C 的方程.
- (2) 若点 M 在 x 轴上方, 求以线段 MP 为直径的圆的一般方程.
- (3) 过点 P 的直线交双曲线 C 于 D, E 两点 (点 D 在双曲线的左支上, 且不为左顶点), G 为线段 PF 的中点, 直线 GE 与 MF 交于点 H , 求证: 直线 DH 与 x 轴平行.

题型十 圆锥曲线新定义问题

【技巧通法·提分快招】

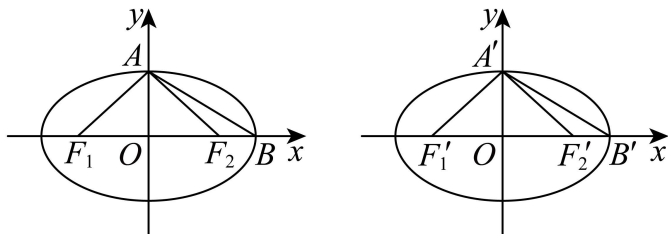
圆锥曲线背景下的新定义问题处理思路

- 1、明确新定义：首先仔细阅读题目，明确新定义的内容、符号及其含义。
- 2、联系常规知识：将新定义与圆锥曲线的第一、第二定义或标准方程等常规知识联系起来，找出它们的相似之处或转换关系。
- 3、建立数学模型：根据新定义，建立相应的数学模型或方程，利用解析几何或代数方法进行求解。
- 4、验证与推理：在求解过程中，注意验证每一步推理的正确性，确保最终答案符合题目要求。
- 5、灵活应用：对于复杂问题，可能需要综合运用多种数学知识和方法，灵活应对。

48. (2025·江西·模拟预测) 定义：由椭圆的一个焦点和长轴的一个顶点(焦点与顶点在短轴同侧)及短轴的一个顶点组成的三角形称为该椭圆的“焦顶三角形”. 如果两个椭圆的“焦顶三角形”相似，则称这两个椭圆是“相似椭圆”，并将三角形的相似比称为椭圆的相似比.

(1) 求证：两个椭圆是“相似椭圆”的充要条件是离心率相等；

(2) 如图，已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，椭圆 $C_2: \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1 (a' > b' > 0)$ 的离心率为 e' ， C_1 与 C_2 相似，且 C_1 与 C_2 的相似比为 $k:1$ ，若 $\triangle AF_2B$ 的面积为 S ，求 $\triangle A'F_1'F_2'$ 的面积(用 e' ， k ， S 表示)；



(3) 若椭圆 $C_3: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，写出与椭圆 C_3 相似且长半轴长为 a ，焦点在 x 轴上的椭圆 C_a 的标准方程. 若在椭圆 C_a 上存在两点 M, N 关于直线 $y = \frac{x}{2} - 3$ 对称，求椭圆 C_a 的“焦顶三角形”的周长的取值范围.

49. (2025·海南·模拟预测) 定义: 对椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 及任意一点 $P(x_0, y_0)$, 称直线 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ 为 C 关于点 P 的“极线”.

结论 1: 若点 P 在椭圆 C 上, 则 C 关于点 P 的极线就是 C 在点 P 处的切线.

结论 2(椭圆的光学性质): 从椭圆一个焦点发出的光线照射到椭圆上, 其反射光线会经过另一个焦点.

试根据上面的定义和结论解决下列问题:

已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的两个焦点, C 关于点 $P(-4, 0)$ 的极线 l_P 与 C 相交于 A, B 两点.

(1) 求 $|AB|$;

(2) 设 C 在点 A 处的切线为 l_A , 在点 B 处的切线为 l_B , 过在 l_P 上且在 C 外一点 D 作 C 的两条切线, 切点分别为 M, N , 证明: 直线 MN, l_A, l_B 相交于一点;

(3) 若 $Q(m, n)$ 是 C 上除顶点以外的任意一点, 直线 QF_1 和 QF_2 分别与直线 $l: \frac{mx}{4} + \frac{ny}{3} = 0$ 相交于点 S, T , 证明: $|QS| + |QT|$ 为定值.

