

备战 2025 高考数学考前必备 1——知识再现

回扣 1 集合、常用逻辑用语、不等式



1. 集合

(1) 集合间的关系与运算

$A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$; $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$.

(2) 子集、真子集个数计算公式

对于含有 n 个元素的有限集合 M , 其子集、真子集、非空子集、非空真子集的个数依次为 2^n , $2^n - 1$, $2^n - 1$, $2^n - 2$.

(3) 集合运算中的常用方法

若已知的集合是不等式的解集, 用数轴求解; 若已知的集合是点集, 用数形结合法求解; 若已知的集合是抽象集合, 用 Venn 图求解.

2. 全称量词命题、存在量词命题及其否定

(1) 全称量词命题: $\forall x \in M, p(x)$, 它的否定为存在量词命题: $\exists x \in M, \neg p(x)$.

(2) 存在量词命题: $\exists x \in M, p(x)$, 其否定为全称量词命题: $\forall x \in M, \neg p(x)$.

(3) 命题与其否定真假相反.

3. 充分条件与必要条件的三种判定方法

(1) 定义法: 若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的充分条件(或 q 是 p 的必要条件); 若 $p \Rightarrow q$, 且 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充分不必要条件(或 q 是 p 的必要不充分条件).

(2) 集合法: 利用集合间的包含关系. 例如, 命题 $p: x \in A$, 命题 $q: x \in B$, 若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分条件(q 是 p 的必要条件); 若 $A \subsetneq B$, 则 p 是 q 的充分不必要条件(q 是 p 的必要不充分条件); 若 $A = B$, 则 p 是 q 的充要条件.

(3) 等价法: 将命题等价转化为另一个便于判断真假的命题.

4. 一元二次不等式的解法

解一元二次不等式的步骤: 一化(将二次项系数化为正数); 二判(判断对应方程 Δ 的符号); 三解(解对应的一元二次方程); 四写(大于取两边, 小于取中间).

解含有参数的一元二次不等式一般要分类讨论, 往往从以下几个方面来考虑: (1) 二次项系数, 它决定二次函数的开口方向; (2) 判别式 Δ , 它决定根的情形, 一般分 $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ 三种情况; (3) 在有根的条件下, 要比较两根的大小.

5. 一元二次不等式的恒成立问题

(1) $ax^2 + bx + c > 0 (a \neq 0)$ 恒成立的条件是
$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

(2) $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$ 恒成立的条件是 $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

6. 分式不等式

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 (< 0) \Leftrightarrow f(x)g(x) > 0 (< 0);$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \geq 0 (\leq 0) \\ g(x) \neq 0 \end{cases}.$$

7. 基本不等式

(1) 基本不等式: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a>0, b>0)$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立.

基本不等式的变形:

① $a^2+b^2 \geq 2ab (a, b \in \mathbf{R})$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立;

② $(\frac{a+b}{2})^2 \geq ab (a, b \in \mathbf{R})$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立.

(2) 在利用基本不等式求最值时, 要特别注意“拆、拼、凑”等技巧, 满足基本不等式中“正”“定”“等”的条件.

回扣 2 复数、平面向量



1. 复数的相关概念及运算法则

(1) 复数 $z=a+bi (a, b \in \mathbf{R})$ 的分类

① z 是实数 $\Leftrightarrow b=0$;

② z 是虚数 $\Leftrightarrow b \neq 0$;

③ z 是纯虚数 $\Leftrightarrow a=0$ 且 $b \neq 0$.

(2) 共轭复数

复数 $z=a+bi (a, b \in \mathbf{R})$ 的共轭复数 $\bar{z}=a-bi$.

(3) 复数的模

复数 $z=a+bi (a, b \in \mathbf{R})$ 的模 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

(4) 复数相等的充要条件

$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d (a, b, c, d \in \mathbf{R})$.

特别地, $a+bi=0 \Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0 (a, b \in \mathbf{R})$.

