

目录

第一章 数列	1
1.1 等差与等比数列	1
1.1.1 等差数列	1
1.1.2 等比数列	4
1.1.3 差比混合型数列	7
1.1.4 中心对称函数与等差数列	8
1.2 通项公式求法	9
1.2.1 阶差法	10
1.2.2 累加累乘法	11
1.2.3 待定系数法	13
1.2.4 倒数法、对数变换法	16
1.2.5 隔项递推数列通项公式求法	18
1.3 数列求和	21
1.3.1 错位相减法	21
1.3.2 裂项相消法	23
1.3.3 待定系数法裂项	29
1.3.4 区分奇偶项的求和	30
1.3.5 变号数列的绝对值求和	32
1.3.6 类周期数列求和	33
1.4 互嵌式数列组的解题策略	34
1.5 利用“整除”思想求解数列中“不定方程”	37
1.6 数列放缩	39
1.6.1 伪等比变等比	39
1.6.2 二次函数型裂项	40
1.6.3 利用平均不等式放缩	41
第二章 向量	42
2.1 重心质量法	42
2.2 向量的线性运算	44
2.3 平面向量共线定理	46
2.4 追本溯源, 等和线解向量	48

2.5	对面的女孩看过来	51
2.6	向量恒等式	53
2.6.1	平行四边形恒等式	53
2.6.2	极化恒等式	53
2.6.3	矩形的两个小性质	57
2.7	四边形对角线向量定理 (斯坦纳定理)	58
2.8	向量的形	60
2.9	三角形的心	63
2.10	向量投影	68
第三章	圆锥曲线	71
3.1	预备知识	71
3.2	圆	71
3.2.1	圆到直线距离相等点	71
3.2.2	阿波罗尼斯圆	72
3.2.3	同构之两圆方程之差	76
3.3	椭圆直线联立	77
3.4	焦半径与焦三角形	78
3.4.1	焦三角形的心	79
3.4.2	焦三角形角平分线	81
3.4.3	焦三角形求离心率	83
3.4.4	椭圆双曲线共焦点	90
3.4.5	椭圆第二定义	92
3.4.6	原曲焦点弦	93
3.5	准点弦	101
3.6	点差法	102
3.6.1	中心弦	102
3.6.2	非对称韦达	106
3.6.3	中点弦	111
3.6.4	圆曲中的 8 字	116
3.7	定点定值	118
3.7.1	直角引定点	118
3.7.2	两垂直弦中点连线过定点	119
3.7.3	两斜率互为相反数	121
3.7.4	和双曲线渐近线有关的定值	123
3.7.5	抛物线的弦引发的结论	132
3.7.6	抛物线几何平均	133
3.7.7	中心张直角两半弦	135
3.7.8	椭圆中有趣的六个定值	138
3.7.9	伴侣点	142

3.7.10 抛物线性质归纳	146
3.8 两点距离公式见奇效	147
3.9 曲线系与蝴蝶	152
3.10 面积最值	157
3.11 圆锥曲线中的向量	160
3.11.1 共线型	160
3.11.2 线性组合型	162
3.12 二次曲线的切线	163
3.12.1 切线方程	163
3.12.2 求出切点	166
3.12.3 阿基米德三角形	168
3.13 同构原理构造一元二次方程	174
3.13.1 双切线及蒙日圆	174
3.13.2 蒙日圆即伴随圆	176
3.13.3 双斜率	177
3.13.4 双定比	180
3.13.5 “同构法”处理与圆的切线有关的一类问题	183
3.14 圆曲中的外接圆方程	187
第四章 立体几何	189
4.1 正方体中的截面问题	189
4.2 翻折问题的探究	192
4.3 动点位置关系	196
4.3.1 平行关系	196
4.3.2 垂直关系	197
4.4 几何体的外接、内切球	201
4.4.1 几何体外接球	201
4.4.2 过球内一点截面圆面积的最值	213
4.4.3 外接球估算	214
4.5 异面直线的夹角	216
4.6 动态求解一组变式立体几何题	220
4.7 三余弦、三正弦定理	222
4.8 直棱柱截取后几何体体积	224
4.9 共面向量定理处理截面	226
第五章 三角函数	228
5.1 万能公式	228
5.2 和差化积公式	229
5.3 换元求值	231
5.4 活用导数解三角函数	231

5.5	简单的平移	232
5.6	单调性与 ω 的关系	234
5.7	线性正余弦函数	236
第六章	解三角形	237
6.1	三角形解的个数	237
6.2	常考性质	237
6.3	面积周长最值	240
6.4	线段比中构造相似	243
6.5	三角形中的二倍角	245
6.6	三角形中的等差等比	247
6.7	三角形著名定理	248
6.8	奔驰形状找正弦	252
6.9	边长比值	253
6.10	四边形的四边确定, 求面积最值	254
第七章	函数	256
7.1	函数的基本性质	256
7.1.1	奇偶性	256
7.1.2	周期性与对称性	262
7.1.3	抽象函数找原型	269
7.2	比较大小	270
7.3	热点函数图象	271
7.3.1	一比一型函数图象	271
7.3.2	对勾函数图象	272
7.3.3	一些超越函数的图象	273
7.4	三次函数	276
7.4.1	三次函数的单调性	277
7.4.2	三次函数的切线	278
7.4.3	三次函数的对称	280
7.4.4	三次方程中的韦达定理	281
7.5	讨论含参函数单调性	281
7.6	两曲线公切线	282
7.7	巧“变”洛必达	285
7.8	双变量处理策略	287
7.8.1	A-L-G 不等式	287
7.8.2	极值点偏移	292
7.8.3	“切割线夹”秒解零点差	294
7.9	同构换元秒解导数题	297
7.9.1	反函数	297

7.9.2 同构换元解导数题	299
7.10 不等式链	301
7.10.1 子依母怀	301
7.10.2 换汤不换药	302
7.11 泰勒展开	304
7.12 经典正弦不等式	305
7.13 导数零点问题	306
7.13.1 指数函数与分式函数乘积	306
7.13.2 虚设零点	308
7.13.3 含三角的导数问题	310
7.13.4 超越函数零点区间的找点策略	314
7.14 母不等式与数列求和	318
7.14.1 不等式短边为数字	318
7.14.2 不等式短边含 n	320
7.15 高考导数试题命制背景	323
7.15.1 化曲为直命制背景	323
7.15.2 嵌入不等式命制背景	325
第八章 排列组合与概率	328
8.1 排列组合方程组解法	328
8.2 环排涂色问题	329
8.3 相同元素有序分组的“隔板式”方法	332
8.4 比赛问题	332
8.5 映射问题	333
8.5.1 映射	333
8.5.2 单射	333
8.5.3 满射	334
8.6 灵活分组求概率	334
8.7 概率问题“浓度”法	335
8.8 混合方差	335
8.9 方差和期望的关系	337
第九章 不等式	338
9.1 基本不等式	338
9.2 权方和不等式	339
9.3 构造平方差求二元最值	340
9.4 糖水不等式	341
第十章 高中数学二级结论	342
第十一章 变式训练参考答案	344

第十二章 变式训练答案速递	394
---------------	-----

第一章 数列

1.1 等差与等比数列

1.1.1 等差数列

等差数列性质

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是关于 n 的一次函数, 并且一次项系数就是公差.
2. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式是关于 n 的无常数项的二次函数, 并且二次项系数为公差的 $\frac{1}{2}$.
3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = na_{\frac{n+1}{2}}$;
4. 数列 $\frac{S_1}{1}, \frac{S_2}{2}, \frac{S_3}{3}, \dots, \frac{S_n}{n}$ 亦为等差数列, 公差为 $\frac{d}{2}$, (原等差数列公差的一半).
5. 若 $a_m = n, a_n = m(m \neq n)$, 则 $a_{m+n} = 0$.
6. 若 $a_m = \frac{1}{n}, a_n = \frac{1}{m}(m \neq n)$, 则 $a_{m+n} = 1$.
7. 若 $S_m = S_n(m \neq n)$, 则 $S_{m+n} = 0$.
8. 若 $S_m = n, S_n = m(m \neq n)$, 则 $S_{m+n} = -(m+n)$.
9. $\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$, 其中 S_n, T_n 为等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和.
10. 若等差数列 $\{a_n\}$ 有 $2n$ 项, 则 $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd$.
11. 若等差数列 $\{a_n\}$ 有 $2n-1$ 项, 则 $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n}{n-1}$.
12. 等差数列求前 n 项和取最值时对应的 n 值, 若利用二次函数的对称轴求法, 对称轴靠近那个整数, n 的值就取这个整数; 对称轴恰好在两个整数中间, 则 n 的值就取这两个整数.

证 逐个证明

1. $a_n = a_1 + (n-1)d = nd + a_1 - d$;
2. $S_n = a_1 n + \frac{n(n-1)d}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$;

$$3. S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = na_{\frac{n+1}{2}};$$

4. 由 2 可得;

$$5. \text{若 } a_m = n, a_n = m(m \neq n), \text{ 则 } a_{m+n} = a_m + (m+n-m) \cdot \frac{m-n}{n-m} = n - n = 0;$$

$$6. \text{若 } S_m = S_n(m < n), \text{ 则 } 0 = S_n - S_m = a_{m+1} + \cdots + a_n \Rightarrow a_{\frac{m+n+1}{2}} = 0, \text{ 于是 } S_{m+n} = (m+n)a_{\frac{m+n+1}{2}} = 0;$$

$$7. \text{由 4 可知 } \left\{ \frac{S_n}{n} \right\} \text{ 亦为等差数列, } \frac{S_m}{m} = \frac{n}{m}, \frac{S_n}{n} = \frac{m}{n}, \text{ 所以数列 } \left\{ \frac{S_n}{n} \right\} \text{ 的公差为 } d = \frac{\frac{m}{n} - \frac{n}{m}}{n-m} = -\frac{m+n}{mn}, \text{ 于是 } \frac{S_{m+n}}{m+n} = \frac{S_n}{n} + (m+n-n)d = \frac{m}{n} - \frac{m+n}{n} = -1, \text{ 故 } S_{m+n} = -(m+n).$$

$$8. \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{(2n-1)a_n}{(2n-1)b_n} = \frac{a_n}{b_n};$$

$$9. \text{若数列 } \{a_n\} \text{ 有 } 2n \text{ 项, 则 } S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} - (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) = (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n-1}) = nd;$$

$$10. \text{若数列 } \{a_n\} \text{ 有 } 2n-1 \text{ 项, 则 } \frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-2}} = \frac{na_n}{(n-1)a_n} = \frac{n}{n-1}.$$

例 1.1 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 前 n 项和为 S_n , $S_9 > 0$, $S_{10} < 0$, 则当 $n = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 时, S_n 最大.

解 设二次函数与 x 轴的另一个交点为 $(a, 0)$, 则 $a \in (9, 10)$, 所以对称轴为 $x = \frac{a}{2} \in (4.5, 5)$, 离 5 较近, 因此当 $n = 5$ 时, S_n 最大.

例 1.2 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d \neq 0)$, 前 n 项和为 S_n , 若数列 $\{\sqrt{S_n + n}\}$ 也为公差为 d 的等差数列, 则 $d = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

解 若数列 $\{\sqrt{S_n + n}\}$ 也为公差为 d 的等差数列, 则 $\sqrt{S_n + n}$ 一定是一个关于 n 的正比例函数, 否则无法开根号, 由等差数列前 n 项和性质可知 $\sqrt{\frac{d}{2}} = d \Rightarrow d = \frac{1}{2}$.

例 1.3 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d \neq 0)$, 前 n 项和为 S_n , 若数列 $\{\sqrt{8S_n + 2n}\}$ 也是公差为 d 的等差数列, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

解 若数列 $\{\sqrt{8S_n + 2n}\}$ 是公差为 d 的等差数列, 那么 $\sqrt{8S_n + 2n}$ 一定是一个关于 n 的正比例函数, 否则无法开根号, 所以 $\sqrt{8 \times \frac{d}{2}} = d \Rightarrow d = 4$. 又根据 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ 可知 $a_1 = \frac{7}{4}$, 因此 $a_n = 4n - \frac{9}{4}$.

变式训练 EXERCISES

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_9 = 3a_5$, 则一定成立的是 ()
- (A) $S_4 = S_6$ (B) $S_4 = S_5$ (C) $S_5 = S_7$ (D) $S_5 = S_6$
2. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_3 = 5$, $\frac{S_4}{S_2} = 4$, 则 $a_{10} =$ ()
- (A) 9 (B) 11 (C) 19 (D) 21
3. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $\frac{a_2 + 2a_7 + a_8}{a_3 + a_6} = \frac{20}{11}$, 则 $\frac{S_{11}}{S_8} =$ ()
- (A) $\frac{3}{7}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{5}{11}$ (D) $\frac{5}{4}$
4. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_4 = 5$, $S_9 = 81$, 则 $a_{10} =$ ()
- (A) 23 (B) 25 (C) 28 (D) 29
5. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项的和等于前 4 项的和, 且 $a_1 = 1$, 则 $a_4 =$, ()
- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2
6. 【2019 全国 I 文理】记 S_n 为等差数列的前 n 项和, 已知 $S_4 = 0$, $a_5 = 5$, 则 ()
- (A) $a_n = 2n - 5$ (B) $a_n = 3n - 10$ (C) $S_n = 2n^2 - 8n$ (D) $S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$
7. 【2019 全国 III 理】记 S_n 为等差数列前 n 项和, 若 $a_1 \neq 0$, $a_2 = 3a_1$, 则 $\frac{S_{10}}{S_5} = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.
8. 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 21$, 且满足 $(2n - 5)a_{n+1} = (2n - 3)a_n + 4n^2 - 16n + 15$, 则 $\{a_n\}$ 的最小的一项是 ()
- (A) a_5 (B) a_6 (C) a_7 (D) a_8
9. 记 S_n 为等差数列前 n 项和, 若 $a_3 = 3$, $S_4 = 11$, 则 $S_7 = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.
10. 记 S_n 为等差数列前 n 项和, 若 $d \neq 0$, $S_6 = 90$, a_7 是 a_3 与 a_9 的等比中项, 则下列选项正确的是 ()
- (A) $a_1 = 22$ (B) $d = -2$
(C) 当 $n = 10$ 或 $n = 11$ 时, S_n 取得最大值 (D) 当 $S_n > 0$ 时, n 的最大值为 20
11. 设等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, 公差 $d \in (0, 10)$, S_n 为其前 n 项和, 若数列 $\{\sqrt{S_n + 1}\}$ 也是等差数列, 则 $\frac{S_n + 10}{a_n + 1}$ 的最小值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.
12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1^2 + a_5^2 = 8$, 则 $a_1 + a_5$ 的最大值为 ()
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 21$, $(2n-5)a_{n+1} = (2n-3)a_n + 4n^2 - 16n + 15\sqrt{a_n+2} + 9$, 则 a_n 的最小的一项是 ()
- (A) a_5 (B) a_6 (C) a_7 (D) a_8
14. 已知单调递增数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0$, $(a_{n+1} + a_n - 1)^2 = 4a_{n+1} \cdot a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_n = \underline{\hspace{1cm}}$.
15. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 \neq 0$, $2020 \cdot a_{2019} = 2019 \cdot a_{2020}$, S_n 表示 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $\frac{S_{2019}}{S_{2020}} = \underline{\hspace{1cm}}$.
16. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n \neq 0$, 若 $a_5 = 3a_3$, 则 $\frac{S_5}{S_9} =$ ()
- (A) $\frac{5}{9}$ (B) $\frac{9}{5}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{5}{27}$
17. 记 S_n 为递增等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若数列 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 也为等差数列, 则 $\frac{S_3}{a_3} =$ ()
- (A) 3 (B) 2 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 1
18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 1$, 函数 $f(x) = x^3 + a_{n+1} - a_n - \cos \frac{n\pi}{3}$ 为奇函数, 则 $S_{2020} =$ ()
- (A) $\frac{2023}{2}$ (B) 1011 (C) 1008 (D) 336
19. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_9 = 54$, 且 $a_3 = 2$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 证明: $\sqrt{\frac{1}{a_1+3}} + \sqrt{\frac{1}{a_2+3}} + \sqrt{\frac{1}{a_3+3}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{a_{100}+3}} > 13$.
20. 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_{2018} < S_{2020} < S_{2019}$, 设 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$, 则数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n 取最大值时 n 的值为 ()
- (A) 2020 (B) 2019 (C) 2018 (D) 2017

1.1.2 等比数列

常考性质

公比不为 1 时

1. 等比数列前 n 项和 $S_n = Aq^n - A$.

2. 等比数列前 n 项和 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, 前 $2n$ 项和 $S_{2n} = \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$, 则 $\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$.

3. 等比数列前 n 项和 S_n 与通项公式 a_n 成线性关系 (充要)

$$S_n = \frac{q}{q-1}a_n - \frac{a_1}{q-1} = \frac{1}{q-1}a_{n+1} - \frac{a_1}{q-1} \left(\frac{a_1}{q-1} \neq 0 \right)$$

例 1.4 等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = 2^{2n+1} + t$, 则 $t = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 $S_n = 2^{2n+1} + t = 2 \cdot 4^n + t \Rightarrow t = -2$.

例 1.5 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3^n + a$, (a 为常数), 则数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和为 $S_n = (\quad)$

- (A) $\frac{1}{2}(9^n - 1)$ (B) $\frac{1}{4}(9^n - 1)$ (C) $\frac{1}{8}(9^n + a)$ (D) $\frac{3+a}{8}(9^n - 1)$

解 依题意可知 $a = -1$, 故 $S_n = 3^n - 1$, 所以等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, 于是 $a_1^2 = 4$, 选 A.

变式训练 EXERCISES

21. 【2020 全国 II 理】 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{m+n} = a_m a_n$, 若 $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+10} = 2^{15} - 2^5$, 则 k 的值为 $(\quad)$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

22. 【2020 全国 I 文】 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 4$, $a_3 - a_1 = 8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为数列 $\{\log_3 a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_m + S_{m+1} = S_{m+3}$, 求 m .

23. 【2020 全国新高考 I】 已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20$, $a_3 = 8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0, m](m \in \mathbf{N}^*)$ 中的项的个数, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 100 项和 S_{100} .

24. 记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_n = \frac{S_n}{2} - 1$, 则 $S_7 = \underline{\hspace{1cm}}$.

25. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3(a_n + 1)$, 若 $a_{10} = ka_8$, 则 $k = \underline{\hspace{1cm}}$.

26. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = a \cdot 4^{n-1} + b (a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R})$, 则 $\frac{b}{a} = \underline{\hspace{1cm}}$.

27. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_n a_{n+1} = 9^n$, 则该数列的公比是 $(\quad)$

- (A) -3 (B) 3 (C) ± 3 (D) 9

28. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $a_n + a_{n+1} = 4 \times 3^{n-1}$, 则 $S_{2020} = \underline{\hspace{1cm}}$.
29. 等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 则 “ $a_1 < 0$ ” 是 “ $S_{2021} < 0$ ” 的 ()
- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
30. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $\frac{S_6}{S_3} = 6$, 则 $\frac{S_9}{S_6} =$ ()
- (A) $\frac{11}{6}$ (B) $\frac{31}{6}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) 3
31. 【2018 全国 I】 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n = 2a_n + 1$, 则 $S_6 = \underline{\hspace{1cm}}$.
32. 公比不为零的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 下列说法正确的是 ()
- (A) 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则 $a_1 < 0$, $q < 0$ (B) 若 $\{a_n\}$ 是递减数列, 则 $a_1 > 0$, $0 < q < 1$
(C) 若 $q > 0$, 则 $S_4 + S_6 > 2S_5$ (D) 若 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 则 $\{b_n\}$ 为等比数列
33. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 a_{11} + 2a_5 a_9 + a_3 a_{13} = 25$, 则 $a_1 a_{13}$ 的最大值是 ()
- (A) 25 (B) $\frac{25}{4}$ (C) 5 (D) $\frac{2}{5}$
34. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n , T_n , $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, 且 $a_{n+1} = a_1 + 2T_n$.
- (1) 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 求 S_n ;
(2) 若 $b_{n+1} = b_1 + 2S_n$, 证明: 数列 $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_n - b_n\}$ 均为等比数列.
35. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7 = a_6 + 2a_5$, 若存在两项 a_m, a_n , 使得 $\sqrt{a_m a_n} = 4a_1$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n}$ 的最小值为, ()
- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{25}{6}$ (D) 不存在
36. 已知在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 a_2 a_3 = 1$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{7}{2}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $\underline{\hspace{1cm}}$.
37. 【多选】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 其前 n 项和为 S_n , 其前 n 项积为 T_n , 并满足条件 $a_1 > 1$, $a_{2019} a_{2020} > 1$, $\frac{a_{2019} - 1}{a_{2020} - 1} < 0$, 下列结论正确的是 ()
- (A) $S_{2019} < S_{2020}$ (B) $a_{2019} a_{2021} - 1 < 0$
(C) T_{2020} 是数列 $\{T_n\}$ 中的最大值 (D) 数列 $\{T_n\}$ 无最大值

例 1.6 【2021 甲卷】等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 设甲: $q > 0$, 乙: $\{S_n\}$ 是递增数列, 则 ()

- (A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件

- (B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件
 (C) 甲是乙的充要条件
 (D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

解 $a_1 = -1$, $q = 2$ 时, $\{S_n\}$ 是递减数列, 充分性不成立,
 若 $\{S_n\}$ 是递增数列, 则 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n > 0$, 可以推出 $q > 0$, 故选 A.

1.1.3 差比混合型数列

等比性质

等差含等比: 利用等比性质: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$.

例 1.7 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为零, 首项 $a_1 = 1$, a_2 是 a_1 和 a_5 的等比中项, 则 $S_{10} = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

解 由比例的等比性质可知 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_5}{a_2} = \frac{a_5 - a_2}{a_2 - a_1} = \frac{3d}{d} = 3$, 所以 $a_2 = 3a_1 = 3$, 于是 $a_n = 2n - 1$, 可得 $S_n = n^2$, 所以 $S_{10} = 100$.

例 1.8 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 若 a_2, a_4, a_8 成等比数列, 则 $S_n =$ ()

- (A) $n(n+1)$ (B) $n(n-1)$ (C) $\frac{n(n+1)}{2}$ (D) $\frac{n(n-1)}{2}$

解 由比例的等比性质可知 $\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_8}{a_4} = \frac{a_8 - a_4}{a_4 - a_2} = \frac{4d}{2d} = 2$, 所以 $a_4 = 2a_2$, 又 $a_4 = a_2 + 4$, 所以 $a_2 = 4$, 于是 $a_n = 2n$, 可得 $S_n = n(n+1)$, 故选 A.

变式训练 EXERCISES

38. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 5, 公差为零, 且 a_2, a_4, a_5 成等比数列, 则 $a_{2020} =$ ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) -2014

39. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 4$, 公差 $d > 0$, a_4 是 a_2 与 a_8 的等比中项.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 求数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

40. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为零, 且 a_2, a_3, a_9 成等比数列, 则 $\frac{a_2 + a_3 + a_4}{a_4 + a_5 + a_6} =$ ()

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{3}{5}$

41. 在公差大于 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $2a_7 - a_{13} = 1$, 且 $a_1, a_3 - 1, a_6 + 5$ 成等比数列, 则数列 $\{(-1)^{n-1}a_n\}$ 的前 21 项和为 ▲ .

例 1.9 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^n$, 等差数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 4n + 3$. 将数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项, 按它们在原数列中的先后顺序排成一新数列 $\{c_n\}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式.

分析 求等差数列与等比数列的公共项, 可以将等比数列通项中的底数写成等差数列公差的整数倍与一常数 (小于公差) 的和与差, 用二项式定理展开, 根据整数的性质得到相应字母所满足的条件.

解 设 $3^k = 4m + 3$ ($k, m \in \mathbf{N}^*$), 即 $(4 - 1)^k = 4m + 3$, 用二项式定理展开得

$$C_k^0 \cdot 4^k - C_k^1 \cdot 4^{k-1} + \cdots + C_k^{k-1} \cdot 4 \cdot (-1)^{k-1} + (-1)^k = 4(m+1) - 1$$

结合等式左右两边的形式知 k 必为奇数, 而 $4(m+1) - 1 \geq 7$, 则 k 的最小值为 3, 故 $c_n = 3^{2n+1}$.

例 1.10 设 $\{a_n\}$ 是公比大于 1 的等比数列, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_3 = 7$, 且 $a_1 + 3, 3a_2, a_3 + 4$ 构成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3n - 1$. 令集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$, $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$, 将集合 $A \cup B$ 中的元素按从小到大的顺序排列构成数列记为 $\{c_n\}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 45 项的和 T_{45} .

解 (1) $a_n = 2^{n-1}$;

(2) 易知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项组成的数列 $\{d_n\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 的偶数项, 因此数列 $\{c_n\}$ 的项就是将 $\{b_n\}$ 中的项按顺序排列好后, 将 $\{a_n\}$ 中奇数项按大小插入即可.