50. (24-25 高三下·山东·月考) 对于抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 给定一点 $M(x_0, 0)$, 若抛物线上存在两点 A, B , 使得 $|MA| = |MB|$, 且 AB 不与 x 轴垂直, 则称弦 AB 是抛物线的一条“ x_0 -伴随弦”. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 存在“ x_0 -伴随弦”.

(1) 求 x_0 的取值范围.

(2) 求 x_0 -伴随弦的中点 S 的轨迹方程.(用 x_0 表示)

(3) x_0 -伴随弦的弦长是否有最大值? 若有, 求出最大值 (用 x_0 表示); 若没有, 请说明理由.

51. 一般地, 平面曲线 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (A, C, D, E, F 为实常数且 $A^2 + C^2 \neq 0$) 在点 $Q(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $Ax_0x + Cy_0y + D\frac{x+x_0}{2} + E\frac{y+y_0}{2} + F = 0$. 对于椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上不同的两点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 称 $\lambda x_1x_2 + \mu y_1y_2$ 为椭圆 Γ 在 M, N 两点处的线性积, 并记为 $L(\lambda, \mu)$.

(1) 证明: $\left| L\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}\right) \right| \leq 1$.

(2) 已知 $L\left(\frac{1}{a^4}, \frac{1}{b^4}\right) = 0$, 椭圆 Γ 在 M, N 两点处的切线交点的轨迹为曲线 R .

(i) 求曲线 R 的方程;

(ii) 已知 B 为椭圆 Γ 的上顶点, 若点 B 与曲线 R 上的点之间的距离的最大值为 3, 最小值为 1, 求椭圆 Γ 的方程.

检测 I 组 重难知识巩固

52. 已知 O 为坐标原点, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个顶点坐标为 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 短轴长为 2.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知直线交 C 于 P, Q 两点, 直线 PQ 与 x 轴不平行, 记直线 AP, BQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 = 2k_2$, 证明: 直线 PQ 恒过定点.

53. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知 O 为坐标原点, 点 P 在 C 上, 点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{QF}$, 求直线 OQ 斜率的最大值.

54. 已知抛物线 C 的顶点为坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 直线 $l: x=4$ 交 C 于 M, Q 两点, 且 $OM \perp OQ$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若点 P 是 C 的准线上的一点, 过点 P 作 C 的两条切线 PA, PB , 其中 A, B 为切点, 求点 O 到直线 AB 的距离的最大值.

55. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点是 F_1, F_2 , 且过点 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF_1$ 的周长为 8, $\triangle BF_1F_2$ 的周长为 $4 + 2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 点 $P(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆 C 上, 设点 P 关于 x 轴的对称点为 Q , M 是椭圆 C 上一点, 直线 MP 和 MQ 与 x 轴分别交于点 E, F (E, F 不重合), O 为原点, 证明 $|OE| \cdot |OF|$ 为定值.

56. (24-25 高三上·天津河北·期末) 已知直线 $x=2$ 经过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 且被椭圆 C 截得的线段长为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 椭圆 C 的下顶点为 A , P 是椭圆 C 上一动点, 直线 AP 与圆 $O: x^2 + y^2 = b^2$ 相交于点 M (异于点 A), M 关于 O 的对称点记为 N , 直线 AN 与椭圆 C 相交于点 Q (异于点 A). 设直线 MN, PQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 试探究当 $k_2 \neq 0$ 时, $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值, 并说明理由.

57. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 且点 $A(\sqrt{3}, 1)$ 在椭圆上.