(5) 复数的运算法则

加减法: $(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$;

乘法: $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$;

除法: $(a+bi) \div (c+di) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ ($c+di \neq 0$). (其中 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$)

2. 复数的几个常见结论

(1) $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$.

(2) $\frac{1+i}{1-i} = i, \frac{1-i}{1+i} = -i$.

(3) $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 0 (n \in \mathbf{N})$.

3. 平面向量基本定理

如果 e_1, e_2 是同一平面内的两个不共线向量, 那么对于这一平面内的任一向量 a , 有且只有一对实数 λ_1, λ_2 , 使 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$. 若 e_1, e_2 不共线, 我们把 $\{e_1, e_2\}$ 叫做表示这一平面内所有向量的一个基底.

4. 向量 a 与 b 的夹角

已知两个非零向量 a, b , O 是平面上的任意一点, 作 $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b$, 则 $\angle AOB = \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 叫做向量 a 与 b

的夹角. 当 $\theta = 0$ 时, a 与 b 同向; 当 $\theta = \pi$ 时, a 与 b 反向. 如果 a 与 b 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$, 我们说 a 与 b 垂直,

记作 $a \perp b$.

5. 平面向量的数量积

(1) 若 a, b 为非零向量, 夹角为 θ , 则 $a \cdot b = |a||b| \cdot \cos \theta$.

(2) 设 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$, 则 $a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

6. 两个非零向量平行、垂直的充要条件

若 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$, 则

(1) $a \parallel b \Leftrightarrow a = \lambda b (\lambda \neq 0) \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

(2) $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

7. 利用数量积求长度

(1) 若 $a = (x, y)$, 则 $|a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(2) 若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

8. 利用数量积求夹角

设 a, b 为非零向量, 若 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$, θ 为 a 与 b 的夹角,

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

9. 三角形“四心”向量形式的充要条件

设 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 则:

(1) O 为 $\triangle ABC$ 的外心 $\Leftrightarrow |\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = \frac{a}{2 \sin A}$.

(2) O 为 $\triangle ABC$ 的重心 $\Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \mathbf{0}$.

(3) O 为 $\triangle ABC$ 的垂心 $\Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OC} \cdot \vec{OA}$.

(4) O 为 $\triangle ABC$ 的内心 $\Leftrightarrow a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC} = \mathbf{0}$.

回扣3 三角函数、三角恒等变换与解



1. 终边相同角的表示

所有与角 α 终边相同的角, 连同角 α 在内, 可构成一个集合 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 即任一与角 α 终边相同的角, 都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

2. 几种特殊位置的角的集合

(1) 终边在 x 轴非负半轴上的角的集合: $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

(2) 终边在 x 轴非正半轴上的角的集合: $\{\alpha | \alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

(3) 终边在 x 轴上的角的集合: $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

(4) 终边在 y 轴上的角的集合: $\{\alpha | \alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

(5) 终边在坐标轴上的角的集合: $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

3. 1 弧度的角

长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角, 用符号 rad 表示.

4. 角度制与弧度制的换算

(1) $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$.

(2) $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

5. 扇形的弧长和面积

在半径为 r 的圆中, 弧长为 l 的弧所对的圆心角为 $\alpha \text{ rad}$, 那么 $|\alpha| = \frac{l}{r}$.

相关公式: (1) $l = |\alpha|r$.

(2) $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2$.

6. 任意角的三角函数的定义

(1) 设 α 是一个任意角, $\alpha \in \mathbf{R}$, 它的终边 OP 与单位圆交于点 $P(x, y)$, 那么:

① 把点 P 的纵坐标 y 叫做 α 的正弦函数, 记作 $\sin \alpha$, 即 $y = \sin \alpha$.

② 把点 P 的横坐标 x 叫做 α 的余弦函数, 记作 $\cos \alpha$, 即 $x = \cos \alpha$.