由于 $b_{41} = 122$, $a_1 = 1$, $a_3 = 4$, $a_5 = 16$, $a_7 = 64$, $a_9 = 256 > 122$, 故数列 $\{c_n\}$ 的前 45 项是由 $\{b_n\}$ 前 41 项与 $\{a_n\}$ 中奇数项 a_1, a_3, a_5, a_7 构成, 所以 $T_{45} = \frac{41(2 + 122)}{2} + 85 = 2627$.

1.1.4 中心对称函数与等差数列

中心对称函数与等差数列

已知中心对称函数 $f(x)$ 的对称中心为 (h, k) , 且 $f(x)$ 为单调函数, 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列,

若 $f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \cdots + f(a_n) = nk$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = nh$.

例 1.11 设函数 $f(x) = (x-3)^3 + x - 1$, $\{a_n\}$ 为公差不为零的等差数列, $f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \cdots + f(a_7) = 14$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 =$ ▲ .

解 易知 $f(x) = (x-3)^3 + (x-3) + 2$, 所以对称中心为 $(3, 2)$, 由 $f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \cdots + f(a_7) = 14 = 7 \times 2$ 可知 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 = 7 \times 3 = 21$.

例 1.12 设函数 $f(x) = \sin x + \tan x$, 项数为 27 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 且公差 d 不为零, 若 $f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \cdots + f(a_{27}) = 0$, 则当 $k = \underline{\quad\quad}$ 时, $f(a_k) = 0$.

解 易知 $f(x)$ 的对称中心为 $(0, 0)$, 所以 $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{27}) = 0$, 可知

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{27} = 0 \Rightarrow a_{14} = 0$$

例 1.13 设函数 $f(x) = e^{-x} - e^x$, 若函数 $h(x) = f(x-4) + x$, 则函数 $h(x)$ 的图象的对称中心为 $\underline{\quad\quad}$; 若数列 $\{a_n\}$ 为公差不为零的等差数列, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{11} = 44$, 则 $h(a_1) + h(a_2) + h(a_3) + \cdots + h(a_{11}) = \underline{\quad\quad}$.

解 函数 $h(x)$ 的图象的对称中心为 $(4, 4)$, $h(a_1) + h(a_2) + h(a_3) + \cdots + h(a_{11}) = 4 \times 11 = 44$.

变式训练 EXERCISES

- 42.** 设函数 $f(x) = 2x - \cos x$, $\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{\pi}{8}$ 的等差数列, 若 $f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \cdots + f(a_5) = 5\pi$, 则 $[f(a_3)]^2 - a_1 a_5 =$ ()
- (A) 0 (B) $\frac{1}{16}\pi^2$ (C) $\frac{1}{8}\pi^2$ (D) $\frac{13}{16}\pi^2$

- 43.** 设函数 $f(x) = \sin 2x + 2\cos^2 x$, 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{11} = \frac{3\pi}{8}$, 记 $b_n = f(a_n)$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 21 项和为 $\underline{\quad\quad}$.

- 44.** 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -\frac{1}{2} + 2a_n$, 设 $f(x) = e^x - e^{2-x} + 1$, 则 $f(\log_2 a_1) + f(\log_2 a_2) + \cdots + f(\log_2 a_7)$ 的值等于 ()
- (A) 0 (B) 1 (C) 7 (D) 14

1.2 通项公式求法

数列通项公式是数列的核心, 如同函数的解析式, 因此, 求数列的通项公式往往是解题的突破口、关键点. 总结: 数列通项公式的求法见下表

数列通项公式的求法			
已知前几项	观察法	形如 $a_{n+1} = p \cdot a_n + f(n)$ 的递推式	待定系数法
已知前 n 项和 S_n	阶差法	形如 $a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n + p}$ 的递推式	取倒法
$a_{n+1} = a_n + f(n)$	累加法	$a_{n+1} = A \cdot a_n + B \cdot C^n$ $a_{n+1} = p \cdot a_n + qa_{n-1}a_n$	相除法
$a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$	累乘法	$a_{n+1} = p \cdot a_n^r$	对数法

1.2.1 阶差法

阶差法

S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 把已知关系通过 $a_n = \begin{cases} S_1, & n=1 \\ S_n - S_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$ 转化为 a_n 或 S_n 的递推关系.

例 1.14 已知正项数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 是其前 n 项和, 并且 $S_n = \frac{1}{4}(a_n + 1)^2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 当 $n=1$ 时, $4a_1 = (a_1 + 1)^2 \Rightarrow a_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, $\begin{cases} S_n = \frac{1}{4}(a_n + 1)^2 \\ S_{n-1} = \frac{1}{4}(a_{n-1} + 1)^2 \end{cases}$ 两式做差得 $a_n - a_{n-1} = 2$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列. 故 $a_n = 2n - 1$.

例 1.15 【多选】已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且 $\forall n > 1$, 其前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1} + S_{n-1} = 2(S_n + 1)$, 则 ()

(A) $a_7 = 13$ (B) $a_8 = 14$ (C) $S_7 = 43$ (D) $S_8 = 64$

解 由 $S_{n+1} + S_{n-1} = 2(S_n + 1)$, 得 $a_{n+1} - a_n = 2(n \geq 2)$, 又因为 $a_2 - a_1 = 1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 从第二项起为等差数列, 且公差 $d = 2$, 于是 $a_7 = 12, a_8 = 14$, 所以 A $\times$; B $\checkmark$;

又 $S_7 = 43, S_8 = 57$, 所以 C $\checkmark$; D $\times$.

变式训练 EXERCISES

45. 【2020 江苏】设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 已知 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - n + 2^n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $d + q$ 的值是 .

46. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 + 3a_2 + \cdots + 3^{n-1}a_n = n$, 则 $S_4 =$.

47. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = 2a_n - 2$, 若存在两项 a_m, a_n , 使得 $a_m \cdot a_n = 64$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{16}{n}$ 的最小值为 ()

(A) $\frac{25}{6}$

(B) $\frac{21}{5}$

(C) $\frac{9}{2}$

(D) $\frac{17}{3}$

48. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 是其前 n 项和, 并且 $2\sqrt{S_n} = a_n + 1$, 则数列 $\{a_n - 7\}$ 的前 n 项和 T_n 的最小值为 ()

(A) $-\frac{49}{4}$

(B) $-\frac{7}{2}$

(C) $\frac{7}{2}$

(D) -12

49. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 是其前 n 项和, 并且 $S_n + S_{n+1} = 2n^2 + 3n$, 若 $a_n < a_{n+1}$, 则首项 a_1 的取值范围是 .

50. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 4a_2 + 7a_3 + \cdots + (3n-2)a_n = (n-1)4^{n+1} + 2$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 且 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则使方程 $\frac{3}{2}(S_n - 16) = 2019$ 成立的所有正整数 n 的集合是 .

51. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = 2^n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_n =$, 若存在 $n \in \mathbf{N}^*$ 使得 $a_n \leq \frac{n+1}{n} \cdot \lambda$ 成立, 则实数 λ 的最小值为 .

1.2.2 累加累乘法

累加法

形如 $a_{n+1} - a_n = f(n)$ 的递推公式. 这是广义的等差数列.

例 1.16 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 3n + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_1 = 2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 由 $a_{n+1} - a_n = 3n + 2 \Rightarrow a_{n+1} = a_1 + \sum_{i=1}^n (3i + 2) = 2 + \frac{n(3n+7)}{2}$, 所以 $a_n = \frac{3n^2 + n}{2}$.

例 1.17 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n^2 + n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_1 = \frac{1}{2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 根据题意, $a_{n+1} = a_1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2 + i} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2 + i}$, 又根据裂项相消法 (详见本书 23 页第

1.3.2 节), $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2 + i} = 1 - \frac{1}{n+1}$, 所以 $a_{n+1} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$.

变式训练 EXERCISES

52. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + 2n (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_1 = 32$, 则 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值为 ()

(A) $8\sqrt{2} - 1$

(B) $\frac{52}{5}$

(C) $\frac{31}{3}$

(D) 10

53. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$, 且 $a_1 = 2$, 则 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$ 的值为 ()

(A) $\frac{19}{10}$

(B) $\frac{19}{20}$

(C) $\frac{10}{21}$

(D) $\frac{20}{21}$

54. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + 2 \times 3^n + 1$, 且 $a_1 = 3$, 则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

55. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公比为 2, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n + 2$.

(1) 证明数列 $\{b_{n+1} - b_n\}$ 为等差数列, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 的最大项.

累乘法

形如 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$ 的递推公式, 这是广义的等比数列.

例 1.18 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n}$, 且 $a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 由分母减去分子 (大减小) 除以 n 的系数得 $\frac{(n+2)-n}{1} = 2$, 可知 $\frac{a_{n+1}}{a_1} = \frac{(n+2)(n+1)}{1 \times 2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

例 1.19 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 满足 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_n a_{n+1} = 0$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 对式子 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_n a_{n+1} = 0$ 十字相乘可得 $[(n+1)a_{n+1} - na_n](a_{n+1} + a_n) = 0$, 解得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$,

由分母减去分子 (大减小) 除以 n 的系数得 $\frac{(n+1)-n}{1} = 1$, 可知 $\frac{a_{n+1}}{a_1} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}$.

变式训练 EXERCISES

56. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n}\right)a_n$, 且 $a_1 = 2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

57. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$, 且 $a_1 = 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

58. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2(n+1)a_n - na_{n+1} = 0$, 且 $a_1 = 4$, 则 ()

(A) $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等差数列

(B) $\{a_n\}$ 为递增数列

(C) $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 4$

(D) $\left\{\frac{a_n}{2^{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{n^2 + n}{2}$

1.2.3 待定系数法

方法 1.1. 一次函数型

形如 $a_{n+1} = ca_n + d$ 的类型, 其中 $c \neq 0$, $a_1 = a$.

- 当 $c = 1$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.
- 当 $d = 0$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列.
- 当 $c \neq 1$, 且 $d \neq 0$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为线性递推数列.

注 构造 $a_{n+1} + \lambda = c(a_n + \lambda)$, 转化为等比数列.

例 1.20 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 3a_{n-1} + 2 (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 设

$$a_n + \lambda = 3(a_{n-1} + \lambda) \Rightarrow a_n = 3a_{n-1} + 2\lambda \quad (1.1)$$

由题设

$$a_n = 3a_{n-1} + 2 \quad (1.2)$$

比较 (1.1), (1.2) 两式可得 $\lambda = 1$, 故 $a_n + 1 = 3(a_{n-1} + 1)$, 因此数列 $\{a_n + 1\}$ 是首项为 2, 公比为 3 的等比数列, 所以 $a_n + 1 = (a_1 + 1) \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$.

例 1.21 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n + a_n = 2n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

解 当 $n = 1$ 时, $a_1 + a_1 = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}$, 当 $n \geq 2$ 时, $\begin{cases} S_n + a_n = 2n + 1 \\ S_{n-1} + a_{n-1} = 2n - 1 \end{cases}$ 两式做差得

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1 \quad (1.3)$$

设

$$a_n + \lambda = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \lambda) \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}\lambda \quad (1.4)$$

比较 (1.3), (1.4) 两式可得 $\lambda = -2$, 故 $a_n - 2 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 2)$, 因此数列 $\{a_n - 2\}$ 是首项为 $\frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 所以 $a_n - 2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$.

变式训练 EXERCISES

59. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_1 = 1$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

60. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3a_n - 2n (n \in \mathbf{N}^*)$, 若 $\{a_n + \lambda\}$ 成等比数列, 则实数 $\lambda = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

61. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = 3a_n - 2n$, $b_n = a_n + 2$, $c_n = \frac{1}{b_n}$.

(1) 证明: $\{b_n\}$ 为等比数列, 并求 a_n ;

(2) 记 T_n 为 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, $T_n < m$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

62. 已知数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 2a_n - n (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 2\log_2(1 + b_n) - 1$.

(1) 证明: $\{b_n + 1\}$ 为等比数列, 并求 b_n ;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 中去掉与数列 $\{b_n\}$ 中相同的项后, 余下的项按原顺序组成数列 $\{c_n\}$, 求 $c_1 + c_2 + \cdots + c_{50}$ 的值.

方法 1.2. 指数型

形如 $a_{n+1} = pa_n + q^n$ 的类型, 其中 $n \neq 0, 1$.

- 当 $p = 1$ 时, 累加即可.
- 当 $p \neq 1$ 时, 等式两边同除以 q^{n+1} , 转化为一次函数型求解.

解法一 原等式两边同除以 q^{n+1} , 得

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a_n}{q^n} + 1 \quad (1.5)$$

换元, 令 $b_n = \frac{a_n}{q^n}$, 则式 (1.5) 化为 $b_{n+1} = \frac{p}{q} \cdot b_n + 1$, 接下来仿照第 13 页一次函数型的做法构造等比数列.

解法二 待定系数法 $a_{n+1} + \lambda q^{n+1} = p(a_n + \lambda q^n)$. 详见下例.

注 应用待定系数法时, 要求 $p \neq q$, 否则待定系数法失效.

例 1.22 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 3a_{n-1} + 2^{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_1 = -1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解法一 给 $a_n = 3a_{n-1} + 2^{n-1}$ 两边同除以 2^n , 得 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}$. 令 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 得 $b_n = \frac{3}{2}b_{n-1} + \frac{1}{2}$, 构造 $b_n + \lambda = \frac{3}{2}(b_{n-1} + \lambda) \Rightarrow \lambda = 1$, 因此数列 $\{b_n + 1\}$ 为等比数列, $b_n + 1 = \frac{3^{n-1}}{2^n} \Rightarrow a_n = 3^{n-1} - 2^n$.

解法二 令 $a_n + \lambda 2^n = 3(a_{n-1} + \lambda 2^{n-1})$, 即 $a_n = 3a_{n-1} + \lambda 2^{n-1}$,

$$\therefore \lambda = 1,$$

$\therefore a_n + 2^n = 3(a_{n-1} + 2^{n-1})$, 于是数列 $\{a_n + 2^n\}$ 是首项为 $-1 + 2 = 1$, 公比为 3 的等比数列,

$$\therefore a_n + 2^n = 3^{n-1}, \therefore a_n = 3^{n-1} - 2^n.$$

例 1.23 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, 且 $a_1 = \frac{5}{6}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 给 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ 两边同乘以 2^{n+1} , 得 $2^{n+1} \cdot a_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot (2^n \cdot a_n) + 1$. 令 $b_n = 2^n \cdot a_n$, 构造 $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + 1 \Rightarrow b_n = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$, 所以 $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

变式训练 EXERCISES

63. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2^{n+1}} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项的和为 ()

(A) $\frac{33}{16}$

(B) $\frac{129}{64}$

(C) $\frac{509}{256}$

(D) $\frac{65}{32}$

64. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 4 \cdot 3^{n-1}$, 且 $a_1 = 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

65. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3^n} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求证: 数列 $\{3^n \cdot a_n\}$ 为等差数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

方法 1.3. 类一次函数

形如 $a_{n+1} = pa_n + kn + b$ 的类型, 其中 k, b 为常数且 $k \neq 0$.

注 待定系数法: 通过凑配可转化为 $a_{n+1} + x(n+1) + y = p(a_n + xn + y)$.

例 1.24 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 3a_n + 2n$, 且 $a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 设 $a_{n+1} + x(n+1) + y = 3(a_n + xn + y) \Rightarrow a_{n+1} = 3a_n + 2xn - x + 2y$, 和原式比较可解得 $x = 1, y = \frac{1}{2}$,

所以数列 $\left\{a_n + n + \frac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $\frac{5}{2}$, 公比为 3 的等比数列, 于是 $a_n + n + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \times 3^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{5}{2} \times 3^{n-1} - n - \frac{1}{2}$.

变式训练 EXERCISES

66. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_n - a_{n-1} = 6n - 3$, 且 $a_1 = \frac{3}{2}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

67. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 2n - 1$, 且 $a_1 = 2$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

1.2.4 倒数法、对数变换法

方法 1.4. 倒数法

形如 $a_{n+1} = \frac{Aa_n}{C + Da_n}$ 的类型, 其中 A, C, D 为常数.

注 取倒数, 构造等差数列或第 13 页一次函数型的做法构造等比数列.

解 原等式两边取倒数 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{C + Da_n}{Aa_n} = \frac{C}{A} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{D}{A}$, 构造等差数列或第 13 页一次函数型的做法构造等比数列.

例 1.25 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{2 + a_n}$, 且 $a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 取倒数 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}$, 即数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为等差数列, 所以

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n+1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{2}{n+1}$$

例 1.26 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \frac{2a_{n-1}}{3a_{n-1} + 2}$, 且 $a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 取倒数 $\frac{1}{a_n} = \frac{3a_{n-1} + 2}{2a_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{3}{2}$, 即数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 1 为首项, $\frac{3}{2}$ 为公差的等差数列, 所以

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{3}{2}(n-1) = \frac{3n-1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{2}{3n-1}$$

变式训练 EXERCISES

68. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1} (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_1 = 1$, 则数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 10 项和 $S_{10} = (\quad)$

(A) $\frac{9}{28}$

(B) $\frac{27}{28}$

(C) $\frac{10}{31}$

(D) $\frac{30}{31}$

69. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3} (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_1 = 2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

70. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1} (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

方法 1.5. 对数变换法 形如 $a_{n+1} = pa_n^r$, $a_1 = m$ 的类型, 其中 $a_n > 0$, $p > 0$.

注 取对数, 构造等比数列或第 13 页一次函数型的做法构造等比数列.

解 原等式两边取对数 $\log_d a_{n+1} = \log_d(pa_n^r) = r \log_d a_n + \log_d p$, 换元, 令 $b_n = \log_d a_n$, 可得 $b_{n+1} = rb_n + \log_d p$, 构造第 13 页一次函数型的做法构造等比数列.

例 1.27 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n^2$, 且 $a_1 = 3$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 取以 3 为底的对数, 得 $\log_3 a_{n+1} = 2 \log_3 a_n$. 即数列 $\{\log_3 a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 所以 $\log_3 a_n = 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 3^{2^{n-1}}$.

例 1.28 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{10} \cdot a_n^2$, 且 $a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 取对数 $\lg a_{n+1} = \lg\left(\frac{1}{10} \cdot a_n^2\right) = 2 \lg a_n - 1$, 令 $b_n = \lg a_n$, 则

$$b_{n+1} = 2b_n - 1 \quad (1.6)$$

设

$$\begin{aligned} b_{n+1} + \lambda &= 2(b_n + \lambda) \\ \Rightarrow b_{n+1} &= 2b_n + \lambda \end{aligned} \quad (1.7)$$

由式 (1.6), (1.7) 可得 $\lambda = -1$, 因此数列 $\{b_n - 1\}$ 为首项等于 -1, 公比为 2 的等比数列, 于是 $b_n - 1 = (-1) \times 2^{n-1} \Rightarrow b_n = 1 - 2^{n-1}$, 所以 $a_n = 10^{1-2^{n-1}}$.

例 1.29 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 2a_{n-1}^2 (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$, 且 $a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 取对数 $\log_2 a_n = \log_2(2a_{n-1}^2) = 2 \log_2 a_{n-1} + 1 \Rightarrow \log_2 a_n + 1 = 2(\log_2 a_{n-1} + 1)$, 令 $b_n = \log_2 a_n + 1$, 则数列 $\{b_n\}$ 为首项等于 $\log_2 1 + 1 = 1$, 公比为 2 的等比数列, 于是 $b_n = 2^{n-1} \Rightarrow \log_2 a_n = 2^{n-1} - 1 \Rightarrow a_n = 2^{2^{n-1}-1}$, 所以 $a_n = 2^{2^{n-1}-1}$.

例 1.30 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 2\sqrt{a_{n-1}} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$, 且 $a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 取对数 $\log_2 a_n = \log_2(\sqrt{a_{n-1}}) = \frac{1}{2} \log_2 a_{n-1} + 1 \Rightarrow \log_2 a_n - 2 = \frac{1}{2}(\log_2 a_{n-1} - 2)$, 令 $b_n = \log_2 a_n - 2$, 则数列 $\{b_n\}$ 为首项等于 $\log_2 1 - 2 = -2$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 于是 $b_n = -2^{2-n} \Rightarrow \log_2 a_n = 2 - 2^{2-n} \Rightarrow a_n = 2^{2-2^{2-n}}$, 所以 $a_n = 2^{2-2^{2-n}}$.

例 1.31 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 6\sqrt{a_n + 2} + 9$, 则 $a_{27} =$ ()

(A) 7268

(B) 5068

(C) 6398

(D) 4028

解 依题意, $a_{n+1} = a_n + 6\sqrt{a_n + 2} + 9 = (a_n + 2) + 2 \times \sqrt{a_n + 2} \times 3 + 3^2 - 2$,

所以

$$a_{n+1} + 2 = (a_n + 2) + 2 \times \sqrt{a_n + 2} \times 3 + 3^2 = (\sqrt{a_n + 2} + 3)^2 \quad (1.8)$$

于是

$$\sqrt{a_{n+1} + 2} = \sqrt{a_n + 2} + 3 \quad (1.9)$$

所以数列 $\{\sqrt{a_n + 2}\}$ 是以 2 为首项, 公差为 3 的等差数列, 于是 $\sqrt{a_{27} + 2} = 80$, 所以 $a_{27} = 6398$, 选 C.

1.2.5 隔项递推数列通项公式求法

类型 1 ① $a_n - a_{n-2} = d, n = 3, 4, 5, \dots$, ② $\frac{a_n}{a_{n-2}} = q, n = 3, 4, 5, \dots$,

这是隔项递推数列最简单也最基本的递推公式, 一般用等差 (比) 数列通项公式直接求解.

例 1.32 已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的数列, 满足 $a_1 = 0, a_2 = 3, a_n = a_{n-2} + 2, n = 3, 4, 5, \dots$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 易知奇数项是以 0 为首项, 2 为公差的等差数列, 偶数项是以 3 为首项, 2 为公差的等差数列, 则

$$\begin{cases} a_{2k-1} = 0 + 2(k-1) \\ a_{2k} = 3 + 2(k-1) = 2k + 1 \end{cases} \quad (1.10)$$

$$(1.11)$$

式 (1.10) 中令 $n = 2k - 1$ 解得 $k = \frac{n+1}{2}$, 故

$$a_n = 2\left(\frac{n+1}{2} - 1\right) = n - 1 \quad (n \text{ 为奇数}) \quad (1.12)$$

同理

$$a_n = n + 1 \quad (n \text{ 为偶数}) \quad (1.13)$$

于是 $a_n = \begin{cases} n-1 & (n \text{ 为奇数}) \\ n+1 & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$ 或 $a_n = n + (-1)^n$.

例 1.33 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n > 0, b_n = \sqrt{a_n a_{n+1}}$, 且 $\{b_n\}$ 是以 q 为公比的等比数列.

(1) 证明: $a_{n+2} = a_n q^2$;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 (1) 由 $b_{n+1} = b_n q$ 可得 $\frac{\sqrt{a_{n+1}a_{n+2}}}{\sqrt{a_n a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_{n+2}}}{\sqrt{a_n}} = q$, $\therefore a_{n+2} = a_n q^2$.

(2) $\because a_{n+2} = a_n q^2$, 易知奇数项是以 1 为首项, q^2 为公比的等比数列, 偶数项是以 2 为首项, q^2

为公比的等比数列, 则
$$\begin{cases} a_{2k-1} = a_1 \cdot (q^2)^{k-1} = q^{2k-2} \\ a_{2k} = a_2 \cdot (q^2)^{k-1} = 2q^{2k-2} \end{cases}, \text{ 于是 } a_n = \begin{cases} q^{n-1} & (n \text{ 为奇数}) \\ 2q^{n-2} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$$

类型 2

$$\textcircled{1} a_n - a_{n-2} = f(n), \quad n = 3, 4, 5, \dots, \quad \textcircled{2} \frac{a_n}{a_{n-2}} = f(n), \quad n = 3, 4, 5, \dots,$$

这类问题都可以采用累加法、累乘法处理.

例 1.34 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{2k} = a_{2k-1} + (-1)^k$, $a_{2k+1} = a_{2k} + 3^k$, 其中 $k = 1, 2, 3, \dots$.