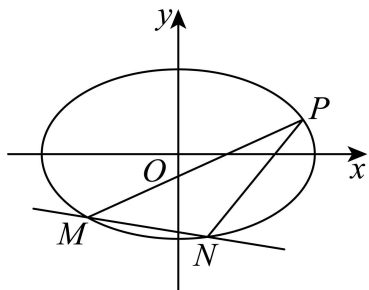
(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 椭圆 C 的左焦点为 F , 若 T 为直线 $x=-3$ 上一点, 过点 F 且与 TF 垂直的直线交椭圆 C 于 P, Q 两点, 线段 PQ 的中点为 M .

(i) 证明: 点 M 在直线 OT 上 (O 为原点);

(ii) 求 $\triangle OPQ$ 的面积的最大值, 以及此时点 T 的坐标.

58. (24-25 高三上·山东·期中) 如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的点到其左焦点的最大距离和最小距离分别为 $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ 和 $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, 斜率为 $-\frac{1}{3}$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于异于点 $P(3, 1)$ 的 M, N 两点.



- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 若 $|MN| = \sqrt{10}$, 求直线 l 的方程;
- (3) 当直线 PM, PN 均不与 x 轴垂直时, 设直线 PM 的斜率为 k_1 , 直线 PN 的斜率为 k_2 , 求证: $k_1 k_2$ 为定值.

59. (25-26 高三上·内蒙古·开学考试) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{3}$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 C 的方程.

(2) 过点 $N(m, 0) (m < 0)$ 作直线 l 与圆 $M: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 相切, 且直线 l 与 C 交于 A, B 两点.

① 求 m 的取值范围;

② 求 $|AB|$ (用含 m 的式子表示).

60. (2025·北京海淀·二模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$. 设直线 $l: y = x + m$ 交椭圆 C 于不同的两点 A, B , 与 y 轴交于点 P .

(1) 当 $m = 0$ 时, 求 $|AB|$ 的值;

(2) 若点 Q 满足 $|PQ| = 3$ 且 $|QA| = |QB|$, 求 $\angle AQB$ 的大小.

61. (25-26 高三上·云南临沧·月考) 已知椭圆 $E: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上焦点 F 也是抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点, E 的上顶点为 A , 下顶点为 B , 且 $|AB| = 4$.

(1) 求 E 的方程.

(2) 过点 F 作一条斜率为 k 的直线 l , 与 E 交于 P, Q 两点, 与 C 交于 M, N 两点.

(i) 若 $\frac{2}{|PQ|} + \frac{t}{|MN|}$ 为定值, 求 t 的值.

(ii) 是否存在实数 k , 使得 $\triangle BMN$ 的面积恰好是 $\triangle APQ$ 的面积 3 倍? 若存在, 求出 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

62. (2024·陕西安康·模拟预测) 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别是 A_1, A_2 , 直线 l 与 C 交于 M, N 两点 (不与 A_2 重合), 设直线 A_2M, A_2N, l 的斜率分别为 k_1, k_2, k , 且 $(k_1 + k_2)k = -6$.

(1) 判断直线 l 是否过 x 轴上的定点. 若过, 求出该定点; 若不过, 请说明理由.

(2) 若 M, N 分别在第一和第四象限内, 证明: 直线 MA_1 与 NA_2 的交点 P 在定直线上.

63. (2025·广东广州·三模) 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

- (1) 若直线 l 与双曲线 C 相交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点坐标为 $(3, 3)$, 求直线 l 的方程;
- (2) 若 P 为双曲线 C 右支上异于右顶点的一个动点, F 为双曲线 C 的右焦点, x 轴上是否存在定点 $M(t, 0) (t < 0)$, 使得 $\angle PFM = 2\angle PMF$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

64. (2025·湖北襄阳·模拟预测) 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 左右焦点分别为 F_1, F_2 , 上下顶点分别为 A, B , 左右顶点分别为 C, D , 又 P, Q 是 Γ 上异于椭圆顶点的两点.