③ 把点 P 的纵坐标与横坐标的比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切, 记作 $\tan \alpha$, 即 $\frac{y}{x} = \tan \alpha (x \neq 0)$.

(2) 设 α 是一个任意角, 点 $P(x, y)$ 为 α 终边上任一点, $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\sin \alpha = \frac{y}{|OP|}$, $\cos \alpha = \frac{x}{|OP|}$, $\tan \alpha = \frac{y}{x}$.

7. 同角三角函数的基本关系

(1)平方关系： $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.

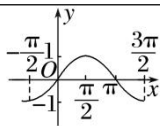
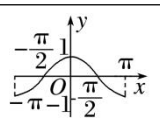
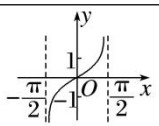
(2)商的关系：

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \quad (\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})).$$

8. 三角函数的诱导公式

公式	一	二	三	四	五	六
角	$2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$	$\pi+\alpha$	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$
正弦	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
余弦	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
正切	$\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\tan\alpha$		
口诀	函数名不变，符号看象限					

9. 三种三角函数的图象和性质

		正弦函数 $y = \sin x$	余弦函数 $y = \cos x$	正切函数 $y = \tan x$
图象				
定义域		\mathbf{R}	\mathbf{R}	$\{x x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})\}$
值域		$[-1, 1]$ (有界性)	$[-1, 1]$ (有界性)	\mathbf{R}
零点		$\{x x = k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$	$\{x x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$	$\{x x = k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
最小正周期		2π	2π	π
奇偶性		奇函数	偶函数	奇函数
单调性	增区间	$[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$	$[-\pi + 2k\pi, 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$	$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) (k \in \mathbf{Z})$
	减区间	$[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$	$[2k\pi, \pi + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$	
对称性	对称轴	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$	$x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$	
	对称中心	$(k\pi, 0) (k \in \mathbf{Z})$	$(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0) (k \in \mathbf{Z})$	$(\frac{k\pi}{2}, 0) (k \in \mathbf{Z})$

10. 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, A > 0$) 的图象

(1)“五点法”作图

设 $z = \omega x + \varphi$, 令 $z = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, 求出相应的 x 的值与 y 的值, 描点、连线可得.

(2)由三角函数的图象确定解析式时, 一般利用五点中的零点或最值点作为解题突破口.

(3)图象变换

$$y = \sin x \xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位长度}]{\text{向左 } \varphi > 0 \text{ 或向右 } \varphi < 0} y = \sin(x + \varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的 } \frac{1}{\omega} \quad \omega > 0 \text{ 倍}} y = \sin(\omega x + \varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的 } A \quad A > 0 \text{ 倍}} y = A \sin(\omega x + \varphi).$$

11. 三角恒等变换

$$(1) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta},$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

(2)二倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

$$(3) \text{降幂公式: } \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

(4)辅助角公式:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \quad \text{其中 } \tan \varphi = \frac{b}{a}.$$

12. 正弦定理及其变形

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R (2R \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 外接圆的直径}).$$

$$\text{变形: } a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C.$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}.$$

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C.$$

13. 余弦定理及其推论、变形

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

推论: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$,

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

变形: $b^2 + c^2 - a^2 = 2bccos A$,

$a^2 + c^2 - b^2 = 2accos B$,

$a^2 + b^2 - c^2 = 2abcos C$.

14. 面积公式

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$.