(1) 求 a_3, a_5 ;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 (1) $a_3 = 3, a_5 = 13$; (2) 依题

$$\begin{cases} a_{2k} = a_{2k-1} + (-1)^k \\ a_{2k+1} = a_{2k} + 3^k \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\quad \quad \quad (1.15)$$

两式合并可得 $a_{2k+1} - a_{2k-1} = 3^k + (-1)^k$, 由累加法

$$a_{2k+1} - a_{2k-1} = 3^k + (-1)^k$$

$$a_{2k-1} - a_{2k-3} = 3^{k-1} + (-1)^{k-1}$$

.....

$$a_3 - a_1 = 3 + (-1)$$

$$\therefore a_{2k+1} - a_1 = \frac{3}{2}(3^k - 1) + \frac{1}{2}[(-1)^k - 1], \quad \therefore a_{2k+1} = \frac{3^{k+1}}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k - 1, \text{ 于是}$$

$$a_{2k} = a_{2k-1} + (-1)^k = \frac{3^k}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{k-1} - 1 + (-1)^k = \frac{3^k}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k - 1$$

$$\text{因此 } a_n = \begin{cases} \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n-1}{2}} - 1 & (n \text{ 为奇数}) \\ \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n}{2}} - 1 & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$$

例 1.35 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = 2^n a_{n-2}$, 其中 $n = 3, 4, \dots$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 采用累乘法, 当 n 为偶数时,

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-4}} \cdot \frac{a_{n-4}}{a_{n-6}} \cdots \frac{a_4}{a_2} \cdot a_2 = 2^{n+(n-2)+(n-4)+\cdots+4+1} = 2^{\frac{n^2+2n-4}{4}}$$

当 n 为奇数时,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_n}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-4}} \cdot \frac{a_{n-4}}{a_{n-6}} \cdots \frac{a_3}{a_1} \cdot a_1 \\ &= 2^n \cdot 2^{n-2} \cdot 2^{n-4} \cdots 2^3 \cdot 1 = 2^{n+(n-2)+(n-4)+\cdots+3} = 2^{\frac{(n-1)(n+3)}{4}} \end{aligned}$$

$$\text{因此 } a_n = \begin{cases} 2^{\frac{(n-1)(n+3)}{4}} & (n \text{ 为奇数}) \\ 2^{\frac{n^2+2n-4}{4}} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$$

类型 3

$$\textcircled{1} a_{n+1} + a_n = f(n), \quad \textcircled{2} a_{n+1} a_n = f(n)$$

例 1.36 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_{n+1} + a_n = 3n + 2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 依题意

$$\begin{cases} a_{n+1} + a_n = 3n + 2 \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\begin{cases} a_{n+1} + a_{n+2} = 3n + 5 \end{cases} \quad (1.17)$$

(1.17) - (1.16) 得 $a_{n+2} - a_n = 3$, 易知奇数项是以 1 为首项, 3 为公差的等差数列, 偶数项是以 4 为首项, 3 为公差的等差数列, 则

$$\begin{cases} a_{2k-1} = 1 + 3(k-1) = 3k - 2 \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\begin{cases} a_{2k} = 4 + 3(k-1) = 3k + 1 \end{cases} \quad (1.19)$$

式 (1.18) 中令 $n = 2k - 1$ 解得 $k = \frac{n+1}{2}$, 故

$$a_n = \frac{3n-1}{2} \quad (n \text{ 为奇数}) \quad (1.20)$$

同理

$$a_n = \frac{3n+2}{2} \quad (n \text{ 为偶数}) \quad (1.21)$$

$$\text{于是 } a_n = \begin{cases} \frac{3n-1}{2} & (n \text{ 为奇数}) \\ \frac{3n+2}{2} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases} \quad \text{或 } a_n = \frac{3(-1)^n + 6n + 1}{4}.$$

例 1.37 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} a_n = 4 \times 3^n$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 易知 $a_2 = 12$, $a_{n+1}a_n = 4 \times 3^n$, $a_{n+2}a_{n+1} = 4 \times 3^{n+1}$, 两式相除可得 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 3$, 仿照例 1.33 的做法

$$\text{法可得 } a_n = \begin{cases} 3^{\frac{n-1}{2}} & (n \text{ 为奇数}) \\ 12 \times 3^{\frac{n-2}{2}} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}.$$

变式训练 EXERCISES

71. 已知各项全不为零的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = \frac{1}{2}a_n a_{n+1}$, 其中 $a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
72. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \left(1 + \cos^2 \frac{n\pi}{2}\right)a_n + \sin^2 \frac{n\pi}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
73. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $S_n - S_{n-2} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ($n \geq 3$), 且 $S_1 = 1$, $S_2 = -\frac{3}{2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
74. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \neq 0$, $a_1 = 1$, $a_n \cdot a_{n+1} = \lambda S_n - 1$, 是否存在 λ , 使得数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.
75. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \neq 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{\lambda}{2}$, $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \lambda$, 是否存在 λ , 使得数列 $\{a_n\}$ 为等比数列.

1.3 数列求和

1.3.1 错位相减法

方法 1.6. 错位相减法

当数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为等差和等比之积时, 即 $a_n = (an + b) \cdot q^n$ 时, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 可用错位相减法.

解法一 当数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为等差和等比之积时, 即 $a_n = (an + b) \cdot q^n$ 时, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 可用错位相减法.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ &= (a+b) \cdot q + (2a+b) \cdot q^2 + \dots + [a(n-1)+b] \cdot q^{n-1} + (an+b) \cdot q^n \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$qS_n = (a+b) \cdot q^2 + (2a+b) \cdot q^3 + \dots + [a(n-1)+b] \cdot q^n + (an+b) \cdot q^{n+1} \quad (1.23)$$

(1.22) - (1.23) 得

$$\begin{aligned}(1-q)S_n &= (a+b) \cdot q + a \cdot (q^2 + q^3 + \cdots + q^n) - (an+b) \cdot q^{n+1} \\ &= (a+b) \cdot q + a \cdot \frac{q^2(1-q^{n-1})}{1-q} - (an+b) \cdot q^{n+1} \\ \Rightarrow S_n &= \frac{(a+b) \cdot q + a \cdot \frac{q^2(1-q^{n-1})}{1-q} - (an+b) \cdot q^{n+1}}{1-q}\end{aligned}$$

解法二 当数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为等差和等比之积时, 即 $a_n = (an+b) \cdot p^n$ 时, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 可用错位相减法.

具体公式如下: $S_n = (An+B) \cdot p^n - B$. 这里 $A = \frac{ap}{p-1}$, $B = \frac{a_1 - Ap}{p-1}$.

例 1.38 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (2n-1) \cdot 2^n$, 求其前 n 项和 S_n .

解 依题意 $\begin{cases} a = 2, p = 2 \Rightarrow A = \frac{ap}{p-1} = \frac{4}{1} = 4 \\ a = 2, p = 2, a_1 = 2 \Rightarrow B = \frac{a_1 - Ap}{p-1} = \frac{2-8}{1} = -6 \end{cases} \Rightarrow S_n = (4n-6) \cdot 2^n + 6$

例 1.39 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n + 2n = 2a_n$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n + 2\}$ 是等比数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2(a_n + 2)$, 设 T_n 是数列 $\left\{\frac{b_n}{a_n + 2}\right\}$ 的前 n 项和, 求证: $T_n < \frac{3}{2}$.

解 依题意

(1) $a_n = 2^{n+1} - 2$;

(2) **证** $c_n = \frac{b_n}{a_n + 2} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}, p = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{ap}{p-1} = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2}, p = \frac{1}{2}, c_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow B = \frac{c_1 - Ap}{p-1} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow T_n = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{3}{2}$$

变式训练 EXERCISES

76. 【2020 全国 I 理】 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列, a_1 为 a_2, a_3 的等差中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比;

(2) 若 $a_1 = 1$, 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

77. 【2020 全国 III 理】设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n - 4n$.

(1) 计算 a_2, a_3 , 猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明;

(2) 求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

78. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = -\frac{1}{2}n^2 + kn$, $k \in \mathbf{N}$, 且 S_n 的最大值为 8.

(1) 确定常数 k , 求 a_n ;

(2) 求数列 $\left\{\frac{9-2a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

1.3.2 裂项相消法

等差型

等差数列 $\{a_n\}$ 的各项不为零, 公差为 d 时, 则 $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$.

常见样式

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}; \\ & \bullet \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right); \\ & \bullet \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

例 1.40 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_2 = 2$, $S_7 = 28$, 则数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 2020 项和为 ()

(A) $\frac{2020}{2021}$

(B) $\frac{2018}{2020}$

(C) $\frac{2018}{2019}$

(D) $\frac{2021}{2020}$

解法一 由等差数列前 n 项和公式可知 $S_7 = 7a_4 = 28 \Rightarrow a_4 = 4$,

所以 $a_n = n$, 于是 $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

所以 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{2020 \times 2021} = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$. 选 A.

解法二 由等差数列前 n 项和公式可知 $S_7 = 7a_4 = 28 \Rightarrow a_4 = 4$,

所以 $a_n = n$, 由大根 n 上可知 $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$ 的前 2020 项和为 $\frac{2020}{2021}$. 选 A.

例 1.41 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 = 3$, $S_4 = 10$, 则 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

解 由等差数列前 n 项和公式可知 $S_4 = 4a_{2.5} = 10 \Rightarrow a_4 = 4$,

所以 $a_n = n$, 于是 $\frac{1}{S_n} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, 所以 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} = \frac{2n}{n+1}$.

例 1.42 已知数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = n$, 设数列 $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+2}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{3}{4}$.

解 裂项 $\frac{1}{b_n b_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$, 由此可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) < \frac{3}{4}$$

变式训练 EXERCISES

79. 设正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且对于所有的自然数 n , a_n 与 2 的等差中项等于 S_n 与 2 的等比中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{8}{a_n a_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $\frac{2}{3} \leq T_n < 1$.

80. 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2, 公差不为 0, 且 $a_3^2 = a_1 a_7$, 则数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 2019 项和为 ()

(A) $\frac{1009}{2020}$

(B) $\frac{2019}{4042}$

(C) $\frac{1009}{4042}$

(D) $\frac{2019}{2021}$

81. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 点 (n, S_n) 在函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x$ 的图象上,

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{1}{(2a_n - 11)(2a_n - 9)}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若不等式 $T_n < \frac{k}{2018}$, 求整数 k 的最小值.

82. 已知正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 满足 $4S_n = a_n^2 + 2a_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = \frac{1}{(a_n + 1)^2}$, 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{1}{4}$.

83. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = n^2 + n$, 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q > 1$, 且 $b_4 + b_5 + b_6 = 56$, $b_5 + 4$ 是 b_4, b_6 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\left\{b_n + \frac{1}{a_n^2 - 1}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

84. 已知数列 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, $a_1 = 1$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2 = 3$, 且 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 3 + (2n - 3)2^n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 求数列 $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n .

85. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 且 $a_1 = 1$, _____. 给出下列三个条件:

① 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 数列 $\{S_n + a_1\}$ 也为等比数列;

② 点 (S_n, a_{n+1}) 在直线 $y = x + 1$ 上;

③ $2^n a_1 + 2^{n-1} a_2 + \cdots + 2a_n = n a_{n+1}$.

在上面的三个条件中任选一个补充在横线上, 完成下面的解答

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_{n+1} \log_2 a_{n+3}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

86. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = n^2 + 2n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 若 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

87. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 4$, 且当 $n \geq 2$ 时, $(n-1)a_n = n(a_{n-1} + 2n - 2)$.

(1) 求证: $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等差数列;

(2) 记 $b_n = \frac{2n+1}{a_n^2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

88. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_2 a_7 = 3a_4^2$, 且 $-3, S_4, 9a_3$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = (-1)^n a_n + \frac{1}{n(n+1)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

无理型

该类型的特点是,分母为两个根式之和,这两个根式的平方差为常数,然后通过分母有理化,来达到消项的目的,有时在证明不等式时,常常把分母放缩成两个根式之和,来达到消项化简的目的.

常见样式: $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

例 1.43 求证: $2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1 (n \geq 2, n \in \mathbf{N})$.

证 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} > \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) (n \geq 2, n \in \mathbf{N})$$

所以

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ & > 2(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ & = 2\sqrt{n+1} - 2 \end{aligned}$$

又因为

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) (n \geq 2, n \in \mathbf{N})$$

所以

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 1 + 2(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 2\sqrt{n} - 1$$

变式训练 EXERCISES

89. 正项数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{3}$, $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n^2 - a_{n-1}^2 (n \geq 2)$, 则数列 $\left\{\frac{1}{a_n + a_{n+1}}\right\}$ 的前 60 项和为 .

90. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 且 $a_3 = 2$, $S_9 = 54$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 证明: $\sqrt{\frac{1}{a_1+3}} + \sqrt{\frac{1}{a_2+3}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{a_{100}+3}} > 13$.

指数型

由于 $(a-1)a^n = a^{n+1} - a^n$, 所以一般地有

$$\frac{(a-1)a^n}{(a^n+b)(a^{n+1}+b)} = \frac{1}{a^n+b} - \frac{1}{a^{n+1}+b}$$

注 待定系数法裂项.

例 1.44 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 3, 点 (a_n, a_{n+1}) 在直线 $y = 4x$ 上,

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_{n+1}-3)S_{n+1}} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

解 依题

(1) 容易解得 $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$;

(2) 因为 $S_n = \frac{3(1-4^n)}{1-4} = 4^n - 1$, 所以 $b_n = \frac{3 \cdot 4^n}{3(4^n - 1) \cdot (4^{n+1} - 1)}$,

设 $\frac{3 \cdot 4^n}{3(4^n - 1) \cdot (4^{n+1} - 1)} = \frac{A}{4^n - 1} + \frac{B}{4^{n+1} - 1}$, 通分整理得 $A(4^{n+1} - 1) + B(4^n - 1) = 4^n$, 即

$(4A + B)4^n - (A + B) = 4^n$, 于是 $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, 所以

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{3 \cdot 4^n}{3(4^n - 1) \cdot (4^{n+1} - 1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4^n - 1} - \frac{1}{4^{n+1} - 1} \right) \\ \Rightarrow T_n &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4 - 1} - \frac{1}{4^2 - 1} + \cdots + \frac{1}{4^n - 1} - \frac{1}{4^{n+1} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{9} - \frac{1}{3 \cdot 4^{n+1} - 3} \end{aligned}$$

变式训练 EXERCISES

91. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 且 $S_n = 2a_n - a_1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 6$, $b_n = S_n + \frac{1}{a_n} + 4$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记数列 $\left\{ \frac{1}{b_n} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < \frac{1}{2}$.

92. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n (S_n \neq 0)$, 满足 $S_1, S_2, -S_3$ 成等差数列, 且 $a_1 a_2 = a_3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = \frac{-3a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

93. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - 2a_n + 2 = 0$, 且 $a_1 = 8$.

(1) 证明数列 $\{a_n - 2\}$ 为等比数列;

(2) 设 $b_n = \frac{(-1)^n a_n}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)}$, 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $m \geq T_n$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

94. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 2$, 且 $S_n = a_{n+1}$, 设 $b_n = \frac{S_n}{(1+S_n)(1+S_{n+1})}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: $T_n < \frac{1}{3}$.

对数型

若 $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $\log_a \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log_a a_{n+1} - \log_a a_n$.

例 1.45 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = \lg \frac{n+1}{n}$, 若其前 n 项和 $S_n = 2$, 则 $n = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

解 依题意, $a_n = \lg(n+1) - \lg n$, 所以

$S_n = \lg 2 - \lg 1 + \lg 3 - \lg 2 + \lg(n+1) - \lg n = \lg(n+1) - \lg 1 = 2$, 即 $n = 99$.

三角函数型

$\tan \alpha - \tan \beta = \tan(\alpha - \beta)(1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta)$.

例 1.46 在 1 和 100 之间插入 n 个实数, 使得这 $n+2$ 个数构成递增的等比数列, 将这 $n+2$ 个数的乘积记作 T_n , 再令 $a_n = \lg T_n (n \geq 1)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \tan a_n \cdot \tan a_{n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

解 (1) 利用倒序相乘不难得到 $a_n = n + 2$;

(2) $\because \tan[(n+3) - (n+2)] = \frac{\tan(n+3) - \tan(n+2)}{1 + \tan(n+2) \cdot \tan(n+3)} = \tan 1$,

$\therefore \tan(n+2) \cdot \tan(n+3) = \frac{\tan(n+3) - \tan(n+2)}{\tan 1} - 1$,

所以

$$\begin{aligned} S_n &= \tan(1+2) \cdot \tan(1+3) + \tan(2+2) \cdot \tan(2+3) + \cdots + \tan(n+2) \cdot \tan(n+3) \\ &= \frac{\tan(1+3) - \tan(1+2)}{\tan 1} + \frac{\tan(2+3) - \tan(2+2)}{\tan 1} \\ &\quad + \cdots + \frac{\tan(n+3) - \tan(n+2)}{\tan 1} - n = \frac{\tan(n+3) - \tan 3}{\tan 1} - n \end{aligned}$$

混合型

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right).$$

例 1.47 已知数列 $\{b_n\}$ 的通项为 $b_n = n \cdot 2^{n-1}$, 求和: $\frac{b_3}{b_1 b_2} + \frac{b_4}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{b_{n+2}}{b_n b_{n+1}}$.

解 依题 $\frac{b_{n+2}}{b_n b_{n+1}} = \frac{(n+2)2^{n+1}}{n2^{n-1}(n+1)2^n} = \frac{n+2}{n(n+1)2^{n-2}} = \frac{2(n+1)-n}{n(n+1)2^{n-2}} = \frac{1}{n2^{n-3}} - \frac{1}{(n+1)2^{n-2}},$

所以 $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2^{-2}} - \frac{1}{2 \cdot 2^{-1}} + \frac{1}{2 \cdot 2^{-1}} - \frac{1}{3 \cdot 2^0} + \cdots + \frac{1}{n2^{n-3}} - \frac{1}{(n+1)2^{n-2}} = 4 - \frac{1}{(n+1)2^{n-2}}.$

变式训练 EXERCISES

95. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 2, 2S_n = (n+1)a_n$.

(1) 求 S_n ;

(2) 若 $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_{n+1}S_n}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < \frac{1}{2}$.

1.3.3 待定系数法裂项

例 1.48 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, 请裂项.

解 设 $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$, 所以 $A(2n+1) + B(2n-1) = 1$, 即

$$(2A+2B)n + (A-B) = 1, \text{ 故 } \begin{cases} 2A+2B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 所以}$$

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

例 1.49 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = n^2 + n (n \in \mathbf{N}^*)$, 设 $b_n = (-1)^n \frac{a_{2n+1}}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 易知 $b_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$, 令 $\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$, 所以 $A(n+1) + Bn = 2n+1$, 即

$$(A+B)n+A=2n+1, \text{ 故 } \begin{cases} A+B=2 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}, \text{ 所以 } b_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right).$$

当 n 为偶数时,

$$\begin{aligned} T_n &= \left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - 1 = -\frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

当 n 为奇数时,

$$T_n = T_{n-1} + b_n = -\frac{n-1}{n} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = -\frac{n+2}{n+1}$$

$$\text{故 } T_n = \begin{cases} -\frac{n}{n+1}, & n=2k \\ -\frac{n+2}{n+1}, & n=2k-1 \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N}^*)$$

例 1.50 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = \frac{n+1}{4n^2(n+2)^2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{5}{64}$.

解 令 $\frac{n+1}{4n^2(n+2)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n+2} + \frac{D}{(n+2)^2}$, 通分系数对应相等得 $\begin{cases} A=C=0 \\ B=\frac{1}{16} \\ D=-\frac{1}{16} \end{cases}$, 所以

$$b_n = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right]. \text{ 于是}$$

$$T_n = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right] < \frac{1}{16} \left[1 + \frac{1}{4} \right] = \frac{5}{64}$$

变式训练 EXERCISES

96. 求数列 $\left\{ (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n^2+n} \right\}$ 的前 n 项和 T_n .

1.3.4 区分奇偶项的求和

例 1.51 【2021 新高考 I 卷】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, & n \text{ 为奇数} \\ a_n + 2, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$.

(1) 记 $b_n = a_{2n}$, 写出 b_1, b_2 , 并求出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的前 20 项和.

解 (1) 由题意得 $b_1 = a_2 = a_1 + 1 = 2$, $b_2 = a_4 = a_3 + 1 = a_2 + 2 + 1 = 5$, 因为 $a_{2k+2} = a_{2k+1} + 1$, $a_{2k+1} = a_{2k} + 2$, $k \in \mathbf{N}^*$, 所以 $a_{2k+2} = a_{2k} + 3$, 所以 $b_{n+1} = b_n + 3$,

所以数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 故 $b_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$;

(2) 方法一: 设数列 $\{a_n\}$ 的前 20 项和为 S_{20} , 则 $S_{20} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}$,

因为 $a_1 = a_2 - 1$, $a_3 = a_4 - 1$, $\cdots$, $a_{19} = a_{20} - 1$, 所以

$$\begin{aligned} S_{20} &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20} = 2(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20}) - 10 \\ &= 2(b_1 + b_2 + a_3 + \cdots + b_{10}) - 10 = 2\left(10 \cdot 2 + \frac{9 \cdot 10}{2} \cdot 3\right) - 10 = 300 \end{aligned}$$

方法二: 设 $c_n = a_{2n-1} + a_{2n}$, 所以 $c_1 = a_1 + a_2 = 3$, 而

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= (a_{2n+1} + a_{2n+2}) - (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ &= (a_{2n+1} - a_{2n}) + (a_{2n+2} - a_{2n+1}) + (a_{2n+1} - a_{2n}) + (a_{2n} - a_{2n-1}) = 6 \end{aligned}$$

所以数列 $\{c_n\}$ 是以 3 为首项, 6 为公差的等差数列, 设数列 $\{a_n\}$ 的前 20 项和为 S_{20} , 则

$$S_{20} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20} = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{10} = 300$$

例 1.52 【2012 全国卷理科】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$, 则 $\{a_n\}$ 前 60 项和为 ▲ .

解法一 依题

$$\begin{cases} a_{2k} - a_{2k-1} = 4k - 3 & (1.24) \\ a_{2k+1} + a_{2k} = 4k - 1 & (1.25) \\ a_{2k+2} - a_{2k+1} = 4k + 1 & (1.26) \end{cases}$$

由式 (1.24), (1.25) 得 $a_{2k-1} + a_{2k+1} = 2$, 所以

$$(a_1 + a_3) + (a_5 + a_7) + \cdots + (a_{57} + a_{59}) = 15 \times 2 = 30 \quad (1.27)$$

由式 (1.25), (1.26) 得 $a_{2k} + a_{2k+2} = 8k$, 所以

$$(a_2 + a_4) + (a_6 + a_8) + \cdots + (a_{58} + a_{60}) = 8(1 + 3 + 5 + \cdots + 29) = 1800 \quad (1.28)$$

由式 (1.27), (1.28) 得 $\{a_n\}$ 前 60 项和为 $1800 + 30 = 1830$.

解法二 由于 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$, 所以对于任意正整数 k , 有 $a_{4k-2} - a_{4k-3} = 8k - 7$;
 $a_{4k-1} + a_{4k-2} = 8k - 5$; $a_{4k} - a_{4k-1} = 8k - 3$, 从而

$$\begin{aligned} a_{4k} + a_{4k-3} &= (a_{4k} - a_{4k-1}) + (a_{4k-1} + a_{4k-2}) - (a_{4k-2} - a_{4k-3}) \\ &= (8k - 3) + (8k - 5) - (8k - 7) = 8k - 1 \end{aligned}$$

所以 $a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k} = (a_{4k} + a_{4k-3}) + (a_{4k-2} + a_{4k-1}) = 16k - 6$, 故

$$S_{60} = a_1 + a_{60} + \cdots + a_{60} = 16 \times \frac{1+15}{2} \times 15 - 6 \times 15 = 1830.$$

例 1.53 【2020 全国 I 文】数列 $\{a_n\}$ 满足, $a_{n+2} + (-1)^n a_n = 3n - 1$, 前 16 项和为 540, 则 $a_1 = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

解 当 n 为偶数时, 有 $a_{n+2} + a_n = 3n - 1$, 所以

$$(a_2 + a_4) + (a_6 + a_8) + (a_{10} + a_{12}) + (a_{14} + a_{16}) = 5 + 17 + 29 + 41 = 92 \quad (1.29)$$

又前 16 项和为 540, 于是 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} = 448$;

当 n 为奇数时, 有 $a_{n+2} - a_n = 3n - 1$, 由累加法得

$$a_{n+2} - a_1 = 3(1 + 3 + 5 + \cdots + n) - \frac{1+n}{2} = \frac{3}{4} \times n^2 + n + \frac{1}{4} \quad (1.30)$$

所以 $a_{n+2} = \frac{3}{4} \times n^2 + n + \frac{1}{4} + a_1$, 于是

$$\begin{aligned} & a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{13} \\ &= a_1 + \left(\frac{3}{4} \times 1^2 + 1 + \frac{1}{4} + a_1 \right) + \left(\frac{3}{4} \times 3^2 + 3 + \frac{1}{4} + a_1 \right) + \left(\frac{3}{4} \times 5^2 + 5 + \frac{1}{4} + a_1 \right) + \cdots \\ & \quad + \left(\frac{3}{4} \times 13^2 + 13 + \frac{1}{4} + a_1 \right) = 448 \end{aligned}$$

解得 $a_1 = 7$.