- (1) 若点 Q 在第一象限且满足 $\triangle ABQ$ 的面积比 $\triangle F_1F_2Q$ 的面积大, 求点 Q 的横坐标的取值范围;
- (2) 若线段 PQ 的中点坐标为 $(1, \frac{1}{2})$, 求直线 PQ 的方程;
- (3) 记点 A 在直线 PQ 上的射影为点 H , 且直线 CP 的斜率是直线 DQ 的斜率的 3 倍, 试判断: 过点 A, H, O (O 为坐标原点) 三点的圆是否为定圆? 若是, 求出该圆的方程; 若不是, 请说明理由.

65. (2025·辽宁·三模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线的斜率之积为 -3 .

(1) 求 C 的离心率.

(2) 若过点 $D(0, 5)$ 且斜率为 1 的直线与 C 交于 A, B 两点 (A 在左支上, B 在右支上), 且 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{7} \overrightarrow{DB}$.

① 求 C 的方程;

② 已知不经过点 $P(2, 3)$ 的直线 l 与 C 交于 E, F 两点, 直线 l 的斜率存在且直线 PE 与 PF 的斜率之积为 1 , 证明: 直线 l 过定点.

66. (25-26 高三上·河北·开学考试) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 四点 $P_1\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_2\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$

$P_3(0, 1), P_4(1, 1)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过点 $D(4, 0)$ 且斜率不为 0 的直线 l 与椭圆 C 相交于 M, N 两点.

(i) 若 O 为原点, 求 $\triangle MON$ 面积的最大值;

(ii) 点 $A(-2, 0)$, 设点 Q 是线段 MN 上异于 M, N 的一点, 直线 QA, QM 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 + k_2 = 0$, 求 $\frac{|DM| \cdot |NQ|}{|DN| \cdot |MQ|}$ 的值.

67. (24-25 高三下·北京·月考) 已知椭圆 C 的中心在原点, 焦点在 x 轴上, 且短轴长为 $2\sqrt{3}$, 离心率等于 $\frac{1}{2}$.

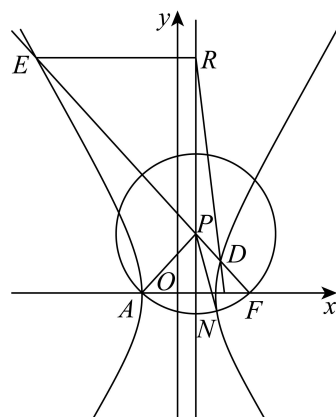
(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 A 为椭圆 C 的左顶点, F 为右焦点, P 为椭圆 C 上一个动点. 设直线 AP 与直线 $x=4$ 交于点 Q , 连接 FQ , 过 A 作 FQ 的平行线与 FP 交于点 M , 求 $|MF|$ 的值.

68. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1 (a > 0)$ 的左顶点为 A , 右焦点为 F , P 是直线 $l: x = \frac{a}{2}$ 上一点, 且 P 不在 x 轴上, 以点 P 为圆心, 线段 PF 的长为半径的圆弧 AF 交 C 的右支于点 N .

(1) 证明: $\angle APN = 2\angle NPF$;

(2) 取 $a=1$, 若直线 PF 与 C 的左、右两支分别交于 E, D 两点, 过 E 作 l 的垂线, 垂足为 R , 试判断直线 DR 是否过定点若是, 求出定点的坐标; 若不是, 请说明理由.



69. (2024·四川成都·模拟预测) 椭圆 C 的中心为坐标原点 O , 焦点在 y 轴上, 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆上的点到焦点的最短距离为 $1 - e$, 直线 l 与 y 轴交于点 $P(0, m)$ ($m \neq 0$), 与椭圆 C 交于相异两点 A, B , 且 $\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OP}$.

(1) 求椭圆方程;

(2) 求 m 的取值范围.