回扣4 数列



1. 牢记概念与公式

等差数列、等比数列(其中 $n \in \mathbf{N}^*$)

	等差数列	等比数列
通项公式	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 q^{n-1} (q \neq 0)$
前 n 项和公式	$S_n = \frac{n}{2} \frac{a_1 + a_n}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$	① $q \neq 1, S_n = \frac{a_1}{1-q} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$; ② $q = 1, S_n = na_1$

2. 活用定理与结论

(1) 等差、等比数列 $\{a_n\}$ 的常用性质

	等差数列	等比数列
性质	① 若 $m, n, p, q \in \mathbf{N}^*$, 且 $m+n=p+q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$; ② $a_n = a_m + (n-m)d$; ③ $S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}, \dots$ 仍成等差数列	① 若 $m, n, s, t \in \mathbf{N}^*$, 且 $m+n=s+t$, 则 $a_m \cdot a_n = a_s \cdot a_t$; ② $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$; ③ $S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}, \dots$ 仍成等比数列 ($S_m \neq 0$)

(2) 判断等差数列的常用方法

① 定义法

$a_{n+1} - a_n = d$ (常数) ($n \in \mathbf{N}^*$) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列;

② 通项公式法

$a_n = pn + q$ (p, q 为常数, $n \in \mathbf{N}^*$) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列;

③中项公式法

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$ 是等差数列;

④前 n 项和公式法

$S_n=An^2+Bn(A, B \text{ 为常数}, n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$ 是等差数列.

(3)判断等比数列的常用方法

①定义法

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(q \text{ 是不为 } 0 \text{ 的常数}, n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$ 是等比数列;

②通项公式法

$a_n=cq^n(c, q \text{ 均是不为 } 0 \text{ 的常数}, n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$ 是等比数列;

③中项公式法

$a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}(a_n\neq 0, n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$ 是等比数列.

3. 数列求和的常用方法

(1)等差数列或等比数列的求和, 直接利用公式求和.

(2)分组求和法: 分组求和法是解决通项公式可以写成 $c_n=a_n+b_n$ 形式的数列求和方法, 其中 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是等差(比)数列或一些可以直接求和的数列.

(3)通项公式形如 $a_n=\frac{c}{an+b_1}-\frac{c}{an+b_2}$ (其中 a, b_1, b_2, c 为常数)用裂项相消法求和.

裂项相消法常见形式:

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right),$$

$$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

$$\frac{2^n}{2^{n+1}-1}-\frac{1}{2^n-1}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

(4)形如 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的数列(其中 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列), 利用错位相减法求和.

(5)通项公式形如 $a_n=(-1)^n\cdot n$, $a_n=a\cdot(-1)^n$ 或 $a_n=(-1)^n(2n+1)$ (其中 a 为常数, $n\in\mathbf{N}^*$)等正负项交叉的数列求和一般用并项法. 并项时应注意分 n 为奇数、偶数两种情况讨论.

回扣 5 立体几何与空间向量



1. 混淆“点 A 在直线 a 上”与“直线 a 在平面 α 内”的数学符号关系, 应表示为 $A\in a, a\subset\alpha$.

2. 易混淆几何体的表面积与侧面积的区别, 几何体的表面积是几何体的侧面积与所有底面面积之和, 易

漏掉几何体的底面积；求锥体体积时，易漏掉体积公式中的系数 $\frac{1}{3}$.

3. 不清楚空间线面平行与垂直关系中的判定定理和性质定理，忽视判定定理和性质定理中的条件，导致判断出错. 如由 $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = l$, $m \perp l$, 易误得出 $m \perp \beta$ 的结论，就是因为忽视面面垂直的性质定理中 $m \subset \alpha$ 的限制条件.

4. 注意图形的翻折与展开前后变与不变的量以及位置关系. 对照前后图形，弄清楚变与不变的元素后，再立足于不变的元素的位置关系与数量关系去探求变化后的元素在空间中的位置关系与数量关系.

5. 几种角的范围

两条异面直线所成的角： $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ ；

直线与平面所成的角： $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ；

平面与平面夹角： $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

6. 用空间向量求角时易忽视向量的夹角与所求角之间的关系，如求直线与平面所成的角时，易把直线的方向向量与平面的法向量所成角的余弦值当成线面角的余弦值，导致出错.