1.3.5 变号数列的绝对值求和

先正后负型

设 $a_1, a_2, \cdots, a_k > 0, a_{k+1}, \cdots, a_n < 0$, 则

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| = \begin{cases} \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, & n \leq k \\ 2S_k - S_n, & n > k \end{cases}$$

证 依题意

$$\textcircled{1} \text{ 当 } n \leq k \text{ 时, } |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2};$$

$\textcircled{2}$ 当 $n > k$ 时,

$$\begin{aligned} & |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k - (a_{k+1} + \cdots + a_n) \\ &= S_k - (S_n - S_k) = 2S_k - S_n \end{aligned}$$

先负后正型

设 $a_1, a_2, \dots, a_k < 0, a_{k+1}, \dots, a_n > 0$, 则

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| = \begin{cases} -\frac{n(a_1 + a_n)}{2}, & n \leq k \\ -2S_k + S_n, & n > k \end{cases}$$

例 1.54 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 10 - 2n$, 求 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|$.

解 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| = \begin{cases} -n^2 + 9n, & n \leq 5 \\ n^2 - 9n + 40, & n > 5 \end{cases}.$

变式训练 EXERCISES

97. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 11 - n$, 求 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|$.

98. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 53 - 3n$, 求 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|$.

1.3.6 类周期数列求和

形如 $d_n = a_n b_n + c_n$ (其中 b_n 为周期数列) 的数列叫“类周期数列.”

我们的求和策略是 **周期内捆绑构造新数列求和**. 先来个最简单的:

例 1.55 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = (-1)^n \cdot n$, 前 n 项和为 S_n , 则 $S_{2022} = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 易知 $\{(-1)^n\}$ 是 $T = 2$ 的周期数列, 当 n 取 $1, 2, \dots$ 等正整数时, $(-1)^n$ 依次周期性出现 $-1, 1$ 这两个数,

设 $b_k = a_{2k-1} + a_{2k}$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 易知 $a_{2k-1} = 1 - 2k$, $a_{2k} = 2k$, 所以 $b_k = 1$. 于是

$$S_{2022} = \sum_{k=1}^{\frac{2022}{2}} b_k = \frac{2022}{2} \cdot 1 = 1011$$

例 1.56 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n \cdot \cos \frac{n\pi}{2} + 1$, 前 n 项和为 S_n , 则 $S_{2012} = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 易知 $\left\{\cos \frac{n\pi}{2}\right\}$ 是 $T = 4$ 的周期数列, 当 n 取 $1, 2, \dots$ 等正整数时, $\cos \frac{n\pi}{2}$ 依次周期性出现 $0, -1, 0, 1$ 这四个数,

设 $b_k = a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k}$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 易知 $a_{4k-3} = a_{4k-1} = 1$, $a_{4k-2} = -(4k-2) + 1$, $a_{4k} = 4k + 1$, 所以 $b_k = 6$. 于是

$$S_{2012} = \sum_{k=1}^{\frac{2012}{4}} b_k = \frac{2012}{4} \cdot 6 = 3018$$

例 1.57 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n \cdot \cos \frac{n\pi}{2} + 1$, 前 n 项和为 S_n , 则 $S_{2022} = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 易知 $S_{2020} = \sum_{k=1}^{2020} b_k = \frac{2020}{4} \cdot 6 = 3030$, 而

$$S_{2022} = S_{2020} + a_{2021} + a_{2022} = 3030 + 1 + (-2021) = 1010.$$

例 1.58 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 且 $a_3 = 1$, $S_6 = 7$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 2^{n+1} - 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n = b_n \cdot \tan(a_n \pi)$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $3n$ 项和 T_{3n} .

解 (1) $a_n = \frac{n}{3}$, $b_n = 2^n$; (2) 易知数列 $\left\{\tan\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\}$ 是周期为 3 的一个数列, 记 $d_n = c_{3n-2} + c_{3n-1} + c_{3n}$, 则

$$d_n = 2^{3n-2} \times \sqrt{3} + 2^{3n-1} \times (-\sqrt{3}) + 2^{3n} \times 0 = -\sqrt{3} \times 2^{3n-2}$$

所以数列 $\{d_n\}$ 是以 8 为公比, $-2\sqrt{3}$ 为首项的等比数列,

于是数列 $\{c_n\}$ 的前 $3n$ 项和 $T_{3n} = \frac{-2\sqrt{3}(1-8^n)}{1-8} = \frac{2\sqrt{3}(1-8^n)}{7}$.

1.4 互嵌式数列组的解题策略

互嵌式数列组的问题在竞赛中已屡见不鲜, 在解决该类型的问题时, 要注意到两个数列之间的相互渗透和相互影响, 既要能眼观全局从整体入手, 又要能抽丝剥茧进行单独分析, 并充分根据具体问题的结构特点来有针对性地进行解决. 本文给出几类不同互嵌式数列组题型的解题策略.

类型 1——短小精致式: 消元降维

这类问题往往不含常数项, 题目小巧玲珑, 可将其看成是二元一次方程组, 消元得到单数列的递推关系, 再进行求解.

例 1.59 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = -1$, $b_1 = 2$, 且 $\begin{cases} a_{n+1} = -b_n \\ b_{n+1} = 2a_n - 3b_n \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则

$$b_{2021} + b_{2022} = \underline{\hspace{1cm}}.$$

解 易知 $b_2 = -8$, 依题

$$\begin{cases} a_{n+1} = -b_n \\ b_{n+1} = 2a_n - 3b_n \end{cases} \quad (1.31)$$

$$b_{n+1} = 2a_n - 3b_n \Rightarrow b_{n+2} = 2a_{n+1} - 3b_{n+1} \quad (1.32)$$

消去 a_{n+1} , 得

$$b_{n+2} = -2b_n - 3b_{n+1} \Rightarrow b_{n+2} + b_{n+1} = -2(b_{n+1} + b_n)$$

故 $b_{n+1} + b_n = (-2)^{n-1}(b_2 + b_1)$, 所以 $b_{2021} + b_{2022} = 2^{2020} \cdot (-6) = -3 \cdot 2^{2021}$.

例 1.60 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $b_1 = 7$, 且 $\begin{cases} a_{n+1} = b_n - 2a_n \\ b_{n+1} = 3b_n - 4a_n \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_{2022} = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 易知 $a_2 = 5$, 依题

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n - 2a_n \Rightarrow b_{n+1} = a_{n+2} + 2a_{n+1} \\ b_{n+1} = 3b_n - 4a_n \end{cases} \quad (1.33)$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n - 2a_n \\ b_{n+1} = 3b_n - 4a_n \end{cases} \quad (1.34)$$

消去 a_{n+1} , b_n , 得

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) - 4a_n \Rightarrow a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n)$$

故 $a_{n+1} + a_n = 2^{n-1}(a_2 + a_1) = 3 \cdot 2^n$, 所以 $a_{n+1} - 2^{n+1} = -(a_n - 2^n)$, 故 $a_n = 2^n + (-1)^n$, 于是 $a_{2022} = 2^{2022} + 1$.

类型 2——珠联璧合式：合二为一

这类问题形式优美，浑然天成，两个式子之间关系紧密，通过简单的**加减**等运算，即可发现其**整体**之间的一个递推关系，此时可以先求整体，再解个体。

例 1.61 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, 且 $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + 1 \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n + 1 \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$

的通项公式.

解 依题

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + 1 \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n + 1 \end{cases} \quad (1.35)$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + 1 \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n + 1 \end{cases} \quad (1.36)$$

(1.35), (1.36) 分别相加和相减, 得

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n + 2 \\ a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \end{cases} \quad (1.37)$$

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n + 2 \\ a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \end{cases} \quad (1.38)$$

由 (1.37) 知数列 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为 $a_1 + b_1 = 3$, 公差为 2 的等差数列, 故可得 $a_n + b_n = 2n + 1$.

由 (1.38) 知数列 $\{a_n - b_n\}$ 是首项为 $a_1 - b_1 = 1$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 故可得 $a_n - b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

从而可解得 $a_n = n + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n = n + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

例 1.62 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, 且
$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 3b_n + 7 \\ b_{n+1} = 3a_n + 5b_n \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}^*),$$
 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$

的通项公式.

解 依题

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 3b_n + 7 \\ b_{n+1} = 3a_n + 5b_n \end{cases} \quad (1.39)$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 3b_n + 7 \\ b_{n+1} = 3a_n + 5b_n \end{cases} \quad (1.40)$$

(1.39), (1.40) 分别相加和相减, 得

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} + 1 = 8(a_n + b_n + 1) \\ a_{n+1} - b_{n+1} + 7 = 2(a_n - b_n + 7) \end{cases} \quad (1.41)$$

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} + 1 = 8(a_n + b_n + 1) \\ a_{n+1} - b_{n+1} + 7 = 2(a_n - b_n + 7) \end{cases} \quad (1.42)$$

由 (1.41) 知数列 $\{a_n + b_n + 1\}$ 是首项为 $a_1 + b_1 + 1 = 4$, 公比为 8 的等比数列, 故可得 $a_n + b_n + 1 = 4 \cdot 8^{n-1}$.

由 (1.42) 知数列 $\{a_n - b_n + 7\}$ 是首项为 $a_1 - b_1 + 7 = 8$, 公比为 2 的等比数列, 故可得 $a_n - b_n + 7 = 8 \cdot 2^{n-1}$.

从而可解得 $a_n = 2 \cdot 8^{n-1} + 4 \cdot 2^{n-1} - 4$, $b_n = 2 \cdot 8^{n-1} - 4 \cdot 2^{n-1} + 3$.

例 1.63 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = -\frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{3}{2}$, 且
$$\begin{cases} 4a_{n+1} = 3a_n - b_n + 4 \\ 4b_{n+1} = 3b_n - a_n - 4 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

(1) 证明: $\{a_n + b_n\}$ 是等比数列, $\{a_n - b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式以及 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

解 依题

(1)

$$\begin{cases} 4a_{n+1} = 3a_n - b_n + 4 \\ 4b_{n+1} = 3b_n - a_n - 4 \end{cases} \quad (1.43)$$

$$\begin{cases} 4a_{n+1} = 3a_n - b_n + 4 \\ 4b_{n+1} = 3b_n - a_n - 4 \end{cases} \quad (1.44)$$

(1.43), (1.44) 分别相加和相减, 得

$$\begin{cases} 4(a_{n+1} + b_{n+1}) = 2(a_n + b_n) \Rightarrow (a_{n+1} + b_{n+1}) = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ 4(a_{n+1} - b_{n+1}) = 4(a_n - b_n) + 8 \Rightarrow (a_{n+1} - b_{n+1}) = (a_n - b_n) + 2 \end{cases} \quad (1.45)$$

$$\begin{cases} 4(a_{n+1} + b_{n+1}) = 2(a_n + b_n) \Rightarrow (a_{n+1} + b_{n+1}) = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ 4(a_{n+1} - b_{n+1}) = 4(a_n - b_n) + 8 \Rightarrow (a_{n+1} - b_{n+1}) = (a_n - b_n) + 2 \end{cases} \quad (1.46)$$

由 (1.45) 知数列 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为 $a_1 + b_1 = 1$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

由 (1.46) 知数列 $\{a_n - b_n\}$ 是首项为 $a_1 - b_1 = -2$, 公差为 2 的等差数列.

(2) 由 (1) 知

$$\begin{cases} a_n + b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ a_n - b_n = 2n - 4 \end{cases} \quad (1.47)$$

$$(1.48)$$

(1.47), (1.48) 相加并化简得 $a_n = \frac{1}{2^n} + n - 2$, 采用分组求和法可得 $S_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{1}{2^n}$.

1.5 利用“整除”思想求解数列中“不定方程”

利用“整除”思想是求解“不定方程”的一种常用方法, 也符合高中学生的认知水平. 通常的处理方法是先进行变量分离 (将其中一个未知数用另一个或两个表示), 然后利用整除思想进行分类讨论.

例 1.64 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d > 0$, 其前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $S_2 \cdot S_3 = 36$.

(1) 求 d 及 S_n ;

(2) 求 $m, k (m, k \in \mathbf{N}^*)$ 的值, 使得 $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} = 65$.

解 依题意

(1) $d = 2$ 及 $S_n = n^2$;

(2) $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} = S_{m+k} - S_{m-1} = (m+k)^2 - (m-1)^2 = 65$, 则

$$2m = \frac{65}{k+1} - k + 1 \quad (1.49)$$

因为 $m, k \in \mathbf{N}^*$, 则 $k+1 \geq 2$,

① $k+1 = 5$, 此时 $k = 4$, $m = 5$;

② $k+1 = 13$, 此时 $k = 12$, $m = -3$ (舍去);

③ $k+1 = 65$, 此时 $k = 32$, $m = -15$ (舍去).

综上, $k = 4$, $m = 5$.

例 1.65 已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 且 $a_2^2 + a_3^2 = a_4^2 + a_5^2$, $S_7 = 7$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n ;

(2) 试求所有的正整数 m , 使得 $\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$ 为数列 $\{a_n\}$ 中的项.

解 依题意

(1) $a_n = 2n - 7$ 及 $S_n = n^2 - 6n$;

(2) 设 $\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} = a_n$, 则

$$\frac{(2m-7)(2m-5)}{2m-3} = 2n-7 \quad (1.50)$$

令 $2m-3 = t$ ($t \geq -1$ 且为奇数), 则

$$2n-7 = \frac{t^2 - 6t + 8}{t} = t - 6 + \frac{8}{t} \quad (1.51)$$

依题, t 整除 8, 又 t 为奇数, 则 $t = \pm 1$,

① $t = 1$, 此时 $m = 2$, $n = 5$;

② $t = -1$, 此时 $m = 1$, $n = -4$ (舍去).

综上, $m = 2$.

例 1.66 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 7n + 2$, 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = n^2$, 若将数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 中相同的项按从小到大的顺序排列后看作数列 $\{c_n\}$, 则 c_9 的值为 .

解 依题意, 令 $a_n = b_m \Rightarrow n = \frac{m^2 - 2}{7}$, 设 $k \in \mathbf{Z}$, 则

① 若 $m = 7k$, 则 $n = \frac{49k^2 - 2}{7} = 7k^2 - \frac{2}{7}$ (舍去)

② 若 $m = 7k + 1$, 则 $n = \frac{(7k+1)^2 - 2}{7} = 7k^2 + 2k - \frac{1}{7}$ (舍去)

③ 若 $m = 7k + 2$, 则 $n = \frac{(7k+2)^2 - 2}{7} = 7k^2 + 4k + \frac{2}{7}$ (舍去)

④ 若 $m = 7k + 3$, 则 $n = \frac{(7k+3)^2 - 2}{7} = 7k^2 + 6k + 1$ (符合)

⑤ 若 $m = 7k + 4$, 则 $n = \frac{(7k+4)^2 - 2}{7} = 7k^2 + 8k + 2$ (符合)

⑥ 若 $m = 7k + 5$, 则 $n = \frac{(7k+5)^2 - 2}{7} = 7k^2 + 10k + \frac{23}{7}$ (舍去)

⑦ 若 $m = 7k + 6$, 则 $n = \frac{(7k+6)^2 - 2}{7} = 7k^2 + 12k + \frac{34}{7}$ (舍去)

综上, 当 $m = 7k + 3$ 或 $m = 7k + 4$ 时, b_m 才能在 $\{a_n\}$ 中出现, 即为公共项, 公共项为 $b_3, b_4, b_{10}, b_{11}, b_{17}, b_{18}, b_{24}, b_{25}, \dots$, 故 $c_9 = 31^2 = 961$.

1.6 数列放缩

1.6.1 伪等比变等比

指数型伪等比变等比

若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式含有 q^n 这样指数函数的式子, 我们采用伪等比放缩法, 即作商 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, 使之大于或小于一个常数, 这个常数即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的极限值, 然后将 $\{a_n\}$ 放缩成等比数列.

例 1.67 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$, 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$.

证 令 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 则 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^n - 1}{3^{n+1} - 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^n - 1}{3^n - \frac{1}{3}} < \frac{1}{3}$, 故 $b_{n+1} < \frac{1}{3} \cdot b_n$, 于是从第 **二** 项起

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n < b_1 + \frac{1}{3} \cdot b_1 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot b_1 = \frac{1 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{3}{2}$$

注 解题过程中进行了两次放缩, 第一次是在 **伪等比变等比** 时, 第二次是等比数列求和后进行了 **丢项**.

从第几项起开始放缩我们观察前几项的分母, 和不等号右边的分母有共性即可 (最多第四项).

例 1.68 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^n - 2^n$, 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{13}{10}$.

证 令 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 则 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^n - 2^n}{3^{n+1} - 2^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^n - 2^n}{3^n - \frac{2}{3} \cdot 2^n} < \frac{1}{3}$, 故 $b_{n+1} < \frac{1}{3} \cdot b_n$, 于是从第 **三** 项起

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n < b_1 + b_2 + \frac{1}{3} \cdot b_2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \cdot b_2 = 1 + \frac{\frac{1}{5} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]}{1 - \frac{1}{3}} < 1 + \frac{3}{10} = \frac{13}{10}$$

例 1.69 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$, 证明: 对一切正整数 n , 有

$$\frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} < \frac{34}{21}.$$

证 令 $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$, 则 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n - 1}{2^n - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2}$, 故 $b_{n+1} < \frac{1}{2} \cdot b_n$, 于是从第 **四** 项起

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n < b_1 + b_2 + b_3 + \frac{1}{2} \cdot b_3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \cdot b_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{7} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \frac{34}{21}$$

1.6.2 二次函数型裂项

二次函数型变裂项

若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式分母含有 $n^2 + bn + c$ 这样二次函数的式子, 我们利用配方把分母放缩成 **可平方差** 的二次函数进而化成两个一次函数 (等差数列相邻两项) 之积.

$$n^2 + bn + c = \left(n + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4c}{4} \geq \left(n + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4}$$

其中 k 为正整数且 $k^2 \geq b^2 - 4ac$.

例 1.70 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(2n+1)} < \frac{2}{5}$.

证 因为

$$\begin{aligned} (n+1)(2n+1) &= 2n^2 + 3n + 1 = 2\left(n + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left[\left(n + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] > 2\left[\left(n + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{8}(4n+1)(4n+5) \end{aligned}$$

则 $\frac{1}{(n+1)(2n+1)} < \frac{8}{(4n+1)(4n+5)} = 2\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}\right)$, 于是

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(2n+1)} < 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4n+5}\right) < \frac{2}{5}$$

例 1.71 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$.

证 因为 $(2n+1)^2 = 4\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 > 4\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = 4(n+1)n$, 则

$$\frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4(n+1)n} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \text{ 于是 } \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{4}.$$

例 1.72 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n$, 证明: 对一切正整数 n , 有

$$\frac{1}{a_1(a_1+1)} + \frac{1}{a_2(a_2+1)} + \cdots + \frac{1}{a_n(a_n+1)} < \frac{1}{3}.$$

证 因为

$$a_n(a_n+1) = (2n)(2n+1) = 4n^2 + 2n = 4\left[\left(n + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] > 4\left[\left(n + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}(4n-1)(4n+3)$$

则 $\frac{1}{(2n)(2n+1)} < \frac{4}{(4n-1)(4n+3)} = \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right)$, 于是

$$\frac{1}{a_1(a_1+1)} + \frac{1}{a_2(a_2+1)} + \cdots + \frac{1}{a_n(a_n+1)} < \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) < \frac{1}{3}$$

例 1.73 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2$, 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}$.

证 易知 $\frac{1}{a_1} = 1 < \frac{7}{4}$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{5}{4} < \frac{7}{4}$, 又因为 $[n^2 > n^2 - \frac{4}{4} = (n-1)(n+1)]$, 则

$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$, 于是从第三项起

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{6}{4} < \frac{7}{4}$$

1.6.3 利用平均不等式放缩

例 1.74 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n^2 - a_{n+1} + 3 = 0$, 求证: $\frac{1}{a_1+2} + \frac{1}{a_2+2} + \cdots + \frac{1}{a_n+2} < \frac{2}{3}$.

证 由平均值不等式得 $a_{n+1} = a_n^2 + 3 = (a_n^2 + 1) + 2 \geq 2a_n + 2$, $\therefore a_{n+1} + 2 \geq 2(a_n + 2)$, 于是

$$a_n + 2 = \frac{a_n + 2}{a_{n-1} + 2} \cdot \frac{a_{n-1} + 2}{a_{n-2} + 2} \cdots \frac{a_2 + 2}{a_1 + 2} \cdot (a_1 + 2) \geq 3 \cdot 2^{n-1}$$

故

$$\frac{1}{a_1+2} + \frac{1}{a_2+2} + \cdots + \frac{1}{a_n+2} \leq \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) < \frac{2}{3}$$

第二章 向量

2.1 重心质量法

定理 2.1: 杠杆原理

- 两个小球 A, B , 如果质量相等, 如图 2.1, 那么它们的重心是 AB 的中点 E .
- 如果质量不等, 质量比为 $\frac{m}{n}$, 如图 2.2, 那么重心 E 仍在 AB 上, 而 $\frac{AE}{EB} = \frac{n}{m}$, 即杠杆原理.
- 如果三个质量相等 (都等于 1) 的小球 A, B, C 构成三角形 ABC , 要求它们的重心可以分为两步: 先求出 B, C 的重心, 即 B, C 的中点 D , 可以用质量为 $2 (= 1 + 1)$ 的小球放在 D 点, 以取代 B, C 两个小球. 再求 A, D 的重心, 由于 D 处的质量为 2 , A 处的质量为 1 , 所以重心 G 在 AD 上, 且分 AD 为 $2 : 1$, 即 $AG : GD = 2 : 1$.

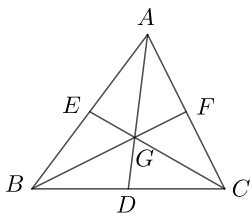


图 2.1

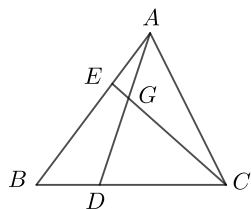


图 2.2

例 2.1 如图 2.2, $\triangle ABC$ 中, 边 AB 上有一点 E , BC 上有一点 D , AD 交 CE 于点 G , 当 $AE : EB = 1 : 2$, $BD : DC = 1 : 2$ 时, $AG : GD$ 等于多少?

解 我们在 C 处放质量为 1 的小球, B 处放质量为 2 的小球, A 处放质量为 4 的小球. 此时 AB, BC 的重心 E, D 满足 $AE : EB = 1 : 2$, $BD : DC = 1 : 2$, 我们将 B, C 的质量集中在 D 点, 质量为 3, A 点质量为 4. 故 $AG : GD = 3 : 4$. 同样如果需要, 我们可以求得 $EG : GC = 1 : 6$.

例 2.2 如图 2.3 所示, 三角形 ABC 中, 点 M 是 BC 的中点, $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{NC}$, 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AM}$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 $\frac{4}{5}$.

变式训练 EXERCISES

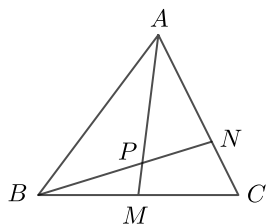


图 2.3

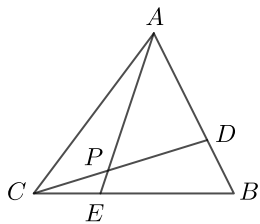


图 2.4

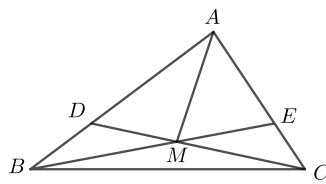


图 2.5

99. 如图 2.4 所示, 三角形 ABC 的面积为 14, 且 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EC}$, 则 $\triangle APC$ 的面积是 .

100. 如图 2.5, $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EC}$, BE 交 CD 于 M , $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $xy = (\quad)$
 (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{4}{25}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{9}{25}$

燕尾模型

如图 2.6, 在 $\triangle ABC$ 中, AD , BE , CF 交于同一点 O , 则

$$(1) \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}} = \frac{BD}{CD} \quad (2) \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle COB}} = \frac{AE}{CE} \quad (3) \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOC}} = \frac{BF}{AF}$$

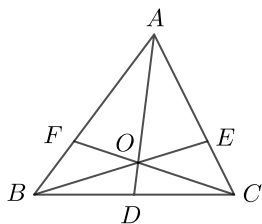


图 2.6

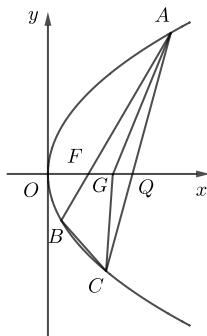


图 2.7

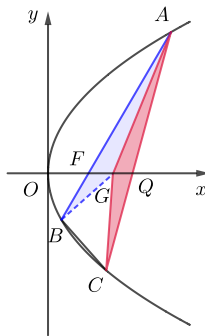


图 2.8

例 2.3 【2019 浙江节选】如图 2.7, 已知点 $F(1,0)$ 为抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点, 过点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 点 C 在抛物线上, 使得 $\triangle ABC$ 的重心 G 在 x 轴上, 直线 AC 交 x 轴于点 Q , 且 Q 在点 F 右侧. 记 $\triangle AFG$, $\triangle CQG$ 的面积为 S_1, S_2 .