70. (2025·四川绵阳·模拟预测) 中心 O 在原点, 左、右焦点分别为 F_1, F_2 的椭圆的离心率 $e = \frac{\sqrt{10}}{4}$, 椭圆上的动点 P (不与顶点重合), 满足当 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ 时, P 到左焦点 F_1 的距离为 3.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 当 $|PF_1|$ 的最大值小于 5 时, 过点 P 作椭圆的切线, 与 x 轴交于 Q , 与 y 轴交于 R , 求 $S_{\triangle OQR}$ 的最小值.

71. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , O 为坐标原点, 点 $P(-1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 且 $|PF_2| = \frac{5}{2}$, 直线 l 过点 F_1 且与椭圆 C 交于 A, B 两点.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 已知 $\overrightarrow{OF_1} = \overrightarrow{F_1M}$, $\overrightarrow{OF_2} = \overrightarrow{F_2N}$, 若直线 AM, BN 交于点 D , 探究: 点 D 是否在某定直线上? 若是, 求出该直线的方程; 若不是, 请说明理由.

检测Ⅱ组 创新能力提升

72. (23-24 高三上·贵州黔西·月考) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 过焦点的直线 l 与抛物线 C 交于两点 A, B , 当直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 时, $|AB| = 16$.

(1) 求抛物线 C 的标准方程和准线方程;

(2) 记 O 为坐标原点, 直线 $x = -2$ 分别与直线 OA, OB 交于点 M, N , 求证: 以 MN 为直径的圆过定点, 并求出定点坐标.

73. (2025·黑龙江哈尔滨·模拟预测) 平面直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 E 上任意一点到点 $F(2,0)$ 的距离比到直线 $x=-1$ 的距离大 1.

(1) 求曲线 E 的方程;

(2) 过点 $F(2,0)$ 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 直线 l_1 与曲线 E 交于 A, B 两点, 直线 l_2 与曲线 E 交于 C, D 两点, 求 $|AB|^2 + |CD|^2$ 的最小值.

74. (23-24 高三上·山西·期末) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 焦点到渐近线的距离为 1.

(1) 求 C 的方程.

(2) 过点 $M(3,0)$ 的直线 l 与 C 交于不同的两点 A, B , 问: 在 x 轴上是否存在一个定点 P , 使得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 为定值? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

75. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, F 为 C 的左焦点, P 是 C 右支上的点, 点 P 到 C 的两条渐近线的距离之积为 $\frac{3}{4}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若线段 PF 与 C 的左支交于点 Q , 与两条渐近线交于点 A, B , 且 $3|AB| = |PQ|$, 求 $|PQ|$.

76. 已知圆 $C_1: (x + \sqrt{5})^2 + y^2 = 1$, 圆 $C_2: (x - \sqrt{5})^2 + y^2 = 25$, 动圆 C 与圆 C_1 和圆 C_2 均相切, 且一个内切、一个外切.

(1) 求动圆圆心 C 的轨迹 E 的方程.

(2) 已知点 $A(0, -2), B(0, 2)$, 过点 $(0, 1)$ 的直线 l 与轨迹 E 交于 M, N 两点, 记直线 AM 与直线 BN 的交点为 P . 试问: 点 P 是否在一条定直线上? 若在, 求出该定直线; 若不在, 请说明理由.

77. (23-24 高三上·湖南株洲·开学考试) 已知 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点, O 为坐标原点, M 为椭圆上任意一点, 椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\triangle MOF$ 的面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) A, B 为椭圆的左、右顶点, 点 $P(1, 0)$, 当 M 不与 A, B 重合时, 射线 MP 交椭圆 C 于点 N , 直线 AM, BN 交于点 T , 求 $\angle ATB$ 的最大值.

78. (2025·上海杨浦·三模) 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 上下顶点分别为 B_1, B_2 , $\triangle B_1F_1F_2$ 是面积为 1 的直角三角形, 过焦点的直线交椭圆 Γ 于 P, Q 两点 (P, Q 分别在第一、四象限).