回扣 6 概率与统计



1. 分类加法计数原理

完成一件事有两类不同方案，在第 1 类方案中有 m 种不同的方法，在第 2 类方案中有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m + n$ 种不同的方法.

2. 分步乘法计数原理

完成一件事需要两个步骤，做第 1 步有 m 种不同的方法，做第 2 步有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m \times n$ 种不同的方法.

3. 排列

(1)排列的定义：从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素，并按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

(2)排列数的定义：从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有不同排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示.

(3)排列数公式： $A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$.

(4)全排列：把 n 个不同元素全部取出的一个排列，叫做 n 个元素的一个全排列， $A_n^n = n(n-1)(n-2)\times\dots\times 3\times 2\times 1 = n!$. 排列数公式写成阶乘的形式为 $A_n^m = \frac{n!}{n-m!}$ ，这里规定 $0! = 1$.

4. 组合

(1)组合的定义：从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素作为一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

(2)组合数的定义：从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有不同组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示.

(3)组合数的计算公式： $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n!}{m! (n-m)!} = \frac{n}{m} \frac{n-1}{n-m} \frac{n-2}{n-m-1} \dots \frac{n-m+1}{n-m+1}$ ，由于 $0! = 1$ ，所以 $C_n^0 = 1$.

(4)组合数的性质：① $C_n^m = C_n^{n-m}$ ；② $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$.

5. 二项式定理

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

这个公式叫做二项式定理，右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式，其中各项的系数 $C_n^k (k=0,1,2, \dots, n)$ 叫做二项式系数. 式中的 $C_n^k a^{n-k} b^k$ 叫做二项展开式的通项，用 T_{k+1} 表示，即展开式的第 $k+1$ 项： $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

6. 二项式系数的性质

(1)对称性：与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等，即 $C_n^m = C_n^{n-m}$.

(2)增减性与最大值：二项式系数先增后减，中间一项或两项的二项式系数最大. 二项式系数为 C_n^k ，当 $k < \frac{n+1}{2}$

时， C_n^k 随 k 的增加而增大；由对称性知，当 $k > \frac{n+1}{2}$ 时， C_n^k 随 k 的增加而减小.

当 n 是偶数时，中间的一项 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 取得最大值；

当 n 是奇数时，中间的两项 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ 和 $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 相等，且同时取得最大值.

(3)各二项式系数的和

$(a+b)^n$ 的展开式的各二项式系数的和等于 2^n ，即 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n$.

二项展开式中，偶数项的二项式系数的和等于奇数项的二项式系数的和，即 $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$.

7. 概率的计算公式

(1)古典概型的概率计算公式

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的样本点个数}}{\text{样本空间包含的样本点个数}}.$$

(2)互斥事件的概率计算公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

(3)对立事件的概率计算公式

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

(4)条件概率公式

$$P(B|A) = \frac{P_{AB}}{P_A}.$$

(5)概率的乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

8. 统计中四个数据特征

(1)众数:

①在样本数据中, 出现次数最多的那个数据.

②频率分布直方图中, 众数是最高矩形的底边中点的横坐标.

(2)中位数: 在样本数据中, 将数据按从小到大(或从大到小)的顺序排列, 位于中间的那个数据. 如果数据的个数为偶数, 就取中间两个数据的平均数作为中位数.

(3)平均数: 样本数据的算术平均数,

$$\text{即 } \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

(4)方差与标准差: 反应样本数据的分散程度.

$$\text{方差: } s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2].$$

标准差:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]}$$

9. 离散型随机变量

(1)离散型随机变量的分布列的两个性质

① $p_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$; ② $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

(2)均值的性质

① $E(aX+b) = aE(X) + b$;

②若 $X \sim B(n, p)$, 则 $E(X) = np$;

③若 X 服从两点分布, 则 $E(X) = p$.