(1) 求 p 的值及抛物线的准线方程;

(2) 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值.

解 (1) $p = 2$, 准线方程 $x = -1$;

(2) 依题, 设 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \mu \overrightarrow{AC}$, 则由重心向量可得 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3\lambda} \overrightarrow{AF} + \frac{1}{3\mu} \overrightarrow{AQ}$, 再由 F, G, Q 三点共线得 $\frac{1}{3\lambda} + \frac{1}{3\mu} = 1 \Rightarrow \mu = \frac{\lambda}{3\lambda - 1} \in (0, 1)$, 所以 $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

于是

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\lambda S_{\triangle ABG}}{(1-\mu)S_{\triangle ACG}} \stackrel{\text{燕尾模型}}{=} \frac{\lambda}{1-\mu} = \frac{\lambda(3\lambda-1)}{2\lambda-1} \quad (2.1)$$

令 $2\lambda - 1 = t \in (0, 1)$, 则 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4} \left(3t + \frac{1}{t} + 4 \right) \geq \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$, 当且仅当 $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立.

2.2 向量的线性运算

定理 2.2: 三角形中线

如图 2.9 所示, 三角形 ABC 中, 点 D 是边 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$.

例 2.4 $\triangle ABC$ 中, $AC = 4$, $AB = 3$, BC 边上的中线 $AD = \frac{\sqrt{37}}{2}$, 则 $\angle A$ 是 ()

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

解 利用向量中点定理得 $|\overrightarrow{2AD}|^2 = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, 所以

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \Rightarrow \cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3}.$$

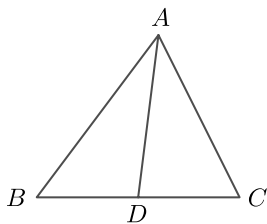


图 2.9

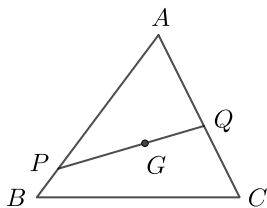


图 2.10

定理 2.3: 重心一

如图 2.10 所示, 三角形 ABC 中, 点 G 是重心, 过点 G 的一条线分别交直线 AB , AC 于点 P ,

Q , 若 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = n\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 3$.

定理 2.4: 重心二

已知点 P, G 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 则 $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) \Leftrightarrow G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心.

例 2.5 已知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 G 的一条线分别交 AB, AC 于点 P, Q , 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, 则当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle APQ$ 的面积之比为 $\frac{20}{9}$ 时, 实数 $\lambda = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 设 $\overrightarrow{AQ} = \mu \overrightarrow{AC}$, 所以 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 3$, 又 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APQ}} = \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AQ}|} = \frac{20}{9} \Rightarrow \frac{1}{\lambda\mu} = \frac{20}{9}$, 由以上两式可解得 $\lambda = \frac{3}{4}$ 或 $\frac{3}{5}$.

变式训练 EXERCISES

101. 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 是 AB 的中点, $\frac{1}{2}\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FC}$, 若 $\overrightarrow{EF} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD}$, 则 $m + n =$ ()

- (A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{7}{6}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

102. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 若 $\overrightarrow{CE} = 4\overrightarrow{ED}$, 则 $\overrightarrow{BE} =$ ()

- (A) $-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (B) $\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ (C) $-\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$ (D) $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

103. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$, E, F 分别为 BC, CD 的中点, 则 ()

- (A) $\overrightarrow{AE} = \frac{9}{10}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{BF}$ (B) $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{BF}$
(C) $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$ (D) $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$

104. 已知 $\triangle ABC$ 和点 M 满足 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \mathbf{0}$, 若存在实数 m 使得 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AM}$ 成立, 则 $m = \underline{\hspace{1cm}}$.

105. 已知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 G 的一条线分别交 AB, AC 于点 M, N , 若 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$, 则 $3x + y$ 的最小值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

例 2.6 向量 $|\overrightarrow{OA}| = 1$, $|\overrightarrow{OB}| = k$, $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$, 点 C 在 $\angle AOB$ 内, $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$, 若 $\overrightarrow{OC} = 2m\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} (m \neq 0)$, 则 $k = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 在 $\overrightarrow{OC} = 2m\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}$ 中, 两边与向量 $\overrightarrow{OA}$ 作内积
 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = (2m\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA} \Rightarrow 4m - km = 0 \Rightarrow k = 4$.

例 2.7 如图 2.11 所示, 三个向量 $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, 其中 $\vec{OA}$ 与 $\vec{OB}$ 的夹角为 120° , $\vec{OA}$ 与 $\vec{OC}$ 的夹角为 30° , 且 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 1$, $|\vec{OC}| = 2\sqrt{3}$, 若 $\vec{OC} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ▲ .

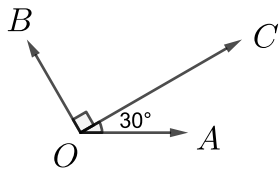


图 2.11

解 在 $\vec{OC} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB}$ 中, 两边分别与向量 $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ 作内积

$$\begin{cases} \vec{OC} \cdot \vec{OA} = \lambda|\vec{OA}|^2 + \mu\vec{OB} \cdot \vec{OA} \\ \vec{OC} \cdot \vec{OB} = \mu|\vec{OB}|^2 + \lambda\vec{OB} \cdot \vec{OA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \frac{\mu}{2} = 3 \\ \mu - \frac{\lambda}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

变式训练 EXERCISES

- 106.** 若 A, B, C 分别是单位圆上的三个点, 且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 若存在实数 λ, μ , 使得 $\vec{OC} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB}$, 则 ()
- (A) $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ (B) $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 1$ (C) $\lambda\mu = 1$ (D) $\lambda + \mu = 1$

2.3 平面向量共线定理

定理 2.5: 平面向量共线定理

- 如图 2.12, 若坐标平面内的三点 A, B, C 共线 $\Leftrightarrow$ 存在实数 $\lambda + \mu = 1$, 使得 $\vec{OC} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB}$.
- 若坐标平面内的三点 A, B, C 共线, O 为坐标原点, 则存在三个均不为零的实数 l, m, n , 使得 $l\vec{OA} + m\vec{OB} + n\vec{OC} = \mathbf{0}$, 且 $l + m + n = 0$, 反之也成立.

例 2.8 如图 2.13, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$, 点 M, N 分别为 DC, CB 的中点, 若 $\vec{AB} = \lambda\vec{AM} + \mu\vec{AN}$, 则 $\lambda + \mu =$ ▲ .

解 如图 2.14 所示, 延长 MN , 与 AB 交于点 E , 由 M, N, E 三点共线知

$\vec{AE} = m\vec{AM} + n\vec{AN} (m + n = 1)$, 又易知 $\triangle MNC \cong \triangle ENB$. 故

$$\frac{5}{4}\vec{AB} = m\vec{AM} + n\vec{AN} \Rightarrow \vec{AB} = \frac{4m}{5}\vec{AM} + \frac{4n}{5}\vec{AN} \Rightarrow \lambda + \mu = \frac{4}{5}.$$

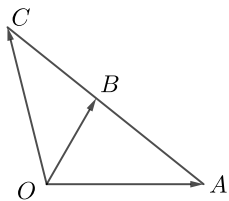


图 2.12

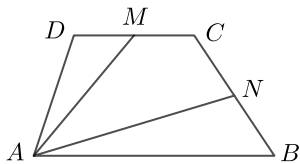


图 2.13

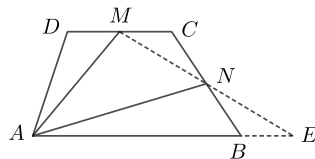


图 2.14

例 2.9 若直线 l 上存在三个不同的点 A, B, C , 使得关于实数 x 的方程 $x^2\vec{OA} + x\vec{OB} + \vec{BC} = \mathbf{0}$ 有解 (其中 $O \notin l$), 则此方程的解为 ()

(A) $\{-1\}$ (B) $\emptyset$ (C) $\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ (D) $\{-1, 0\}$

解 依题意 $x^2\vec{OA} + x\vec{OB} + (\vec{OC} - \vec{OB}) = \mathbf{0}$. 故 $\vec{OC} = -x^2\vec{OA} + (1-x)\vec{OB}$, 因为 A, B, C 三点共线, 所以 $-x^2 + 1 - x = 1 \Rightarrow x = -1$ 或 0 . 经检验 0 不合题意, 舍去. 故选 A.

变式训练 EXERCISES

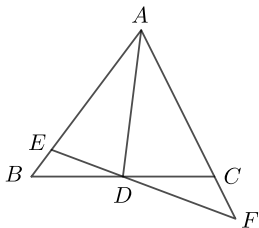


图 2.15

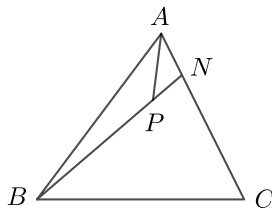


图 2.16

107. 如图 2.15 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边上的中点, 过点 D 的直线分别交直线 AB, AC 于点 E, F , 若 $\vec{AE} = \lambda\vec{AB}$, $\vec{AF} = \mu\vec{AC}$. 其中 $\lambda > 0, \mu > 0$, 则 $\lambda\mu$ 的最小值是 ()

(A) 1

(B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

108. 如图 2.16 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{NC}$, P 是 BN 上一点, 若 $\vec{AP} = m\vec{AB} + \frac{2}{9}\vec{AC}$, 则 m 的值为 .

109. M 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上任意一点, N 为 AM 的中点, 若 $\vec{AN} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ()

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$

(D) 1

110. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 为 BC 的中点, 过点 O 的直线分别交直线 AB, AC 于不同的两点 M, N . 若 $\vec{AB} = m\vec{AM}$, $\vec{AC} = n\vec{AN}$, 则 $m + n$ 的值为 .

111. 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 G 作直线 MN 与 AB, AC 分别交于点 M, N , 且 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$ ($x, y > 0$), 则 $3x + y$ 的最小值是 ()

(A) $\frac{8}{3}$

(B) $\frac{7}{2}$

(C) $\frac{5}{2}$

(D) $\frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

112. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若点 A, B, C, O 满足 ① $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$ ($\lambda \neq 0$), ② A, B, O 确定一个平面, ③ $\overrightarrow{OB} = a_3\overrightarrow{OA} + a_{98}\overrightarrow{OC}$, 则 $S_{100} =$ ()

(A) 29

(B) 40

(C) 45

(D) 50

113. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2\sqrt{3}$, O 为三角形外接圆的圆心, 若 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 且 $x + 2y = 1$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 .

2.4 追本溯源, 等和线解向量

等和线这个词汇, 由于教材上并没出现, 一些老师和学生初次见到这个技巧时, 难免眼前一亮, 原来还可以这样做! 其实等和线的本质其实就是平面向量共线定理 2.5 的延伸.

例 2.10 在 $\triangle PAB$ 所在平面上的点 C 满足 $\overrightarrow{PC} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$, 且 $x + y = 2$, 请指出点 C 的位置.

解 令 $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PD} = (x + y)\overrightarrow{PD}$, 则 $\overrightarrow{PD} = \frac{x}{x + y}\overrightarrow{PA} + \frac{y}{x + y}\overrightarrow{PB}$, 由 $\frac{x}{x + y} + \frac{y}{x + y} = 1$ 得点 A, B, D 共线, 即点 D 在直线 AB 上, 再由 $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PD}$ 知点 C 在直线 $A'B'$ 上, 其中 $PA' = 2PA$, $PB' = 2PB$, 如图 2.17.

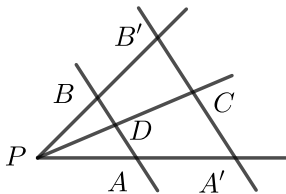


图 2.17

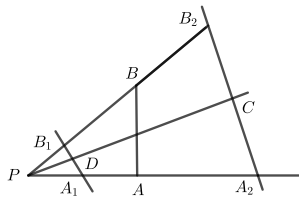


图 2.18

例 2.11 在 $\triangle PAB$ 所在平面上的点 C 满足 $\overrightarrow{PC} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$, 且 $2x + 3y = 5$, 请指出点 C 的位置.

解 令 $\overrightarrow{PC} = 5\overrightarrow{PD} = (2x + 3y)\overrightarrow{PD}$, 则 $\overrightarrow{PD} = \frac{x}{2x + 3y}\overrightarrow{PA} + \frac{y}{2x + 3y}\overrightarrow{PB}$, 即

$\overrightarrow{PD} = \frac{2x}{2x + 3y}\overrightarrow{PA_1} + \frac{3y}{2x + 3y}\overrightarrow{PB_1}$, 其中 $\overrightarrow{PA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$, 由 $\frac{2x}{2x + 3y} + \frac{3y}{2x + 3y} = 1$ 得点

A_1, B_1, D 共线, 即点 D 在直线 A_1B_1 上, 再由 $\overrightarrow{PC} = 5\overrightarrow{PD}$ 知点 C 在直线 A_2B_2 上, 其中 $PA_2 = 5PA_1$, $PB_2 = 5PB_1$, 如图 2.18.

定义 2.1: 等和线

平面内一组基底 $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ 及任一向量 $\vec{OP}$, $\vec{OP} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 若点 P 在直线 AB 上或者在平行于 AB 的直线上, 则 $\lambda + \mu = k$ (定值), 反之也成立, 我们把直线 AB 以及与直线 AB 平行的直线称为等和线. 如图 2.19, 则有 $k = \frac{|\vec{OP}|}{|\vec{OQ}|} = \frac{|\vec{OA}_1|}{|\vec{OA}|} = \frac{|\vec{OB}_1|}{|\vec{OB}|}$.

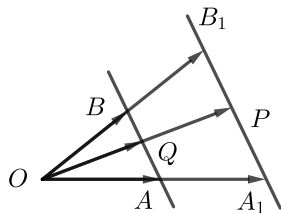


图 2.19

推论 2.1. 如图 2.20 所示, 给定两个长度为 a 的平面向量 $\vec{OA}$ 和 $\vec{OB}$, 其夹角 $\theta \in [0, \pi)$, 点 C 在以 O 为圆心的圆弧 $\widehat{AB}$ 上变动, 若 $\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$, 则 $x + y$ 的最大值是 $\sqrt{\frac{2}{\cos \theta + 1}}$.

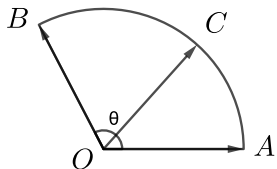


图 2.20

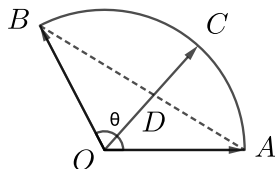


图 2.21

解 如图 2.21 所示, 连接 AB , 与 OC 交于点 D , 设

$$\vec{OC} = (x + y)\vec{OD} = x\vec{OA} + y\vec{OB} \Rightarrow \vec{OD} = \frac{x}{x + y}\vec{OA} + \frac{y}{x + y}\vec{OB}$$

易知 A, B, D 三点共线, 由 $x + y = \frac{|\vec{OC}|}{|\vec{OD}|}$. 易知当 C 为 $\widehat{AB}$ 的中点时, $x + y$ 取最大值,

$$x + y = \frac{|\vec{OC}|}{|\vec{OD}|} = \frac{a}{a \cdot \cos \frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\cos \theta + 1}}$$

例 2.12 如图 2.22, 给定两个长度为 1 的平面向量 $\vec{OA}$ 和 $\vec{OB}$, 其夹角为 60° , 点 C 在以 O 为圆心的圆弧 AB 上变动, 若 $\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$, 则 $x + 2y$ 的最大值是 .

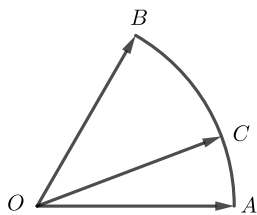


图 2.22

解 令 $x + 2y = t$, 对式子 $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ 两边取模, 可得 $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$, 则 $(t - 2y)^2 + y^2 + (t - 2y)y - 1 = 0 \Rightarrow 3y^2 - 3ty + t^2 - 1 = 0$, $\Delta \geq 0 \Rightarrow -2 \leq t \leq 2$, 所以 $x + 2y$ 的最大值是 2.

例 2.13 如图 2.23 所示, 平面内有三个向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, 其中 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 120° , $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 30° , 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$, $|\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{3}$, 若 $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 .

解 如图 2.24, 易知 $\lambda + \mu = \frac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OD}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 6$.

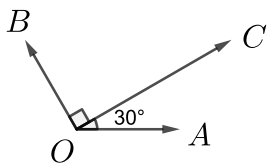


图 2.23

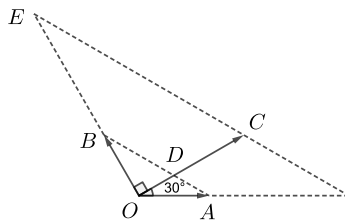


图 2.24

例 2.14 如图 2.25, 平行四边形 $ABCD$ 中 $AB = 3$, $AD = 2$, $\angle BAD = 120^\circ$, P 是平行四边形 $ABCD$ 内一点, 且 $AP = 1$, 若 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, 则 $3x + 2y$ 的最大值为 .

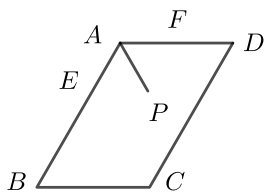


图 2.25

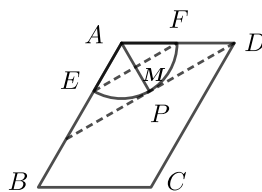


图 2.26

解 如图 2.26 所示, 根据题意 $\overrightarrow{AP} = (3x + 2y)\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, 所以

$\overrightarrow{AM} = \frac{x}{3x + 2y}\overrightarrow{AB} + \frac{y}{3x + 2y}\overrightarrow{AD} = \frac{3x}{3x + 2y} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{3} + \frac{2y}{3x + 2y} \cdot \frac{\overrightarrow{AD}}{2} = \frac{3x}{3x + 2y} \cdot \overrightarrow{AE} + \frac{2y}{3x + 2y} \cdot \overrightarrow{AF}$, 易知 E, M, F 三点共线, 所以 $3x + 2y = \frac{AP}{AM}$, 因为点 P 在以点 A 为圆心, 半径为 1 的圆上, 所以 $3x + 2y$

有最大值 $\frac{AP}{AM} = \frac{1}{AM} = 2$ (AM 的最小值为 $\frac{1}{2}$).

变式训练 EXERCISES

114. 给定两个长度为 1 的平面向量 $\vec{OA}$ 和 $\vec{OB}$, 其夹角为 120° , 点 C 在以 O 为圆心的圆弧 AB 上变动. 若 $\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$, 则 $x+y$ 的最大值是 .
115. 【2017 全国 III】在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1$, $AD=2$, 动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上, 若 $\vec{AP} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AD}$, 则 $\lambda + \mu$ 的最大值为 ()
- (A) 3 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

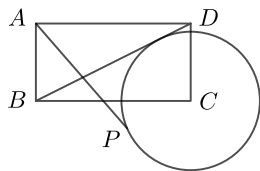


图 2.27

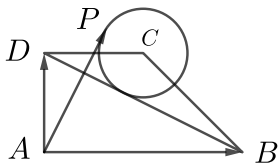


图 2.28

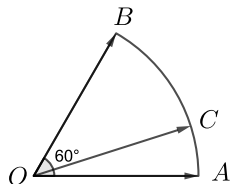


图 2.29

116. 如图 2.28, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD = 2AD = 2$, 动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上, 若 $\vec{AP} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AD}$, 则 $\lambda + \mu$ 的最大值为 ()
- (A) -1 (B) 2 (C) 1 (D) -2
117. 如图 2.29, 平面内三个单位向量 $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, 且 $\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = 60^\circ$, 若 $\vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$ ($m, n \in \mathbf{R}$), 则 $m+n$ 的最大值是 .

2.5 对面的女孩看过来

定理 2.6: 对面的女孩看过来

如图 2.30, 在 $\triangle ABC$ 中, 若 D 是 BC 上一点, 且 $\vec{BD} = \lambda\vec{DC}$ ($\lambda \neq -1$), 则向量 $\vec{AD} = \frac{\vec{AB} + \lambda\vec{AC}}{1 + \lambda}$.

- 例 2.15 如图 2.31 所示, 三角形 ABC 中, $\vec{BD} = 2\vec{DC}$, 若 $\vec{AB} = \mathbf{a}$, $\vec{AC} = \mathbf{b}$, 则 $\vec{AD} =$ ()
- (A) $\frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}$ (B) $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$ (C) $\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}$ (D) $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$

解 D

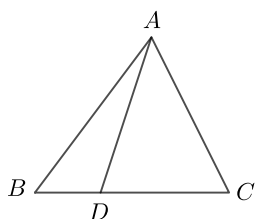


图 2.30

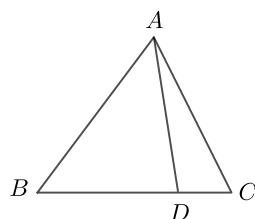


图 2.31

例 2.16 已知点 $A(\sqrt{3}, 1)$, $B(0, 0)$, $C(\sqrt{3}, 0)$, 设 $\angle BAC$ 的平分线 AE 与 BC 相交于 E , 那么有 $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{CE}$, 其中 $\lambda =$ ()

- (A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

解 C

变式训练 EXERCISES

118. 如图 2.32 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D , 若 $AB = 4$, 且 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{AB}$, 则 AD 的长为 ()

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) $5\sqrt{3}$

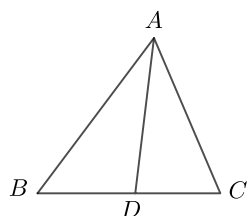


图 2.32

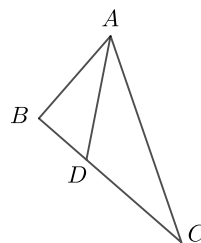


图 2.33

119. 如图 2.33 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AD} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$, 又 $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AC}| = 4$, 若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$,

$\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{BD} =$ ()

- (A) $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$ (B) $\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}$ (C) $-\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$ (D) $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$

120. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 BC 边上, $BD = 2DC$, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{BE} =$ ()

- (A) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ (B) $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$ (C) $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ (D) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$

121. $\triangle ABC$ 中, 点 D 为 BC 的中点, $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AE}$, M 为 AD 与 CE 的交点, 若 $\overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则 $x - y =$ ()
- (A) -1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) 1

2.6 向量恒等式

2.6.1 平行四边形恒等式

推论 2.2. 平行四边形对角线的平方和等于四条边的平方和.

例 2.17 记 $\max\{x, y\} = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & x < y \end{cases}$, $\min\{x, y\} = \begin{cases} y, & x \geq y \\ x, & x < y \end{cases}$, 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为平面向量, 则 ()

- (A) $\min\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|\} \leq \min\{|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|\}$ (B) $\min\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|\} \geq \min\{|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|\}$
 (C) $\max\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2\} \leq |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ (D) $\max\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2\} \geq |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$

解 由推论 2.2 知 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$, 所以 $\max\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2\} \geq |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$, 故选 D.

2.6.2 极化恒等式

定义 2.2: 极化恒等式

如图 2.34 所示, 三角形 ABC 中, 点 D 是边 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{BD}^2$.

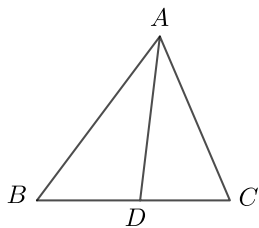


图 2.34

证 由向量平行四边形法则可知

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \end{cases} \quad (2.3)$$

(2.2)² - (2.3)² 得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{BD}^2$.

例 2.18 已知 $M(x_0, y_0)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上的一点, F_1, F_2 为双曲线的焦点, 若 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} < 0$, 则 y_0 的取值范围为 ()

- (A) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (B) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ (C) $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ (D) $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

解法一 由极化恒等式可知 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = |\overrightarrow{MO}|^2 - c^2 = |\overrightarrow{MO}|^2 - 3 < 0$, 于是 $\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 < 3 \\ \frac{x_0^2}{2} - y_0^2 = 1 \end{cases}$ 解得

$y_0^2 < \frac{1}{3}$, 选 A.