(1) 求椭圆 Γ 的离心率;

(2) 已知点 $M(0, m)$, $m > 0$, 求椭圆 Γ 上的动点 R 到点 M 的最大距离;

(3) 求四边形 B_1B_2QP 面积的取值范围.

79. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(4, 0)$, 渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$.

(1) 求 C 的方程.

(2) 若动直线 l 过点 F , 且与 C 交于 M, N 两点 (M 在第一象限, N 在第四象限), 过点 M 作直线 $x = 1$ 的垂线, 垂足为 D .

(i) 证明: 直线 DN 恒过点 $(\frac{5}{2}, 0)$;

(ii) 设 O 为坐标原点, $\triangle ODN$ 的面积为 S , 求 S 的最小值.

80. (25-26 高三上·山东泰安·开学考试) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{8} = 1 (a > 2\sqrt{2})$ 的左顶点为 A , 右焦点为 F , 且 $|AF| = 4$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过 A 且不与 x 轴重合的直线与 C 的另一个交点为 P , 与直线 $x = 9$ 交于点 Q , 过 A 且平行于 QF 的直线与直线 PF 交于点 R .

(i) 若 $|PQ| = 2|PA|$, 求 $\triangle AFR$ 的面积;

(ii) 证明: 存在定点 G , 使得 $\angle ARG = \angle FRQ$.

81. (25-26 高三上·安徽·开学考试) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(1, \frac{3}{2})$, 其离心率为 $\frac{1}{2}$. 四边形 $ABCD$ 的顶点均在椭圆 E 上, 直线 AB 过 E 的左焦点 F_1 , 对角线 AC, BD 交点为椭圆 E 的右焦点 F_2 .
- (1) 求椭圆 E 的方程;
- (2) 若 AB, CD 的斜率存在且分别为 k_1, k_2 , 求证: $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值;
- (3) 过点 P 作 $PH \perp CD$, 垂足为 H , 求 $|PH|$ 的最大值.

82. (2025·重庆·模拟预测) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右焦点为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, P 为 C 上一动点, $\triangle PF_1F_2$ 内切圆面积的最大值为 $\frac{\pi}{3}$, 且 F_2 到直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 的距离为 $3c$, 过 F_2 的直线 l 交 C 于 A, B 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 $OP \perp AB$, 探究: $\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|OP|^2}$ 是否为定值, 若为定值, 求出定值; 若不为定值, 请说明理由;

(3) 若 $P(1, y_0) (y_0 > 0)$, 直线 l 与直线 $x = 4$ 相交于点 Q , 记 PA, PQ, PB 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 求证: k_1, k_2, k_3 成等差数列.

83. (2025·吉林·模拟预测) 已知对任意平面向量 $\overrightarrow{AB} = (x, y)$, 把向量 \overrightarrow{AB} 绕其起点沿逆时针方向旋转 θ 角后得到向量 $\overrightarrow{AP} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$, 叫做把点 B 绕点 A 沿逆时针方向旋转 θ 角得到点 P .

(1) 若平面内点 $A(1, 2)$, 点 $B(1 + \sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})$, 把点 B 绕点 A 沿顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到点 P , 求点 P 的坐标;

(2) 若双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 得到曲线 $y = \frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{x}$.

(i) 求双曲线 E 的标准方程及离心率;

(ii) 双曲线 E 的左顶点为 A , 右焦点为 F , 过点 F 且斜率存在的直线 l 交双曲线 E 于 M, N 两点, 点 T 是 $\triangle AMN$ 的外心, 求证: 直线 OT 与直线 l 的斜率之积为定值.

84. (24-25 高三下·重庆·月考) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$, 点

$P_1(1,1)$ 在 C 上. 按如下方式构造点 $P_n (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$: 过点 P_{n-1} 作斜率为 1 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1} , 点 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点为 P_n , 记点 P_n 的坐标为 (x_n, y_n) , O 为坐标原点.