(4)方差公式

$$D(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + (x_2 - E(X))^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n, \text{ 标准差为 } \sqrt{D(X)}.$$

(5)方差的性质

① $D(aX+b) = a^2 D(X)$;

②若 $X \sim B(n, p)$, 则 $D(X) = np(1-p)$;

③若 X 服从两点分布, 则 $D(X) = p(1-p)$.

(6)独立事件同时发生的概率计算公式

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

(7) n 重伯努利试验的概率计算公式

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n.$$

10. 一元线性回归模型

(1)经验回归方程(经验回归函数或经验回归公式) $\hat{y} = bx + \hat{a}$ 一定过点 (\bar{x}, \bar{y}) ,
其中**错误!**

(2)样本相关系数 r 具有如下性质:

- ① $|r| \leq 1$;
- ② $|r|$ 越接近于 1, 成对样本数据的线性相关程度越强;
- ③ $|r|$ 越接近于 0, 成对样本数据的线性相关程度越弱.

11. 独立性检验

利用随机变量 $\chi^2 = \frac{n}{a+b} \frac{ad-bc}{c+d} \frac{ad-bc}{a+c} \frac{ad-bc}{b+d} (n=a+b+c+d)$ 的取值推断分类变量 X 和 Y 是否独立的方法称为 χ^2 独立性检验.

12. 正态分布

如果随机变量 X 服从正态分布, 则记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

满足正态分布的三个基本概率的值是

- (1) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$;
- (2) $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$;
- (3) $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

回扣 7 解析几何



1. 直线方程的五种形式

- (1)点斜式: $y - y_0 = k(x - x_0)$ (直线过点 $P_0(x_0, y_0)$, 且斜率为 k , 不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线).
- (2)斜截式: $y = kx + b$ (b 为直线 l 在 y 轴上的截距, 且斜率为 k , 不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线).
- (3)两点式: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ (直线过点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 且 $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, 不包括坐标轴和平行于坐标轴的直线).
- (4)截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (a, b 分别为直线的横、纵截距, 且 $a \neq 0$, $b \neq 0$, 不包括坐标轴、平行于坐标轴和过原点的直线).
- (5)一般式: $Ax + By + C = 0$ (其中 A, B 不同时为 0).

2. 直线的两种位置关系

(1)当不重合的两条直线 l_1 和 l_2 的斜率都存在时:

- ①两直线平行: $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.
- ②两直线垂直: $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$.

提醒 当一条直线的斜率为 0, 另一条直线的斜率不存在时, 两直线也垂直, 此种情形易忽略.

(2)直线方程一般式是 $Ax + By + C = 0$.

- ①若直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 则 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow A_1B_2 - B_1A_2 = 0$ 且 $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$.
- ②若直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 则 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

提醒 无论直线的斜率是否存在, 上式均成立, 所以此公式用起来更方便.

3. 三种距离公式

(1) 已知 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 两点间的距离

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

(2) 点到直线的距离 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (其中点 $P(x_0, y_0)$, 直线方程为 $Ax + By + C = 0 (A^2 + B^2 \neq 0)$).

(3) 两平行线间的距离 $d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (其中两平行线方程分别为 $l_1: Ax + By + C_1 = 0$, $l_2: Ax + By + C_2 = 0 (A^2 + B^2 \neq 0)$).

提醒 应用两平行线间距离公式时, 注意两平行线方程中 x, y 的系数应对应相等.

4. 圆的方程的两种形式

(1) 圆的标准方程: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

(2) 圆的一般方程: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 (D^2 + E^2 - 4F > 0)$.

5. 直线与圆、圆与圆的位置关系

(1) 直线与圆的位置关系: 相交、相切、相离.

(2) 弦长的求解方法

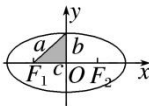
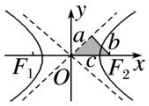
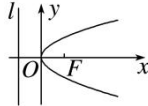
根据半径, 弦心距, 半弦长构成的直角三角形, 构成三者间的关系 $r^2 = d^2 + \frac{l^2}{4}$ (其中 l 为弦长, r 为圆的半径,

d 为圆心到直线的距离), 弦长 $l = 2\sqrt{r^2 - d^2}$.