解法二 $\begin{cases} \overrightarrow{MF_1} = (-\sqrt{3} - x_0, -y_0) \\ \overrightarrow{MF_2} = (\sqrt{3} - x_0, -y_0) \end{cases} \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 < 3$, 与双曲线方程联立 $\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 < 3 \\ \frac{x_0^2}{2} - y_0^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y_0^2 < \frac{1}{3}$

例 2.19 已知球 O 的半径为 2, A, B 是球面上的两点, 且 $AB = 2\sqrt{3}$, 若点 P 是球面上任意一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 ()

- (A) $[-1, 3]$ (B) $[-2, 6]$ (C) $[0, 1]$ (D) $[0, 3]$

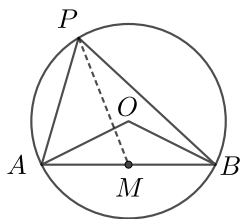


图 2.35

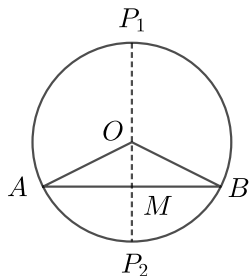


图 2.36

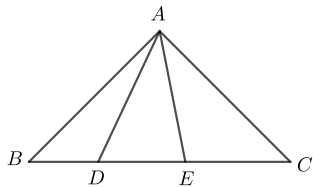
解 画出 A, B 所在的大圆, 如图 2.35, 取 AB 中点 M , 依题意易知 $OM = 1$, 根据极化恒等式得到 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{AM}|^2 = |\overrightarrow{PM}|^2 - 3$, 如图 2.36, 由点圆最值理论可知 $(\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB})_{\max} = |\overrightarrow{P_1M}|^2 - 3 = 9 - 3 = 6$, $(\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB})_{\min} = |\overrightarrow{P_2M}|^2 - 3 = 1 - 3 = -2$, 故选 B.

例 2.20 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 若双曲线 C 上存在点 P 满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = -2a^2$, 则双曲线 C 离心率的取值范围为 .

解 根据极化恒等式得到 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = |\overrightarrow{PO}|^2 - c^2 = -2a^2$, 由存在性问题可得 $a^2 - c^2 \leq -2a^2 \Rightarrow 3a^2 \leq c^2 \Rightarrow e \geq \sqrt{3}$, 答案为 $[\sqrt{3}, +\infty)$.

变式训练 EXERCISES

122. 已知 AB 是圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 的直径, 点 P 为直线 $x-y+1=0$ 上任意一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为 ()
- (A) 1 (B) 0 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}-1$



123. 如图, 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = \sqrt{2}$, D, E 是线段 BC 上的点, 且 $DE = \frac{1}{3}BC$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$ 的取值范围是 ()
- (A) $\left[\frac{8}{9}, \frac{4}{3}\right]$ (B) $\left[\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right]$ (C) $\left[\frac{8}{9}, \frac{8}{3}\right]$ (D) $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$

124. 如图 2.37 所示, 在三角形 ABC 中, P_0 是 AB 上一定点, 满足 $P_0B = \frac{1}{4}AB$, 且对 AB 边上任一点 P , 恒有 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} \geq \overrightarrow{P_0B} \cdot \overrightarrow{P_0C}$, 则 ()
- (A) $\angle ABC = 90^\circ$ (B) $\angle BAC = 90^\circ$ (C) $AB = AC$ (D) $AC = BC$

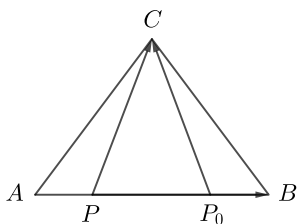


图 2.37

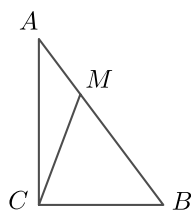


图 2.38

125. 如图 2.38, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 且 $BC = 3$, 点 M 满足 $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MA}$, 则 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB}$ 等于 ()
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6
126. 已知点 M 是边长为 2 的正方形 $ABCD$ 内一动点 (含边界), 则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 的取值范围是 ()
- (A) $[0, 4]$ (B) $[0, 5]$ (C) $[-1, 5]$ (D) $[-1, 4]$

127. 在边长为 2 的正三角形 ABC 中, 点 P 为平面内一点, 且 $|\overrightarrow{CP}| = \sqrt{3}$, 则 $\overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$ 的取值范围是 ()

(A) $[0, 12]$ (B) $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ (C) $[0, 6]$ (D) $[0, 3]$

128. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $CA = CB = 3$, M, N 是斜边 AB 上两个动点, 且 $MN = \sqrt{2}$, 则 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN}$ 的取值范围为 ()

(A) $[3, 6]$ (B) $[4, 6]$ (C) $\left[2, \frac{5}{2}\right]$ (D) $[2, 4]$

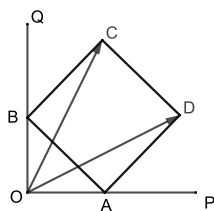


图 2.39

129. 如图 2.39 所示, 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A, B 分别在两条互相垂直的射线 OP, OQ 上滑动, 则 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ 的最大值为 ()

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

130. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, F_1, F_2 为椭圆的左右焦点, 点 P 在椭圆上, 满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 9$, 则 $|PF_1| \cdot |PF_2|$ 的值为 ()

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 15

131. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 在长轴 A_1A_2 上任取一点 M , 过 M 作垂直于 A_1A_2 的直线交椭圆于 P , 则使得 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} < 0$ 的概率为 ()

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

132. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值是 ()

(A) -2 (B) $-\frac{3}{2}$ (C) $-\frac{4}{3}$ (D) -1

133. 如图 2.40 所示, 已知正三角形 ABC 内接于半径为 2 的圆内, 点 P 是圆 O 上的动点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是 ()
- (A) $[0, 6]$ (B) $[-2, 6]$ (C) $[0, 2]$ (D) $[-2, 2]$

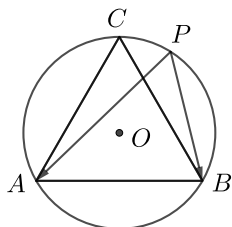


图 2.40

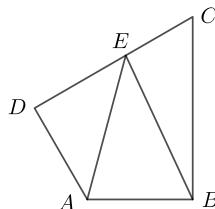


图 2.41

134. 如图 2.41, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$, $AD \perp CD$, $\angle BAD = 120^\circ$, $AB = AD = 1$, 若点 E 为边 CD 上的动点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为 ()
- (A) $\frac{21}{16}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{25}{16}$ (D) 3
135. 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , BC 边上的中线 AD 长度为 3, 边 $BC = 3$, $\angle BAC = 60^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 .
136. 设 $|AB| = 10$, 若平面内点 P 满足对任意的 $\lambda \in \mathbf{R}$, 都有 $|2\overrightarrow{AP} - \lambda\overrightarrow{AB}| \geq 8$, 则下列结论一定正确的是 ()
- (A) $|\overrightarrow{PA}| \geq 5$ (B) $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| \geq 10$ (C) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \geq -9$ (D) $\angle APB \leq 90^\circ$

2.6.3 矩形的两个小性质

矩形向量性质

已知点 P 是矩形 $ABCD$ 所在平面内任意一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$.

证 设矩形对角线交于点 O , 则

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = |\overrightarrow{PO}|^2 - \frac{|\overrightarrow{PC}|^2}{2} \quad (2.4)$$

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} = |\overrightarrow{PO}|^2 - \frac{|\overrightarrow{BD}|^2}{2} \quad (2.5)$$

于是 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$.

引理 2.1. P 是矩形 $ABCD$ 所在平面内任意一点, 则

$$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2 \quad (2.6)$$

证 如图 2.42 所示, 由勾股定理 $|PA|^2 - |PD|^2 = |EA|^2 - |ED|^2 = |FB|^2 - |FC|^2 = |PB|^2 - |PC|^2$, 所以 $|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$.

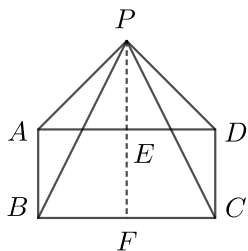


图 2.42

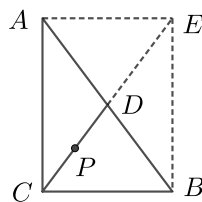


图 2.43

例 2.21 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, D 是斜边 AB 的中点, P 是线段 CD 的中点, 则 $\frac{|PA|^2 + |PB|^2}{|PC|^2} =$ ()

- (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 10

解 如图 2.43 所示, 由式 (2.6) 可知 $|PA|^2 + |PB|^2 = |PC|^2 + |PE|^2 = |PC|^2 + |3PC|^2 = 10|PC|^2$.

变式训练 EXERCISES

137. 已知圆 O 半径为 2, P 为圆内一动点, $OP = 1$, 圆 O 上两动点 A, B 满足 $PA \perp PB$, 存在点 C 使 $PACB$ 成矩形, 则 $\vec{OC} \cdot \vec{OP}$ 的取值范围是 .

2.7 四边形对角线向量定理 (斯坦纳定理)

在 $\triangle ABC$ 中, 根据余弦定理有

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$$

转化为向量形式即得

$$\vec{BC}^2 = \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

或

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - \vec{BC}^2)$$

于是我们可得如下定理:

定理 2.7: 斯坦纳定理

四边形 $ABCD$ (平面或空间均可) 中, 我们有 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2) - (\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2)}{2}$.

证 根据题意, 在 $\triangle ACD$ 中, 利用向量夹角公式以及余弦定理可得

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{CD}^2}{2} \quad (2.7)$$

同理在 $\triangle ACB$ 中,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2} \quad (2.8)$$

由式 (2.7), (2.8) 可知 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2) - (\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2)}{2}$.

推论 2.3. 四边形 $ABCD$ 中的三角形 BCD 沿对角线 BD 翻折时, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 为定值.

推论 2.4. 空间向量涉及折叠的问题, 一定有折痕的向量与任意向量的乘积为定值.

例 2.22 如图 2.44, 已知平面四边形 $ABCD$, $AB = BC = 3$, $CD = 1$, $AD = \sqrt{5}$, $\angle ADC = 90^\circ$, 沿直线 AC 将 $\triangle ADC$ 翻折成 $\triangle AD'C$, 直线 AC 与 BD' 所成角的余弦的最大值是 ▲ .

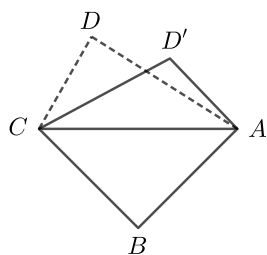


图 2.44

解 由斯坦纳定理得 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD'} = 2$.

$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD'} \rangle = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot |\overrightarrow{BD'}|}$, 当且仅当 BD' 最小时, 直线 AC 与 BD' 所成角的余弦值最大,

又 $\cos \angle ACD = \cos \angle ACB$, 所以, 在翻折过程中, BD' 的最小值为 $BC - CD' = 2$, 此时, 直线 AC 与 BD' 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

2.8 向量的形

例 2.23 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 5$, 则 $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ 的取值范围是 ()

- (A) $[0, 5]$ (B) $[5, 5\sqrt{2}]$ (C) $[5\sqrt{2}, 7]$ (D) $[5, 10]$

解 当两向量其中一个为零向量时, 再由三角形两边之和大于第三边排除 A, C, 由向量平行四边形法则易知 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 所以

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = 25$$

利用三角换元 $\begin{cases} |\mathbf{a}| = 5 \cos \theta \\ |\mathbf{b}| = 5 \sin \theta \end{cases} \Rightarrow |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| = 5\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 5\sqrt{2}$, 选 B.

变式训练 EXERCISES

138. 已知两个夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的单位向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 若向量 $\mathbf{m}$ 满足 $|\mathbf{m} - \mathbf{a} - \mathbf{b}| = 1$, 则 $|\mathbf{m}|$ 的最大值是 ()

- (A) $\sqrt{3} - 1$ (B) $\sqrt{3} + 1$ (C) 2 (D) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + 1$

139. 在 $\triangle ABC$ 所在的平面上有三点 P, Q, R 满足 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} = \overrightarrow{CA}$, 则 $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值是 ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

140. 平面非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{c}$ 为单位向量, 已知 $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) = 0$ 且 $|\vec{a} - \vec{c}| = 3$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 的最大值是 .

141. $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, 且对任意 $x \in \mathbf{R}$, $|x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}| \geq |\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}|$ 恒成立, 则 $\cos \angle ABC =$.

142. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 120° , 且 $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = 2$, 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ 且 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$, 则 $\lambda =$.

143. 已知点 P 是双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 右支上一动点, F_1, F_2 是双曲线的左、右焦点, 动点 Q 满足下列条件: ① $\overrightarrow{QF_2} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{PF_1}}{|\overrightarrow{PF_1}|} + \frac{\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_2}|} \right) = 0$, ② $\overrightarrow{QP} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{PF_1}}{|\overrightarrow{PF_1}|} + \frac{\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_2}|} \right) = \mathbf{0}$, 则点 Q 的轨迹方程为 .

144. 已知向量 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 1$, $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{3}$, 点 C 在 $\angle AOB$ 内, $\angle AOC = 30^\circ$, 设 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, 则 $\frac{m}{n}$ 的值为 ()

- (A) 2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) 3 (D) 4

145. 如图 2.45 所示, E 为中线 AD 上的一个动点, $AD = 2$, 则 $\overrightarrow{EA} \cdot (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC})$ 的最小值为 ()

- (A) -2 (B) -1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 0

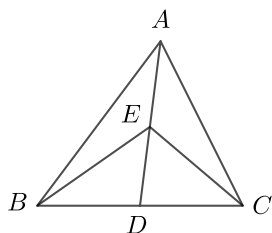


图 2.45

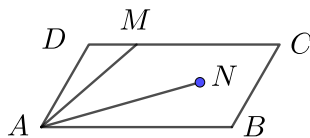


图 2.46

146. 如图 2.46 所示, 平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 2$, $\angle DAB = 60^\circ$, M 是线段 DC 的四等分点, 若 N 为平行四边形内任意一点 (含边界), 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的最大值为 ()

- (A) 13 (B) 0 (C) 8 (D) 5

147. 向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{b}| = 1$, 且 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ 的夹角为 120° , 则 $|\mathbf{a}|$ 的取值范围是 ▲ .

148. 向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. 向量 $\mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}| = 1$, 则 $|\mathbf{c}|$ 的最大值为 ▲ .

149. 向量 $\mathbf{a}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 1$, 向量 $\mathbf{b}$ 满足 $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$, 则 $|\mathbf{b}|$ 的取值范围为 ▲ .

150. 向量 $\mathbf{a} = (2, 0)$, $\mathbf{b} = (x, y)$, 若 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, 则 $|\mathbf{b}|$ 的最大值为 ▲ .

151. 已知 $A(3, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 2)$, 若点 P 满足 $|\overrightarrow{AP}| = 1$, 则 $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}|$ 的最大值为 ▲ .

四点共圆

设向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \theta$, $\langle \mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c} \rangle = \pi - \theta$, $0 < \theta < \pi$, 则 $|\mathbf{c}|$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2 - 2\cos\theta}}{\sin\theta}$.

注 四点共圆.

若向量 $\mathbf{c}$ 满足 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$, 则 $\mathbf{c}$ 是以向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的终点连线为直径的一个圆, 如图 2.47 所示.

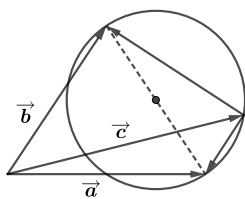


图 2.47

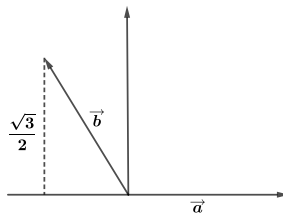


图 2.48

例 2.24 向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 为单位向量, 且 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的夹角为钝角, $|\mathbf{b} - t\mathbf{a}|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 且 $(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 0$, 则 $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ 的最大值为 ▲ .

解 如图 2.48 所示, 易知 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{2\pi}{3}$, $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 设 $\mathbf{c} = (x, y)$, 则

$$(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{4}, \text{ 故}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \\ y = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

变式训练 EXERCISES

152. 平面非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$, 且 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, 则 $|\vec{c}|$ 的取值范围是 ▲ .

153. 向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 向量 $\mathbf{c}$ 满足 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$, 则 $|\mathbf{c}|$ 的最大值为 ▲ .

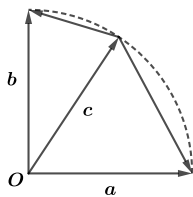


图 2.49

154. 如图 2.49 所示, 向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 为单位向量, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 则 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c})$ 的最小值为 ▲ .

155. 向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 2$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2$, $\langle \mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c} \rangle = 60^\circ$, 则 $|\mathbf{c}|$ 的最大值为 ()

(A) 4 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) 1

156. 已知 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{e}$ 是平面向量, $\mathbf{e}$ 是单位向量, 若非零向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{e}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 向量 $\mathbf{b}$ 满足

$\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{b} \cdot \mathbf{e} + 3 = 0$, 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 的最小值是 ()

(A) $\sqrt{3} - 1$

(B) $\sqrt{3} + 1$

(C) 2

(D) $-\sqrt{3}$

157. 已知向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 满足 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 60^\circ$, $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$, 则 $|\mathbf{c}|$ 的最小值是 .

158. 已知平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$, 且 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - 2\vec{c}) = 1$, 则 $|\vec{b} - \vec{c}|$ 的最小值为 ()

(A) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

引理 2.2. 如图 2.50 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\begin{cases} \vec{AP} = m\vec{AB} + n\vec{AC} \\ \vec{AQ} = s\vec{AB} + t\vec{AC} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}} = \begin{vmatrix} m & n \\ s & t \end{vmatrix} = |mt - sn|$

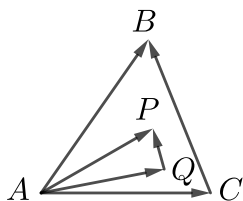


图 2.50

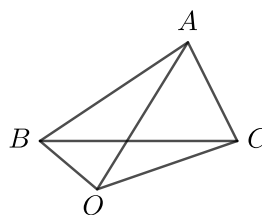


图 2.51

例 2.25 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且不在 BC 边上, 若 $\vec{OA} = 3\vec{OB} + \frac{3}{2}\vec{OC}$, 则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle OBC$ 面积之比为 ()

(A) $\frac{5}{2}$

(B) $\frac{7}{3}$

(C) $\frac{7}{2}$

(D) 4

解法一 如图 2.51 所示, $\begin{cases} \vec{OA} = 3\vec{OB} + \frac{3}{2}\vec{OC} \\ \vec{OB} = \vec{OB} + 0\vec{OC} \\ \vec{OC} = 0\vec{OB} + \vec{OC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle OBC}} = 3 \\ \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OBC}} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle OBC}} = \frac{7}{2}$

解法二 考虑特殊化.

2.9 三角形的心

“奔驰定理”可以称得上是平面向量中非常优美的一个结论, 由于这个定理和奔驰的 logo 很相似, 我们把它称为奔驰定理.

定理 2.8: 奔驰定理

已知 O 为 $\triangle ABC$ 内的一点, 且存在 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, 使得 $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 则 $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} : S_{\triangle AOB} = \alpha : \beta : \gamma$.

例 2.26 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 则 $S_{\triangle BCD} : S_{\triangle ABD} = (\quad)$
 (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

解 B

变式训练 EXERCISES

159. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $5\overrightarrow{OA} + 6\overrightarrow{OB} + 10\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 则 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} = \underline{\hspace{1cm}}$.

160. 已知点 G 在 $\triangle ABC$ 内, 且满足 $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$, 若在 $\triangle ABC$ 内随机取一点, 此点取自 $\triangle GAB$, $\triangle GAC$, $\triangle GBC$ 内的概率分别记为 P_1, P_2, P_3 , 则 $(\quad)$
 (A) $P_1 = P_2 = P_3$ (B) $P_1 < P_2 < P_3$ (C) $P_1 > P_2 > P_3$ (D) $P_2 > P_1 > P_3$

推论 2.5. 设 P 为空间四面体 $ABCD$ 内一点, 且 V_A, V_B, V_C, V_D 分别表示四面体 $P-BCD$, $P-ACD$, $P-ABD$, $P-ABC$ 的体积, 则有 $V_A\overrightarrow{PA} + V_B\overrightarrow{PB} + V_C\overrightarrow{PC} + V_D\overrightarrow{PD} = \mathbf{0}$.

例 2.27 设 P 为空间四面体 $ABCD$ 内一点, 且 $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} + 4\overrightarrow{PD} = \mathbf{0}$, V_C, V_D 分别表示四面体 $P-ABD$, $P-ABC$ 的体积, 则 $\frac{V_C}{V_D} = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 $\frac{3}{4}$.

定义 2.3: 三角形的心

1° 设 O 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$.

2° 设 O 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心, 若 $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 则 $x : y : z = \tan A : \tan B : \tan C$.

3° 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 若 $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 则 $x : y : z = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$.

4° 设 O 为 $\triangle ABC$ 的内心, 若 $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 则 $x : y : z = a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$.

例 2.28 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 且 $\sqrt{7}\overrightarrow{GA} \sin A + 3\overrightarrow{GB} \sin B + 3\sqrt{7}\overrightarrow{GC} \sin C = \mathbf{0}$, 则 $\angle B = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 由正弦定理易知 $\sqrt{7}a = 3b = 3\sqrt{7}c \Rightarrow \angle B = 60^\circ$.

例 2.29 已知 $\triangle ABC$ 中, 且 $AB = 1$, $BC = \sqrt{6}$, $AC = 2$, O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 若 $\overrightarrow{AO} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$, 则有序实数对 (s, t) 为 ()

- (A) $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ (B) $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ (C) $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ (D) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

解 因为 O 是钝角 $\triangle ABC$ 的外心, 所以 O 在外部由三点共线可知 $s + t > 1$, 排除 C, D ; 又因为 $AC > AB$, 所以 $s > t$.

例 2.30 已知 O 是平面上一定点, A, B, C 是平面上不共线的三点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则 P 点的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 ()

- (A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心

解 由向量平行四边形法则及菱形判定定理可知答案为 B.

例 2.31 已知 O 是平面上一定点, A, B, C 是平面上不共线的三点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则 P 点的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 ()

- (A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心

解 由向量中点坐标法可知答案为 C.

例 2.32 已知 O 是平面上一定点, A, B, C 是平面上不共线的三点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \sin B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \sin C} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则 P 点的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 ()

- (A) 重心 (B) 外心 (C) 内心 (D) 垂心

解 依题意可知 $\overrightarrow{AP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \sin B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \sin C} \right)$, 由正弦定理知 $|\overrightarrow{AB}| \sin B = |\overrightarrow{AC}| \sin C$, 所以

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\lambda}{|\overrightarrow{AB}| \sin B} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

设 BC 的中点为 D , 由平行四边形法则可知点 P 在 BC 的中线 AD 所在的射线上, 所以动点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的重心, 故选 A.

例 2.33 已知 O 是平面上一定点, A, B, C 是平面上不共线的三点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则 P 点的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 ()

- (A) 重心 (B) 垂心 (C) 外心 (D) 内心

解 设 BC 的中点为 D , 依题意可知 $\overrightarrow{DP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right)$, 所以

$$\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right) = \lambda \left(\frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\pi - B)}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos C}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right) \quad (2.9)$$

$$= \lambda(-|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BC}|) = 0 \quad (2.10)$$

所以 $DP \perp BC$, 点 P 在 BC 的垂直平分线上, 故 P 点的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的外心. 选 C.

例 2.34 三个不共线的向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 满足

$$\overrightarrow{OA} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} \right) = \overrightarrow{OB} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|} \right) = \overrightarrow{OC} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} + \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} \right) = 0, \text{ 则 } O \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的} \quad ()$$

(A) 垂心 (B) 重心 (C) 内心 (D) 外心

解 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}$ 表示与 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的外角平分线共线的向量, 所以 OA 垂直 $\angle A$ 的外角平分线, 因而 OA 是 $\angle A$ 的平分线, 同理 OB , OC 分别是 $\angle B$, $\angle C$ 的平分线, 故选 C.

例 2.35 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 若

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{CA} = 0, \text{ 则 } O \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的} \quad ()$$

(A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心

解 依题利用向量减法可得 $|\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2 = 0$, 故选 A.

例 2.36 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(0, 1)$ 和点 $B(-3, 4)$, 若点 C 在 $\angle AOB$ 的平分线上, 且 $|\overrightarrow{OC}| = 2$, 则 $\overrightarrow{OC} = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 点 C 在 $\angle AOB$ 的平分线上, 则存在 $\lambda \in (0, +\infty)$, 使

$$\overrightarrow{OC} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} + \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} \right) = \lambda(0, 1) + \lambda \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = \left(-\frac{3}{5}\lambda, \frac{9}{5}\lambda \right)$$

$$\text{又 } |\overrightarrow{OC}| = 2, \text{ 可得 } \lambda = \frac{\sqrt{10}}{3}, \therefore \overrightarrow{OC} = \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{3\sqrt{10}}{5} \right).$$

例 2.37 已知 O 是平面上一定点, A , B , C 是平面上不共线的三点, 动点 P 满足

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right), \lambda \in [0, +\infty), \text{ 则 } P \text{ 点的轨迹一定通过 } \triangle ABC \text{ 的} \quad ()$$

(A) 重心 (B) 垂心 (C) 外心 (D) 内心

解 给式 $\overrightarrow{AP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right)$ 两边同时点乘 $\overrightarrow{BC}$, 可得 $AP \perp BC$, 故 P 点的轨迹一定

通过 $\triangle ABC$ 的垂心. 选 B.