(1) 求 $\triangle OQ_1Q_2$ 的面积;

(2) 记 $a_n = 2x_n - y_n$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列;

(3) G, H 分别为线段 $P_nP_{n+2}, P_{n+1}P_{n+3}$ 的中点, 记 $\triangle OQ_nQ_{n+1}, \triangle OGH$ 的面积分别为 S_1, S_2 . 判断 $\frac{S_1}{S_2}$ 是否为

定值, 如果是定值, 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值; 如果不是, 请说明理由.

85. (24-25 高三上·湖北·月考) 现有一双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $F_1(-2,0)$ 和 $F_2(2,0)$ 分别为 Γ 的左焦点和右

焦点, P 是双曲线 Γ 上一动点, $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的最大值为 3.

(1) 求双曲线 Γ 的标准方程;

(2) 过 F_1 的直线交双曲线左支于 A, B 两点 (点 A 在点 B 上方), 判断 $\frac{1}{|AF_1|} + \frac{1}{|BF_1|}$ 是否是定值, 并给出理由;

(3) 在 (2) 的条件下, 过点 F_2 作平行于 AB 的直线交双曲线右支于 C, D 两点 (点 C 在点 D 上方), AF_2 与 CF_1 相交于点 W , 求证: $|WF_1| + |WF_2|$ 为定值.

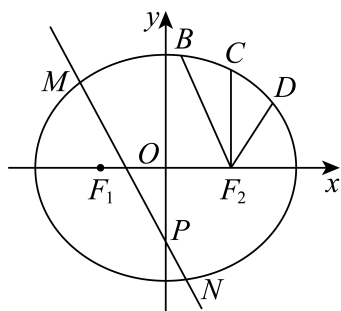
86. (2025·河北邯郸·一模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 短轴的一个顶点到长轴的一个顶点的距离为 $\sqrt{3}$, O 为坐标原点, $T(2, 0)$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 C 上存在不关于 x 轴对称的两点 M, N , 使得 $\angle MTN$ 恰好被 x 轴平分, 求 $\triangle MTN$ 面积的取值范围;

(3) 过 T 的直线 l' 与 C 交于不同的两点 A, B , 椭圆在 A, B 两点处的切线相交于 P , Q 为线段 AB 的中点, 证明: O, P, Q 三点共线.

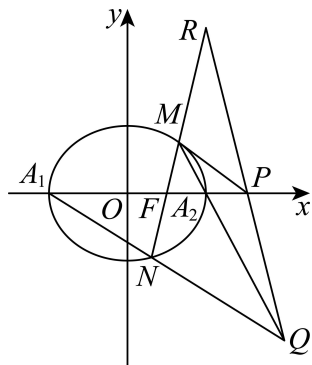
87. (2024·安徽淮北·二模) 如图, 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2 , 短轴长为 6, A 为 Γ 上一点, $G(1, \frac{1}{2})$ 为 $\triangle AF_1F_2$ 的重心.



- (1) 求椭圆 Γ 的方程;
- (2) 椭圆 Γ 上不同三点 B, C, D , 满足 $CF_2 \perp OF_2$, 且 $|BF_2|, |CF_2|, |DF_2|$ 成等差数列, 线段 BD 中垂线交 y 轴于 E 点, 求点 E 纵坐标的取值范围;
- (3) 直线 $l: y = kx - 2$ 与 Γ 交于 M, N 点, 交 y 轴于 P 点, 若 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PN}$, 求实数 λ 的取值范围.

88. (23-24 高三上·上海杨浦·期中) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过 $A(1, 0), B(0, b)$ 两点. O 为坐标原点, 且 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 过点 $P(0, 1)$ 且斜率为 $k (k > 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 有两个不同的交点 M, N . 且直线 AM, AN 分别与 y 轴交于点 S, T .
- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 若以 MN 为直径的圆经过坐标原点, 求直线 l 的方程;
- (3) 设 $\overrightarrow{PS} = \lambda \overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PT} = \mu \overrightarrow{PO}$, 求 $\lambda + \mu$ 的取值范围.