(3) 圆与圆的位置关系: 相交、内切、外切、外离、内含.

(4) 当两圆相交时, 两圆方程相减即得公共弦所在直线方程.

6. 圆锥曲线的定义、标准方程与几何性质

名称		椭圆	双曲线	抛物线
定义		$ PF_1 + PF_2 = 2a (2a > F_1F_2)$	$ PF_1 - PF_2 = 2a (2a < F_1F_2)$	$ PF = PM $ 点 F 不在直线 l 上, $PM \perp l$ 交 l 于点 M
标准方程		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$	$y^2 = 2px (p > 0)$
图形				
几何性质	范围	$ x \leq a, y \leq b$	$ x \geq a$	$x \geq 0$
	顶点	$(\pm a, 0), (0, \pm b)$	$(\pm a, 0)$	$(0, 0)$
	对称性	关于 x 轴, y 轴和原点对称		关于 x 轴对称
	焦点	$(\pm c, 0)$		$(\frac{p}{2}, 0)$
	轴	长轴长 $2a$, 短轴长 $2b$	实轴长 $2a$, 虚轴长 $2b$	

	离心率	$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} (0 < e < 1)$	$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} (e > 1)$	$e = 1$
	准线			$x = -\frac{p}{2}$
	渐近线		$y = \pm \frac{b}{a}x$	

7. 直线与圆锥曲线的位置关系

判断方法：通过解直线方程与圆锥曲线方程联立得到的方程组进行判断.

弦长公式： $|AB| = \sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$,

或 $|AB| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1-y_2| (k \neq 0)$.

回扣 8 函数与导数



1. 函数的定义域和值域

(1) 求函数定义域的类型和相应方法

若已知函数的解析式，则函数的定义域是使解析式有意义的自变量的取值范围.

(2) 常见函数的值域

① 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的值域为 \mathbf{R} ;

② 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$: 当 $a > 0$ 时, 值域为 $[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty)$, 当 $a < 0$ 时, 值域为 $(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$;

③ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的值域为 $\{y \in \mathbf{R} | y \neq 0\}$.

2. 函数的奇偶性、周期性

(1) 奇偶性是函数在其定义域上的整体性质, 对于定义域内的任意 x (定义域关于原点对称), 都有 $f(-x) = -f(x)$ 成立, 则 $f(x)$ 为奇函数 (都有 $f(-x) = f(x)$ 成立, 则 $f(x)$ 为偶函数).

(2) 周期性是函数在其定义域上的整体性质, 一般地, 对于函数 $f(x)$, 如果对于定义域内的任意一个 x 的值, 若 $f(x+T) = f(x) (T \neq 0)$, 则 $f(x)$ 是周期函数, T 是它的一个周期.

3. 关于函数周期性、对称性的结论

(1) 函数的周期性

① 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = f(x-a)$, 则 $f(x)$ 为周期函数, $2a$ 是它的一个周期;

②若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = \frac{1}{f(x)}$, 则 $f(x)$ 为周期函数, $2a$ 是它的一个周期;

③若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为周期函数, $2a$ 是它的一个周期.

(2)函数图象的对称性

①若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b-x)$,

则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称.

②若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x) = -f(b-x)$,

则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a+b}{2}, 0)$ 对称.

4. 函数的单调性

函数的单调性是函数在其定义域上的局部性质.

(1)单调性的定义的等价形式: 设任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $x_1 \neq x_2$,

那么 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增;

$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减.

(2)若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是减函数, 则在公共定义域内, $f(x)+g(x)$ 是减函数; 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是增函数, 则在公共定义域内, $f(x)+g(x)$ 是增函数; 根据同增异减判断复合函数 $y=f(g(x))$ 的单调性.