例 2.38 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 若 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()
 (A) 重心 (B) 垂心 (C) 外心 (D) 内心

解 A.

例 2.39 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 若 $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$, 其中 P 为平面上任意一点, 则 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()
 (A) 重心 (B) 垂心 (C) 外心 (D) 内心

解 依题可得 $3\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}$, 所以 $3\overrightarrow{PO} + 3\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, 即 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 故选 A.

例 2.40 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$, 则 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()
 (A) 外心 (B) 垂心 (C) 内心 (D) 重心

解 移项、利用向量减法可知答案为 B.

例 2.41 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 若 $|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2$, 则 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()
 (A) 垂心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 外心

解 依题可得

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 &= |\overrightarrow{CA}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 \\ \Rightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) &= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}) \\ \Rightarrow \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) &= \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \\ \Rightarrow \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) &= 0 \\ \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot 2\overrightarrow{OC} &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{BA}$, 同理 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$, 故选 A.

例 2.42 设 H 是锐角三角形 $\triangle ABC$ 的垂心, 若 $\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC} = \vec{0}$, 则 $\cos \angle AHB = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 易知 $\tan A : \tan B : \tan C = 1 : 2 : 3$, 再由 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ 可知 $\tan C = 3$, 于是 $\cos C = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 由四点共圆可得 $\cos \angle AHB = -\cos C = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

变式训练 EXERCISES

161. 已知 P 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心, 若 $\overrightarrow{AP} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 且 $\cos \angle BAC = \frac{2}{5}$, 则 $k =$ ()
 (A) $\frac{5}{14}$ (B) $\frac{2}{14}$ (C) $\frac{5}{7}$ (D) $\frac{3}{7}$
162. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 若 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \sqrt{2}\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 则 $\angle BCA$ 的度数为 ()
 (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°
163. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 外接圆半径为 1, 若 $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()
 (A) $\frac{8}{5}$ (B) $\frac{7}{5}$ (C) $\frac{6}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$
164. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 若 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 则 $\angle BAC$ 的度数为 ()
 (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

2.10 向量投影

定义 2.4: 向量投影

向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ , 则向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.

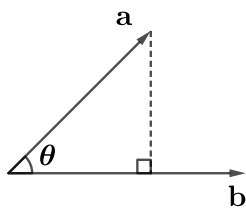


图 2.52

投影

向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ , 则向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 上的投影为 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.

例 2.43 【2020 山东新高考】已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 ()

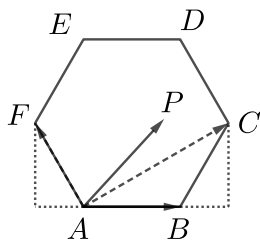


图 2.53

(A) $(-2, 6)$ (B) $(-6, 2)$ (C) $(-2, 4)$ (D) $(-4, 6)$

解 依题意 $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = |\vec{AB}| \cdot (\vec{AP} \text{ 在 } \vec{AB} \text{ 上的投影})$, 如图 2.53, 当 P 在 C 点时, 投影正最长为 3, 此时 $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = 2 \times 3 = 6$; 当 P 在 F 点时, 投影为负最长为 -1 , 此时 $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = 2 \times (-1) = -2$, 故选 A.

例 2.44 如图 2.54, 是由六个边长为 1 的正六边形组成的蜂巢图形, 定点 A, B 是如图所示的两个定点, 动点 P 在这些正六边形的边上运动, 则 $\vec{AP} \cdot \vec{AB}$ 的最大值为 .

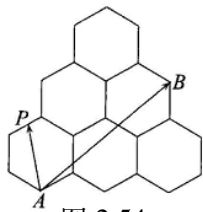


图 2.54

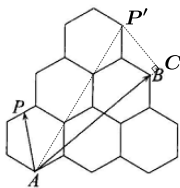


图 2.55

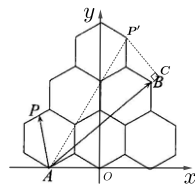


图 2.56

解 如图 2.55, 由向量数量积的几何意义可知要使 $\vec{AP} \cdot \vec{AB}$ 的值最大, 只需 $\vec{AP}$ 在 $\vec{AB}$ 上的投影长度最大即可, 此时点 P 为 P' . 建立如图 2.56 的直角坐标系, 易知 $A(-\sqrt{3}, 0)$, $B(\sqrt{3}, 3)$, $P'(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2})$,
 $\therefore \vec{AP'} = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2})$, $\therefore \vec{AB} = (2\sqrt{3}, 3)$, 于是 $\vec{AP'} \cdot \vec{AB} = 2\sqrt{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2} \times 3 = \frac{45}{2}$.

定理 2.9: 外心向量

如图 2.57, 若点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心 (外接圆圆心), 则 $\vec{AB} \cdot \vec{AO} = \frac{|\vec{AB}|^2}{2}$.

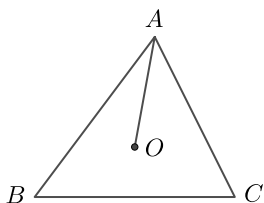


图 2.57

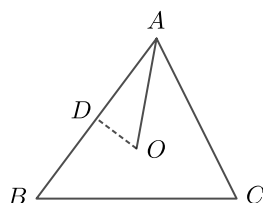


图 2.58

注 外心是三角形三条边的垂直平分线的交点.

证 由投影可知 $\overrightarrow{AO}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 的投影为 $\overrightarrow{AD}$, 其中 D 为 AB 的中点, 于是 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DO} = \frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{2}$.

例 2.45 三角形 ABC 的外接圆的圆心为 O , $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = \sqrt{7}$, 则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ()
 (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) 2 (D) 3

解 根据三角形外接圆的性质 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$.

例 2.46 在 $\triangle ABC$ 中, $CA = 2CB = 2$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -1$, O 是 $\triangle ABC$ 的外心. 若 $\overrightarrow{CO} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$, 则 $xy =$.

解 由向量夹角公式 $\angle ACB = 120^\circ$, 给式子 $\overrightarrow{CO} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$ 两边分别点乘 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, 则

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}^2 = 4x - y \\ \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}^2 = -x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{10}{9}.$$

变式训练 EXERCISES

165. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 2$, 且 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}$, AD 是 $\triangle ABC$ 的外接圆直径, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ()
 (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

166. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $AC = 3$, $\angle A = 60^\circ$, O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 若 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $2x + 3y =$ ()
 (A) 2 (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$

167. (2020 福建龙岩检测) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4$, $AC = 6$, 其外接圆的圆心为 O , 则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ()
 (A) 20 (B) $\frac{29}{2}$ (C) 10 (D) $\frac{9}{2}$

168. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 且 $A = \frac{\pi}{3}$, $AB = 5$, $AC = 3$, 若 $\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, 则 $m + n =$.

169. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{3}$, $AB = 10$, $AC = 6$, O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且满足 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$, 设 $\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, 则 $m + 3n =$.

第三章 圆锥曲线

3.1 预备知识

定义 3.1: 对称公式

若点 $P(x_0, y_0)$ 和点 $Q(x, y)$ 关于直线 $Ax + By + C = 0$ 对称, 我们引入 $t = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$, 则 $Q(x_0 - 2At, y_0 - 2Bt)$.

例 3.1 点 $(1, 3)$ 关于直线 $y = -2x + 1$ 的对称点的坐标是 .

解 $\left(-\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

例 3.2 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左右焦点, 点 A, B 分别为椭圆的右顶点和下顶点, 且点 F_1 关于直线 AB 的对称点为 M , 若 $MF_2 \perp F_1F_2$, 则椭圆 C 的离心率为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解 易知 $F_1(-c, 0)$, 直线 AB 的方程为 $bx - ay - ab = 0$. 利用对称公式得 $t = \frac{-bc - ab}{a^2 + b^2}$, 所以可得点 M 的横坐标 $c = x_M = -c - 2b \cdot \frac{-bc - ab}{a^2 + b^2} \Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 选 C.

3.2 圆

3.2.1 圆到直线距离相等点

圆到直线距离相等点的个数

已知一条直线和一个圆, 设 d : 圆心到直线的距离, r : 圆半径, d' : 圆上的点到直线的距离, 则到直线距离相等的圆上的点的个数有表格 3.1 里的五种情况.

例 3.3 圆 $x^2 + 2x + y^2 + 4y - 3 = 0$ 上到直线 $x + y + 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点共有 ()
(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

表 3.1 圆到直线距离相等点的个数

序号	大小关系	点的个数
①	$d > r + d'$	0
②	$d = r + d'$	1
③	$r - d' < d < r + d'$	2
④	$d = r - d'$	3
⑤	$d < r - d'$	4

解 先求到直线 $x + y + 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点的轨迹（两条平行直线）的方程.

$$l_1: x + y - 1 = 0, \quad l_2: x + y + 3 = 0$$

再判断这两条直线和圆的位置关系, l_1 和圆相切, l_2 和圆相交, 共有 3 个交点. 选 C.

变式训练 EXERCISES

170. 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上有且仅有四个点到直线 $12x - 5y + c = 0$ 的距离为 1, 则实数 c 的取值范围是 ▲ .
171. 圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 上至少有三个不同的点到直线 $ax + by = 0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$, 则直线的倾斜角的取值范围是 ()
- (A) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$ (B) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$ (C) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ (D) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
172. 已知圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$, 设条件 $p: 0 < r < 3$, 条件 q : 圆 C 上至多有两个点到直线 $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$ 的距离为 1, 则 p 是 q 的 ()
- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
173. 圆 $x^2 + y^2 = 5$, 直线 $l: x \cos \theta + y \sin \theta = 1 \left\{ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$, 圆到直线距离为 1 的点的个数为 k , 则 $k =$ ▲ .

3.2.2 阿波罗尼斯圆

定义 3.2: 阿波罗尼斯圆

平面内到两定点 A, B 距离之比 $\frac{|PA|}{|PB|}$ 为常数 $\lambda (\lambda > 0 \text{ 且 } \lambda \neq 1)$ 的点 P 的轨迹是个圆, 称之为阿波罗尼斯圆. 【 $\lambda = 1$ 时, P 点的轨迹是线段 AB 的中垂线】

定义 3.3: 调和点列

若同一直线上四点 A 、 B 、 C 、 D 满足 $AB \times CD = AD \times BC$ ，则称 B 、 D 、 A 、 C 为调和点列。

知二推一

如图 3.1，① A 、 C 、 B 、 D 为调和点列；② PC 、 PD 分别为 $\angle APB$ 的内、外角平分线；③ $PC \perp PD$ ；以上三个条件中，知道任意两个都可以推得第三个！

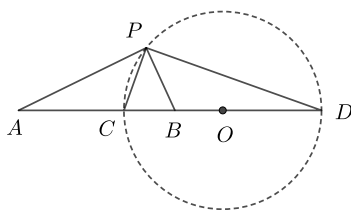


图 3.1

证 设阿波罗尼斯圆的圆心为 O ，半径 $OC = OD = r$ ，则有 $\frac{PA}{PB} = \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} = \lambda$ ，即

$$\frac{OA - r}{r - OB} = \frac{OA + r}{OB + r} = \lambda, \text{ 即}$$

$$\frac{OA - r + OA + r}{r - OB + r + OB} = \frac{OA - r - (OA + r)}{r - OB - (r + OB)} = \lambda$$

即 $\frac{OA}{r} = \frac{r}{OB} = \lambda$ ，即 $OA \cdot OB = r^2$ (反演)。

$$\text{同时, } \frac{OA}{r} = \frac{r}{OB} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} \frac{OA}{r} = \lambda \\ \frac{OB}{r} = \frac{1}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \frac{OA}{r} - \frac{OB}{r} = \frac{AB}{r} = \lambda - \frac{1}{\lambda}, \text{ 即 } r = \frac{AB}{\lambda - \frac{1}{\lambda}}.$$

推论 3.1. 阿氏圆的常用公式 (设 O 为圆心)

$$\begin{cases} \frac{PA}{PB} = \frac{OA}{r} = \frac{r}{OB} = \lambda \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} OA \cdot OB = r^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} r = \left| \frac{AB}{\lambda - \frac{1}{\lambda}} \right| \end{cases} \quad (3.3)$$

圆心坐标

利用定比分点求内外分点的坐标, 即 $\overrightarrow{AD} = \pm \lambda \overrightarrow{DB}$, D 即图 3.1 中的 C, D 两个点, 由于 C, D 两点也是圆直径的两个端点, 故圆心坐标和半径可以一起确定.

例 3.4 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\sin A = 2 \sin B$, $a \cos B + b \cos A = 2$, 则 $\triangle ABC$ 面积最大时的高为 .

解 点 C 的轨迹为阿波罗尼斯圆, 圆心在直线 AB 上, 则 $\triangle ABC$ 面积最大时高即为圆的半径, 由式 (3.3) 知半径为 $\frac{2}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$.

例 3.5 已知三角形 ABC 中, $AB = AC$, 腰 AC 上的中线 BM 长为 $\sqrt{3}$, 则该三角形的面积的最大值是 .

解 因为 $AB = 2AM$, 所以点 A 的轨迹是一个圆, 其半径长为 $\frac{\sqrt{3}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 故

$$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABM} \leq 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2.$$

例 3.6 在平面直角坐标系中, 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 交 x 轴于 A, B 两点, 且点 A 在点 B 左边, 若直线 $x + \sqrt{3}y + m = 0$ 上存在点 P , 使得 $|PA| = 2|PB|$, 则 m 的取值范围为 .

解 $\left[-\frac{13}{3}, 1\right]$.

例 3.7 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 和点 $A(-2, 0)$, 若定点 $B(b, 0) (b \neq -2)$ 和常数 λ 满足: 对圆 O 上任意一点 M , 都有 $|MB| = \lambda|MA|$, 则 (1) $b =$; (2) $\lambda =$.

解 由式 (3.2) 知 $x_A \cdot x_B = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$; 由式 (3.3) 及图形易知 $\lambda = \frac{1}{2}$.

例 3.8 已知共面向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 3, \mathbf{b} + \mathbf{c} = 2\mathbf{a}$, 且 $|\mathbf{b}| = |\mathbf{b} - \mathbf{c}|$. 若对每一个确定的向量 $\mathbf{b}$, 记 $|\mathbf{b} - t\mathbf{a}| (t \in \mathbf{R})$ 的最小值为 $d_{\min}$, 则当 $\mathbf{b}$ 变化时 $d_{\min}$ 的最大值为 .

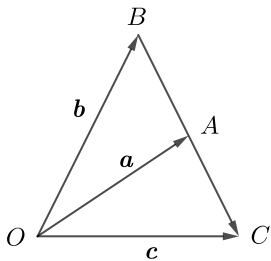


图 3.2

解 如图 3.2 所示, 易知点 B 的轨迹为阿氏圆, $d_{\min}$ 的最大值即为阿氏圆的半径, 由式 (3.3) 知 $r = 2$.

例 3.9 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, A 、 F 是其左顶点和左焦点, P 是圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 上的动点, 若 $\frac{|PA|}{|PF|} = \lambda$ (λ 为常数), 则此椭圆的离心率为 ▲ .

解 点 P 的轨迹是阿氏圆, 由式 (3.2) 知 $|OA| \cdot |OF| = r^2$, 即 $ac = b^2$, 解得 $e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

例 3.10 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 和点 $A(-\frac{1}{2}, 0)$, 点 $B(0, \frac{1}{2})$, M 为圆 O 上一动点, 则 $2|MA| - |MB|$ 的最大值为 ()

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解 令 $|MC| = 2|MA|$, 由阿氏圆的定义可知 $C(-2, 0)$, 由数形结合可知 $2|MA| - |MB|$ 的最大值为 $|BC| = \frac{\sqrt{17}}{2}$. 故选 B.

例 3.11 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 4$, $AD = Aa_1 = 6$, 点 P 满足 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DD_1} + \mu \overrightarrow{DA}$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$, $\mu \in [0, 1]$, 若 $\lambda + \mu = 1$, 则三棱锥 $B - C_1DP$ 的体积为 ▲ ; 若 M 为 CD 的中点, 且 $\angle APB = \angle DPM$, 则点 P 的轨迹与长方体的侧面 ADD_1A_1 的交线长为 ▲ .

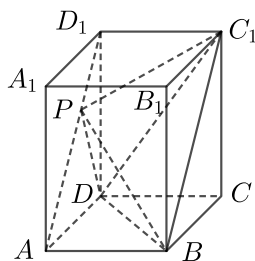


图 3.3

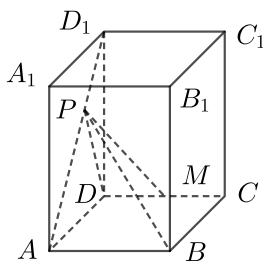


图 3.4

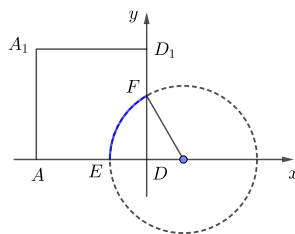


图 3.5

解 如图 3.3, 由 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DD_1} + \mu \overrightarrow{DA}$ 可知点 P 在线段 AD_1 上, 因为 $AD_1 \parallel BC_1$, 所以

$$V_{B-C_1DP} = V_{P-BC_1D} = V_{A-BC_1D} = V_{C-BC_1D} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times 6 = 24$$

若 $\angle APB = \angle DPM$, 则 $\tan \angle APB = \tan \angle DPM$, 即 $\frac{AB}{AP} = \frac{DM}{PD}$ 于是 $|PA| = 2|PD|$, 非常典型的阿波罗尼斯圆, 如图 3.5, 圆心在直线 AD 上, 半径 $r = \frac{AD}{2 - \frac{1}{2}} = 4$, 设 $AE = 2ED$, 由定比分点公式

可得 $E(-2, 0)$, 于是圆心坐标为 $(2, 0)$, 则点 P 的轨迹与长方体的侧面 ADD_1A_1 的交线为 $\widehat{EF}$, 其长度为 $2\pi \times 4 \times \frac{1}{6} = \frac{4\pi}{3}$.

故答案为 $24; \frac{4\pi}{3}$.

利用子母相似求最值

由第 73 页式子 (3.1) 可得阿氏圆半径满足 $r^2 = OA \cdot OB$, 于是

例 3.12 已知点 P 是圆 $O: x^2 + y^2 = 25$ 上任意一点, 平面上两个定点 $M(10, 0)$, 点 $N\left(\frac{13}{2}, 3\right)$, 则 $PN + \frac{1}{2}PM$ 的最小值为 ▲ .

解 设 $PQ = \frac{1}{2}PM$, 且 $Q(m, 0)$, 由 $\triangle OPQ \sim \triangle OMP$ 可得

$$OP^2 = OM \cdot OQ \Rightarrow m = \frac{25}{10} \quad (3.4)$$

于是 $PN + \frac{1}{2}PM = PN + PQ \geq NQ = 5$.

例 3.13 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 90^\circ$, $AB = 2$, $AD = 1$, 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$, 则 $CB + \frac{1}{2}CD$ 的最小值为 ▲ .

解 由已知条件 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 可得 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3$, 取 AB 中点 M , 由极化恒等式可知 $\overrightarrow{CM}^2 = 4$, 以 A 为原点建立直角坐标系, 则点 C 的轨迹为圆 $M: x^2 + (y-1)^2 = 4$, 设 $CB = \frac{1}{2}CH$, 且 $H(0, n)$, 由 $\triangle MCB \sim \triangle MHC$ 可得

$$MC^2 = MB \cdot MH \Rightarrow n = 5 \quad (3.5)$$

于是 $CB + \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(CH + CD) \geq \frac{1}{2}HD = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

3.2.3 同构之两圆方程之差

推论 3.2. 两圆方程之差

1. 若两圆相交, 则两圆方程之差得到的直线方程为两圆交线所在直线方程;
2. 若两圆相切, 则两圆方程之差得到的直线方程为两圆公切线所在直线方程.

例 3.14 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 10x - 12y + m = 0$ 内切, 则 $m =$ ▲ ; 此时它们的公切线 l 的方程为 ▲ .

解 $b = -\frac{2}{3}$, 公切线 l 的方程为 $4x + 3y + 2 = 0$.

例 3.15 【2022 新高考 I】写出与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和圆 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ 都相切的一条直线的方

程 ▲ .**解** $3x + 4y - 5 = 0$.

3.3 椭圆直线联立

椭圆直线联立

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $y = kx + m$ 联立后

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + m \end{array} \right\} \Rightarrow (a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2m^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Delta = 4a^2b^2(a^2k^2 + b^2 - m^2)$$

推论 3.3. 直线截距的平方和联立后方程的二次项系数的关系.椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $y = kx + m$ 联立后.

- $\Delta > 0 \Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 > m^2 \Leftrightarrow$ 直线与椭圆相交.
- $\Delta = 0 \Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 = m^2 \Leftrightarrow$ 直线与椭圆相切.
- $\Delta < 0 \Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 < m^2 \Leftrightarrow$ 直线与椭圆相离.

推论 3.4. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与直线 $y = kx + m$ 有两个交点, 两方程联立后.

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 > a^2k^2 - b^2.$$

韦达定理:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2kma^2}{a^2k^2 + b^2} \\ x_1x_2 = \frac{a^2m^2 - a^2b^2}{a^2k^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = kx_1 + m + kx_2 + m = k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{2mb^2}{a^2k^2 + b^2} \\ y_1y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2x_1x_2 + mk(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{-k^2a^2b^2 + m^2b^2}{a^2k^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\text{弦中点: } \left(\frac{-kma^2}{a^2k^2 + b^2}, \frac{mb^2}{a^2k^2 + b^2} \right).$$

$$\begin{cases} \text{弦长 } |AB| = \frac{\sqrt{1+k^2} \sqrt{\Delta}}{a^2k^2 + b^2} = \frac{2ab \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{a^2k^2 + b^2 - m^2}}{a^2k^2 + b^2} \\ \text{坐标原点到直线 } y = kx + m \text{ 的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} \\ S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{2ab \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{a^2k^2 + b^2 - m^2}}{a^2k^2 + b^2} = \frac{ab|m| \sqrt{a^2k^2 + b^2 - m^2}}{a^2k^2 + b^2} \end{cases}$$

3.4 焦半径与焦三角形

定义 3.4: 焦三角形

如图 3.6, 图 3.7 所示过圆锥曲线上任一点 P 与圆锥曲线的左、右焦点 F_1, F_2 所组成的 $\triangle PF_1F_2$ 称作焦三角形.

定义 3.5: 焦半径

线段 PF_1, PF_2 叫圆锥曲线的焦半径.

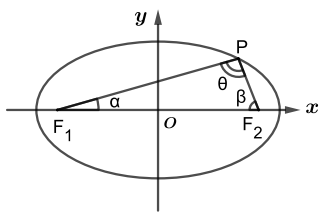


图 3.6

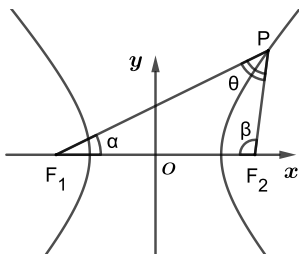


图 3.7

定理 3.1

P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点, $\angle F_1PF_2 = \theta$, 则 (1) $S_{\triangle F_1PF_2} = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$; (2) $|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{2b^2}{1 + \cos \theta}$.

定理 3.2

P 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一点, $\angle F_1PF_2 = \theta$, 则 (1) $S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{b^2}{\tan \frac{\theta}{2}}$; (2) $|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{2b^2}{1 - \cos \theta}$.

例 3.16 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$, F_1, F_2 是椭圆的左右焦点, 点 P 在 E 上, 且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 则

$\triangle F_1PF_2$ 的面积为 ▲ .

解 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

例 3.17 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左右焦点, P, Q 为椭圆 C 上关于坐标原点对称的两点, 且 $|PQ| = |F_1F_2|$, 则四边形 PF_1QF_2 的面积为 ▲ .

解 8.

3.4.1 焦三角形的心

椭圆焦三角形重心

设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点, F_1, F_2 是椭圆的左、右焦点, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的重心 G 的轨迹为椭圆.

证 设 $P(x_0, y_0)$, $G(x, y)$, 由三角形重心公式易得 $x_0 = 3x$, $y_0 = 3y$, 代入椭圆方程可得 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{9} (y \neq 0)$.

双曲线焦三角形重心

设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上的一点, F_1, F_2 是双曲线的左、右焦点, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的重心 G 的轨迹为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{9} (y \neq 0)$.