89. (2025·浙江·二模) 已知 F 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, 椭圆离心率 $e = \frac{1}{2}$, 且椭圆上任意一点与点 F 距离的最大值为 3.



(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 点 $M(x_1, y_1) (x_1 > 0, y_1 > 0)$ 在椭圆 E 上, 椭圆在点 M 处的切线 $l: \frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{3} = 1$ 交 x 轴于点 P .

① 求 $|FP| - 4|FM|$ 的最小值;

② 设 A_1, A_2 分别为椭圆 E 的左、右顶点, 不垂直 x 轴的直线 MF 交椭圆于另一点 N , 直线 NA_1 与直线 MA_2 交于点 Q , 问直线 MN 与直线 PQ 的交点 R 是否在一条定直线上? 若是, 求出该直线方程; 若不是, 请说明理由.

90. (24-25 高三下·山东·月考) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 焦距为 $2\sqrt{7}$, 且点 F_2 到其渐近线的距离为 $\sqrt{3}$.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 若点 $P(x_0, y_0)$ 是 C 上第一象限的动点, 过点 $P(x_0, y_0)$ 作直线 l (l 不与渐近线平行), 若 l 与 C 只有一个公共点, 且 l 与 x 轴相交于点 M .

(i) 证明: $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|MF_1|}{|MF_2|}$;

(ii) 若点 N 在直线 l 上, 且 $F_2N \perp F_2P$, 那么点 N 是否在定直线上? 若在定直线上, 求出该直线方程; 若不在定直线上, 请说明理由.

91. 法国数学家加斯帕尔·蒙日是 18 世纪著名的几何学家,他创立了画法几何学,推动了空间解析几何学的独立发展,奠定了空间微分几何学的宽厚基础,根据他的研究成果,我们定义:给定椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 则称圆心在原点 O , 半径为 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 的圆为“椭圆 C 的伴随圆 C' ”. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F_1 , 点 $A(1, \frac{3}{2})$ 在 C 上, 且 $|AF_1| = \frac{5}{2}$.
- (1) 求椭圆 C 的方程以及椭圆 C 的伴随圆 C' 的方程;
- (2) 将 C' 向上平移 6 个单位长度得到曲线 C'' , 已知 $D(0, -1)$, 动点 E 在曲线 C'' 上, 探究: 是否存在定点 $G(0, t) (t \neq -1)$, 使得 $\frac{|EG|}{|ED|}$ 为定值, 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由;
- (3) 已知不过点 A 的直线 $l: y = \frac{1}{2}x + m$ 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 点 $P(0, y_P), Q(0, y_Q)$ 分别在直线 AM, AN 上, 证明: $|AP| = |AQ|$.

92. (2024·海南海口·模拟预测) 对于二次曲线 $\Gamma: \lambda x^2 + \mu y^2 = 1$, 我们有: 若 $Q(x', y')$ 是曲线 Γ 上的一点, 则过点 Q 与曲线 Γ 相切的直线方程为 $\lambda x'x + \mu y'y = 1$. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $a^2 = 13b^2$, 动圆 $C_2: x^2 + y^2 = r^2 (b < r < a)$, 点 $P(x_0, y_0)$ 是 C_1 与 C_2 在第一象限的交点.
- (1) 求椭圆 C_1 的离心率 e ;
 - (2) 过点 P 作动圆 C_2 的切线 l , l 经过椭圆 C_1 的右焦点 $F(c, 0)$, 求 x_0 与 c 满足的关系式 $f(x_0, c) = 0$;
 - (3) 若 $b = 1$, 直线 AB 与 C_1, C_2 均相切, 切点 A 在 C_1 上, 切点 B 在 C_2 上, 求 $|AB|$ 的最大值.