5. 指数函数与对数函数的基本性质

(1)定点: $y=a^x (a>0, \text{ 且 } a \neq 1)$ 恒过 $(0,1)$ 点;

$y=\log_a x (a>0, \text{ 且 } a \neq 1)$ 恒过 $(1,0)$ 点.

(2)单调性: 当 $a>1$ 时, $y=a^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增; $y=\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $0<a<1$ 时, $y=a^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减; $y=\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

6. 函数的零点

(1)零点定义: 对于一般函数 $y=f(x)$, 我们把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)$ 的零点.

方程 $f(x)=0$ 有实数解 \Leftrightarrow 函数 $y=f(x)$ 有零点 \Leftrightarrow 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有公共点.

(2)确定函数零点的三种常用方法

①解方程判定法: 解方程 $f(x)=0$;

②零点存在定理法: 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是一条连续不断的曲线, 且有 $f(a)f(b)<0$, 那么, 函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内至少有一个零点, 即存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c)=0$, 这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的解.

③数形结合法: 尤其是方程两端对应的函数类型不同时多用此法求解.

7. 导数的几何意义

(1) $f'(x_0)$ 的几何意义: 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率, 该切线的方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0) \cdot (x-x_0)$.

(2)切点的两大特征: ①在曲线 $y=f(x)$ 上; ②在切线上.

8. 利用导数研究函数的单调性

(1)求可导函数单调区间的一般步骤

- ①求函数 $f(x)$ 的定义域;
- ②求导函数 $f'(x)$;
- ③由 $f'(x)>0$ 的解集确定函数 $f(x)$ 的单调递增区间, 由 $f'(x)<0$ 的解集确定函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

(2)由函数的单调性求参数的取值范围

- ①若可导函数 $f(x)$ 在区间 M 上单调递增, 则 $f'(x)\geq 0(x\in M)$ 恒成立; 若可导函数 $f(x)$ 在区间 M 上单调递减, 则 $f'(x)\leq 0(x\in M)$ 恒成立;
- ②若可导函数在某区间上存在单调递增(减)区间, $f'(x)>0$ (或 $f'(x)<0$) 在该区间上存在解集;
- ③若已知 $f(x)$ 在区间 I 上的单调性, 区间 I 中含有参数时, 可先求出 $f(x)$ 的单调区间, 则 I 是其单调区间的子集.

9. 利用导数研究函数的极值与最值

(1)求函数的极值的一般步骤

- ①确定函数的定义域;
- ②解方程 $f'(x)=0$;
- ③判断 $f'(x)$ 在方程 $f'(x)=0$ 的根 x_0 附近两侧的符号变化:
若左正右负, 则 x_0 为极大值点;
若左负右正, 则 x_0 为极小值点;
若不变号, 则 x_0 不是极值点.

(2)求函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最值的一般步骤

- ①求函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内的极值;
- ②比较函数 $y=f(x)$ 的各极值与端点处的函数值 $f(a), f(b)$ 的大小, 最大的一个是最大值, 最小的一个是最小值.

10. 常见的含有导数的几种不等式构造原函数类型

- (1)对于 $f'(x)\pm g'(x)>0$, 构造函数 $h(x)=f(x)\pm g(x)$.
- (2)对于 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$, 构造函数 $h(x)=f(x)g(x)$.
- (3)对于 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0$, 构造函数 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)} (g(x)\neq 0)$.

例如, 对于 $xf'(x)+f(x)>0$, 构造函数 $h(x)=xf(x)$,

对于 $xf'(x)-f(x)>0$, 构造函数 $h(x)=\frac{f(x)}{x}$

对于 $f(x)+f'(x)>0$, 构造函数 $h(x)=e^x f(x)$,

对于 $f(x)-f'(x)>0$, 构造函数 $h(x)=\frac{f(x)}{e^x}$