椭圆焦三角形内心

设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点, F_1, F_2 是椭圆的左、右焦点, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的内心 I 的轨迹为椭圆 $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2} = 1 (y \neq 0)$. 其中 $c^2 = a^2 + b^2$.

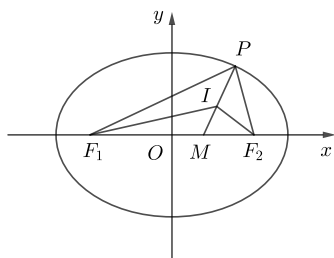


图 3.8

例 3.18 设椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2 , P 是椭圆上任意一点, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的

内切圆的圆心 I 的轨迹方程.

解 设 $P(x_0, y_0)$, $I(x, y)$, $|PF_1| = m$, $|PF_2| = n$, 易得 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 由内心向量形式的充要条件知

$$2 \cdot \overrightarrow{IP} + n \cdot \overrightarrow{IF_1} + m \cdot \overrightarrow{IF_2} = \vec{0} \quad (3.6)$$

$$\text{即 } \begin{cases} 2(x_0 - x) + n(-1 - x) + m(1 - x) = 0 \\ 2(y_0 - y) - ny - my = 0 \end{cases}, \text{ 又 } \begin{cases} m + n = 4 \\ m - n = (x + 1) - (1 - x) = 2x \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} x_0 = 2x \\ y_0 = 3y \end{cases}, \text{ 而 } P$$

是椭圆上任意一点, 即 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$,

所以 $x^2 + 3y^2 = 1$ ($y \neq 0$) 即为 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心 I 的轨迹方程.

双曲线焦三角形内心

1. 设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 上的一点, F_1, F_2 是左右焦点, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的内切圆圆心的横坐标为 $\pm a$;
2. 内切圆圆心的轨迹是以过双曲线顶点的两平行开线段, 且内心纵坐标 $y \in (-b, b)$.

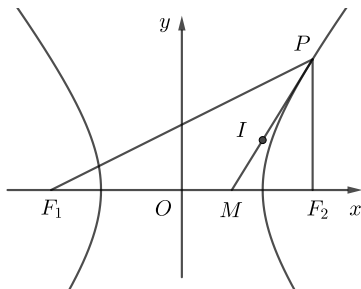


图 3.9

证 不妨设 $P(x_0, y_0)$ 为双曲线右支上一点, 则 $x_0 > a$, $I(x, y)$, 延长 PI 交 x 轴于 $M(m, 0)$, 由角平分线定理 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|MF_1|}{|MF_2|}$, 即 $\frac{a + ex_0}{-a + ex_0} = \frac{c + m}{c - m} \Rightarrow m = \frac{a^2}{x_0}$, 由角平分线定理

$$\frac{|PI|}{|IM|} = \frac{x_0 - x}{x - m} = \frac{x_0 - x}{x - \frac{a^2}{x_0}} = \frac{y_0 - y}{y} = \frac{|PF_1|}{|F_1M|} = \frac{|PF_2|}{|F_2M|} = \frac{|PF_1| - |PF_2|}{|F_1M| - |F_2M|} = \frac{2a}{\frac{2a^2}{x_0}} = \frac{x_0}{a}$$

解得 $x = a$, $y = \frac{ay_0}{a + x_0}$, 所以 $y^2 = \left(\frac{ay_0}{a + x_0} \right)^2 = \frac{b^2(x_0^2 - a^2)}{(a + x_0)^2} = \frac{b^2(x_0 - a)}{a + x_0} < 1$, 故 $y \in (-b, b)$.

变式训练 EXERCISES

174. 已知 P 是双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的右支上一点, F_1, F_2 分别为双曲线的左、右焦点, 则 $\triangle PF_1F_2$

的内切圆圆心横坐标为 ()

- (A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{7}$ (D) 3

175. 已知 $P(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ 上, 其左、右焦点分别为 F_1, F_2 , $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆与 x 轴相切于 M , 则 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MF_2} =$ ()
- (A) $\sqrt{3} + 1$ (B) $\sqrt{2} + 1$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $\sqrt{3} - 1$

3.4.2 焦三角形角平分线

推论 3.5. $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点, F_1, F_2 为椭圆的两个焦点, $\angle F_1PF_2$ 的角平分线交 x 轴于点 $M(m, 0)$, 若椭圆的离心率为 e , 则 (1) $e = \frac{MF_1}{PF_1} = \frac{MF_2}{PF_2}$; (2) $\frac{m}{x_0} = e^2$; (3) 直线 PM 和过点 $P(x_0, y_0)$ 的椭圆的切线 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ 垂直.

证 (1) 由三角形角平分线公式易得 $\frac{|F_1P|}{|F_1M|} = \frac{|PF_1|}{|IM|} = \frac{|F_2P|}{|F_2M|} \xrightarrow{\text{等比性质}} \frac{|F_1P| + |F_2P|}{|F_1M| + |F_2M|} = \frac{2a}{2c} = \frac{1}{e}$, 即 $e = \frac{MF_1}{PF_1} = \frac{MF_2}{PF_2}$;

(2) 因为 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线交 x 轴于点 $M(m, 0)$, 所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|F_1M|}{|F_2M|}$, 由焦半径公式可得 $\frac{a + ex_0}{a - ex_0} = \frac{c + m}{c - m}$, 解得 $m = e^2 x_0$.

例 3.19 P 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上除长轴端点外的任一点, F_1, F_2 为椭圆的两个焦点, $\angle F_1PF_2$ 的角平分线交 x 轴于点 $M(m, 0)$, 则 m 的取值范围为 .

解 由推论 3.5 的 (2) 可知点 $m = \frac{3}{4}x_p$, 再由 $-2 < x_p < 2$ 可知 $-\frac{3}{2} < x_p < \frac{3}{2}$.

推论 3.6. $P(x_0, y_0)$ 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上异于顶点的一点, F_1, F_2 为双曲线的两个焦点, $\angle F_1PF_2$ 的角平分线交 x 轴于点 $M(m, 0)$, 则

(1) $x_0 m = a^2$;

(2) 直线 PM 即为过点 $P(x_0, y_0)$ 的双曲线的切线 $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

例 3.20 A 为双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ 上异于顶点的任一点, F_1, F_2 为双曲线的两个焦点, $\angle F_1AF_2$ 的角平分线交 x 轴于点 $M(2, 0)$, 则 $|AF_2| =$.

3.4.3 焦三角形求离心率

定理 3.3: 精品离心率

1. P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点, F_1, F_2 为椭圆的两个焦点, 若 $\angle PF_1F_2 = \alpha$, $\angle PF_2F_1 = \beta$, 则离心率 $e = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta} \Leftrightarrow \frac{a - c}{a + c} = \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2}$.
2. P 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上一点, F_1, F_2 为双曲线的两个焦点, 若 $\angle PF_1F_2 = \alpha$, $\angle PF_2F_1 = \beta$, 则离心率 $e = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{|\sin \alpha - \sin \beta|}$.

证 我们这里只证明椭圆的情况. 如图 3.6 所示, 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由正弦定理, 有

$$\frac{|F_1F_2|}{\sin \angle F_1PF_2} = \frac{|PF_1|}{\sin \beta} = \frac{|PF_2|}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{2c}{\sin \angle F_1PF_2} = \frac{|PF_1| + |PF_2|}{\sin \alpha + \sin \beta}$$

$$\text{即 } \frac{2c}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{2a}{\sin \alpha + \sin \beta} \Rightarrow e = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta}.$$

例 3.23 P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点, F_1, F_2 为椭圆的两个焦点, 若 $\triangle POF_2$ 为等边三角形, 则椭圆离心率为 .

$$\text{解 } e = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ + \sin 60^\circ} = \sqrt{3} - 1.$$

例 3.24 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点, P 为 C 上的点, O 为坐标原点.

- (1) 若 $\triangle POF_2$ 为等边三角形, 求 C 的离心率;
- (2) 如果存在点 P , 使得 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 16, 求 b 的值和 a 的取值范围.

解 依题意

$$(1) e = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ + \sin 60^\circ} = \sqrt{3} - 1.$$

$$(2) \text{ 设 } P(x, y), \text{ 由本书第 78 页定理 3.1 可知 } b^2 \tan 45^\circ = 16 \Rightarrow b = 4,$$

$$\text{因为 } PF_1 \perp PF_2, \text{ 所以 } x^2 + y^2 = c^2 \dots\dots\dots (*)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots (**)$$

$$\text{由 } (*), (**) \text{ 知 } x^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - b^2) \Rightarrow c^2 \geq b^2, \text{ 从而 } a^2 = b^2 + c^2 \geq 2b^2 = 32, \text{ 故 } a \geq 4\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } a \text{ 的取值范围为 } [4\sqrt{2}, +\infty).$$

例 3.25 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2 , 以 O 为圆心, F_1, F_2 为直径的圆与椭圆在第一象限交于点 P , 且直线 OP 的斜率为 $\sqrt{3}$, 则椭圆离心率为 .

解 $\sqrt{3} - 1$.

例 3.26 设 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 的两个焦点, M 为 C 上一点且在第一象限, 若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形, 则 M 的坐标为 .

解 运用和坐标有关的椭圆焦半径定义可知 $|MF_1| = a + ex_0 = 6 + \frac{2}{3}x_0$, $|MF_2| = a - ex_0 = 6 - \frac{2}{3}x_0$, 依题意

① $|MF_1| = |F_1F_2|$, 可得 $6 + \frac{2}{3}x_0 = 8 \Rightarrow x_0 = 3$, 所以 $M(3, \sqrt{15})$;

② $|MF_2| = |F_1F_2|$, 可得 $6 - \frac{2}{3}x_0 = 8 \Rightarrow x_0 = -\frac{4}{3}$, 舍去.

故 $M(3, \sqrt{15})$.

变式训练 EXERCISES

176. P 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 右支上一点, F_1, F_2 为双曲线的两个焦点, 若 $\triangle POF_2$ 为等边三角形, 则双曲线离心率为 .

177. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, F_1, F_2 为双曲线的两个焦点, 过 F_2 垂直于实轴的直线交双曲线与 A, B 两点, BF_1 交 y 轴于点 C , 若 $AC \perp BF_1$, 则双曲线离心率为 ()

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}$

178. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的左右焦点 F_1, F_2 , 点 M 在双曲线上, 满足 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$, 则点 M 到点 x 轴的距离为 ()

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$

179. 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的左右焦点 F_1, F_2 , 点 P 在双曲线上, 满足 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则 $|PF_1| \cdot |PF_2| =$ ()

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

180. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左右焦点 F_1, F_2 , P 为椭圆上一动点, 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 点 P 的横坐标的取值范围为 .
181. 已知 A, F, P 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点、右焦点以及右支上的动点, 若 $\angle PFA = 2\angle PAF$ 恒成立, 则双曲线的离心率为 ()
- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $1 + \sqrt{3}$
182. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 $F_1(-c, 0)$ 关于直线 $\sqrt{3}x + y = 0$ 的对称点 P 在双曲线上, 则双曲线的离心率为 .

定义 3.6: 黄金分割与白银分割

- 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 若 $b^2 = ac$, 则椭圆离心率为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 俗称黄金分割; 若 $b^2 = 2ac$, 则椭圆离心率为 $\sqrt{2}-1$; 俗称白银分割.
- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 若 $b^2 = ac$, 则双曲线离心率为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; 俗称黄金分割; 若 $b^2 = 2ac$, 则双曲线离心率为 $\sqrt{2}+1$; 俗称白银分割.

例 3.27 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 且 F_1 关于双曲线的一条渐近线的对称点 P 在抛物线 $y^2 = 4cx$ 上, 则双曲线的离心率为 ()

- (A) $\sqrt{2} + 1$ (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

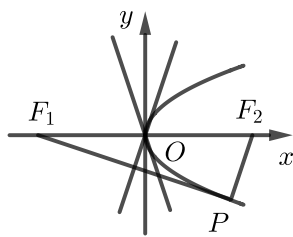


图 3.11

解 依题意如图 3.11, 在 $\triangle F_1PF_2$ 中, $PF_1 = 2b$, $PF_2 = 2a$, $\tan \angle F_1F_2P = \frac{b}{a}$, $\therefore \cos \angle F_1F_2P = \frac{a}{c}$,
 $\therefore F_1F_2 = PF_2 + PF_2 \cos \angle F_1F_2P$, $\therefore 2c = 2a + 2a \cos \angle F_1F_2P$, $\therefore e^2 - e - 1 = 0$, $\therefore e = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

选 D

注 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦点到渐近线的距离为 b .

离心率范围

- (1) 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上存在一点 P , 使得 $\angle F_1PF_2 = \theta$, 则椭圆离心率 e 的取值范围为 $e \in \left[\sin \frac{\theta}{2}, 1 \right)$.
- (2) 若椭圆上不存在一点 P , 使得 $\angle F_1PF_2 = \theta$, 则椭圆离心率 e 的取值范围为 $e \in \left(0, \sin \frac{\theta}{2} \right)$.

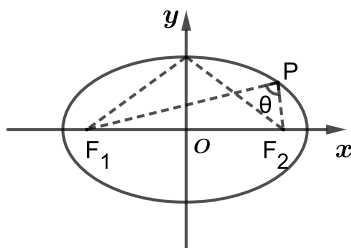


图 3.12

证 如图 3.12 所示, 易知当 P 为椭圆短轴端点时 θ 取得最大值, 而由存在性结论知, 只需要焦三角形顶角最大值 $\geq \theta$ 即可. 故只需保证 P 点在椭圆短轴端点处情形时的 $\angle F_1PF_2 \geq \theta$ 即可, 所以有 $\frac{c}{a} = \sin \frac{\angle F_1PF_2}{2} \geq \sin \frac{\theta}{2}$.

例 3.28 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点 F_1, F_2 , 满足 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$ 的点 M 总在椭圆内部, 则 e 的取值范围为 ()

- (A) $(0, 1)$ (B) $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ (C) $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ (D) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right)$

解 C

例 3.29 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点 F_1, F_2 , 若椭圆上存在一点 P , 使得 $PF_1 \perp PF_2$, 则椭圆离心率的取值范围为 ()

- (A) $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}, 1 \right)$ (B) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right)$ (C) $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5} \right]$ (D) $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$

解 B

例 3.30 设 A, B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{m} = 1$ 长轴的两个端点, 若 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB = 120^\circ$, 则 m 的取值范围是 ()

(A) $(0, 1] \cup [9, +\infty)$ (B) $(0, \sqrt{3}] \cup [9, +\infty)$ (C) $(0, 1] \cup [4, +\infty)$ (D) $(0, \sqrt{3}] \cup [4, +\infty)$

解 A

端点与离心率

P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 或双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一点, A, B 为圆锥曲线左右两端点, 若 $\angle PAB = \alpha, \angle PBA = \beta$, 则我们有 $k_{AP} \cdot k_{BP} = e^2 - 1$.

例 3.31 设 A, B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 长轴的两个端点, C 为椭圆上异于 A, B 的一点, 若将 $\triangle ABC$ 的三内角记为 A, B, C , 且满足 $3 \tan A + 3 \tan B + \tan C = 0$, 则椭圆的离心率为 ()

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

解 根据诱导公式以及两角和的正切性质知

$$3 \tan A + 3 \tan B + \tan C = 0 \Rightarrow 3 = \frac{1}{1 - \tan A \cdot \tan B} \Rightarrow \tan A \cdot \tan B = \frac{2}{3}, \text{ 故选 A.}$$

变式训练 EXERCISES

183. P 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一点, A, B 为双曲线左右两端点, 直线 PA, PB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 k_2 = \frac{1}{2}$, 则双曲线的离心率为 ()

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

184. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$, A, B 为椭圆的左右两顶点, P 为椭圆上不同于 A, B 的一点, 直线 PA, PB 的倾斜角分别为 α, β , 则 $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \underline{\hspace{1cm}}$.

焦半径范围

P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一动点, 则

$$\begin{cases} b^2 \leq |PF_1| \cdot |PF_2| \leq a^2 \\ \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = |PO|^2 - |OF|^2 \in [b^2 - c^2, b^2] \\ \cos \angle F_1 P F_2 = \frac{2b^2}{|PF_1| \cdot |PF_2|} - 1 \geq \frac{2b^2}{a^2} - 1 \end{cases}$$

注式 (3.4.3) 利用极化恒等式很容易证明.

推论 3.7. P 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上一动点, 则

$$(1) |PF_1| \cdot |PF_2| \in [b^2, +\infty). \quad (2) \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = |PO|^2 - |OF|^2 \in [-b^2, +\infty).$$

变式训练 EXERCISES

185. 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的左右焦点 F_1, F_2 , P 为椭圆上一动点, 则 $|PF_1| \cdot |PF_2|$ 的最大值为 ()
- (A) 9 (B) 16 (C) 25 (D) $\frac{25}{2}$

186. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左右焦点 F_1, F_2 , P 为椭圆上一动点, 则使 $|PF_1| \cdot |PF_2|$ 取最大值的点 P 为 ()
- (A) $(-2, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(2, 0)$ (D) $(0, 1)$ 或 $(0, -1)$

定理 3.4

1. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上存在一点 P , 使得 $|PF_1| = \lambda |PF_2|$ ($\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$). 则椭圆离心率的取值范围

$$e \in \left[\left| \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right|, 1 \right) \quad (3.7)$$

2. 双曲线离心率的取值范围

$$e \in \left(1, \left| \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right| \right] \quad (3.8)$$

证 我们利用定义来证明:

$$1. \text{ 根据椭圆定义, 不妨设 } \lambda > 1, \text{ 我们有 } \begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 2a \\ |PF_1| = \lambda |PF_2| \end{cases} \Rightarrow |PF_2| = \frac{2a}{\lambda + 1}$$

另外, 我们设椭圆的右顶点为 A , 则

$$|PF_2| \geq |AF_2| \Rightarrow \frac{2a}{\lambda + 1} \geq a - c \Rightarrow 1 - e \leq \frac{2}{\lambda + 1} \Rightarrow e \geq \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

$$2. \text{ 根据双曲线定义, 不妨设 } \lambda > 1, \text{ 我们有 } \begin{cases} |PF_1| - |PF_2| = 2a \\ |PF_1| = \lambda |PF_2| \end{cases} \Rightarrow |PF_2| = \frac{2a}{\lambda - 1}$$

另外, 我们设双曲线的右顶点为 A , 则

$$|PF_2| \geq |AF_2| \Rightarrow \frac{2a}{\lambda - 1} \geq c - a \Rightarrow \frac{2}{\lambda - 1} \geq e - 1 \Rightarrow e \leq \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$$

例 3.32 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左右焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在双曲线的右支上, 且 $|PF_1| = 4|PF_2|$, 则离心率 e 的最大值为 ()

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) 2 (D) $\frac{7}{3}$

解 B

例 3.33 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在双曲线的右支上, 且 $|PF_1| = 3|PF_2|$, 则离心率 e 的取值范围为 .

解 $1 < e \leq 2$.

例 3.34 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2 , 若椭圆上存在一点 P , 使得 $|PF_1| = 8|PF_2|$, 则椭圆离心率的取值范围为 .

解 $\left[\frac{7}{9}, 1\right)$.

例 3.35 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上存在一点 P , 使得 $\frac{a}{\sin \angle PF_1 F_2} = \frac{c}{\sin \angle PF_2 F_1}$, 则该椭圆离心率的取值范围为 .

解 在 $\triangle PF_1 F_2$ 中, 由正弦定理有 $\frac{|PF_2|}{\sin \angle PF_1 F_2} = \frac{|PF_1|}{\sin \angle PF_2 F_1} \Rightarrow \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{c}{a} = e$.

由定理 3.4 知 $\frac{1-e}{1+e} \leq e < 1 \Rightarrow \sqrt{2} - 1 \leq e < 1$.

例 3.36 设离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 是该椭圆上的任意一点, $PF_1 \perp PF_2$, $\triangle PF_1 F_2$ 的内切圆半径为 $\sqrt{2} - 1$, 求椭圆方程.

解 我们易知 $r = \frac{2a - 2c}{2} = \sqrt{2} - 1$. 又因为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}, b = 1$. 所以椭圆方程为

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

3.4.4 椭圆双曲线共焦点

定理 3.5: 椭圆双曲线共焦点

已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是两曲线的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = \theta$, 设椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 , 则它们满足

$$\frac{1 - \cos \theta}{e_1^2} + \frac{1 + \cos \theta}{e_2^2} = 2 \Rightarrow \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{e_1^2} + \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{e_2^2} = 1$$

解法一 设 $|PF_1| = m$, $|PF_2| = n$, 椭圆长轴长为 $2a_1$, 双曲线实轴长为 $2a_2$, 则由椭圆双曲线定义可知

$$\begin{cases} m + n = 2a_1 \\ m - n = 2a_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

对焦三角形 F_1PF_2 运用余弦定理可得

$$(2c)^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta \quad (3.10)$$

将式 (3.9) 代入式 (3.10), 化简得 $2c^2 = a_1^2(1 - \cos \theta) + a_2^2(1 + \cos \theta) \Rightarrow \frac{1 - \cos \theta}{e_1^2} + \frac{1 + \cos \theta}{e_2^2} = 2$.

解法二 利用两个三角形面积公式 (第 78 页定理 3.1 和第 78 页定理 3.2). 由
$$\begin{cases} S_{\triangle PF_1F_2} = b_1^2 \tan \frac{\theta}{2} \\ S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{b_2^2}{\tan \frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

得

$$\frac{b_2^2}{b_1^2} = \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \Rightarrow c^2 = a_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + a_2^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{e_1^2} + \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{e_2^2} = 1$$

推论 3.8. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是两曲线的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = \theta$, 设椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 , 则它们满足 $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} \leq \frac{2}{\sin \theta}$.

证 设 $|PF_1| = m$, $|PF_2| = n$, 椭圆长轴长为 $2a_1$, 双曲线实轴长为 $2a_2$, 则由椭圆双曲线定义可知

$$\begin{cases} m + n = 2a_1 \\ m - n = 2a_2 \end{cases}, \text{ 则 } a_1 + a_2 = m = |PF_1|, \text{ 于是}$$

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = \frac{a_1}{c} + \frac{a_2}{c} = \frac{2|PF_1|}{|F_1F_2|} \xrightarrow{\text{正弦定理}} \frac{2 \sin \angle PF_2F_1}{\sin \theta} \leq \frac{2}{\sin \theta}$$

例 3.37 如图 3.13 所示, 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 和双曲线 C_2 的公共焦点, A, B 分别是两曲线在第一三象限的公共点, 若四边形 AF_1BF_2 为矩形, 则 C_2 的离心率为 .

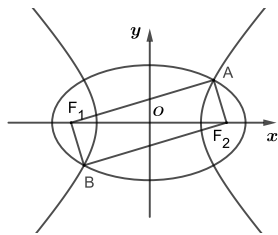


图 3.13

解 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

例 3.38 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是两曲线的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为 ()

- (A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) 3 (D) 2

解 A.

变式训练 EXERCISES

- 187.** 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 设椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 , 则 $e_1^2 + 2e_2^2$ 的最小值为 .
- 188.** 共焦点的椭圆和双曲线的左焦点为 F , A, B 分别是两曲线在第一、第三象限的交点, 且 $\angle AFB = \frac{2\pi}{3}$, 则当两曲线的离心率之积最小时, 双曲线有一条渐近线的方程是 ()
- (A) $x - 2y = 0$ (B) $2x + y = 0$ (C) $x - \sqrt{2}y = 0$ (D) $\sqrt{2}x + y = 0$
- 189.** 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 设椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 , 则 $\frac{e_1^2 + e_2^2}{(e_1 e_2)^2}$ 的值为 ()
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 190.** 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 设椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 , 则 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2}$ 的值为 ()

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 2

(D) 4

191. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $|F_1F_2| = 2|PO|$, 设椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 , 则 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2}$ 的值为 .

例 3.39 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{m^2} + y^2 = 1 (m > 1)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{n^2} - y^2 = 1 (n > 0)$ 的焦点重合, e_1, e_2 分别为 C_1, C_2 的离心率, 则 ()

(A) $m > n$ 且 $e_1e_2 > 1$ (B) $m > n$ 且 $e_1e_2 < 1$ (C) $m < n$ 且 $e_1e_2 > 1$ (D) $m < n$ 且 $e_1e_2 < 1$

解 依定义可知

$$m^2 - 1 = n^2 + 1 \quad (3.11)$$

$$\text{所以 } m > n, \text{ 又 } \begin{cases} e_1 = \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{m} \\ e_2 = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \end{cases} \Rightarrow e_1e_2 = \frac{\sqrt{m^2 - 1} \cdot \sqrt{n^2 + 1}}{mn}$$

由式 (3.11) 以及等比性质可知 $e_1e_2 = \frac{m^2 - 1}{mn} = \frac{n^2 + 1}{mn} \xrightarrow[\text{两分式相加}]{\text{等比性质}} \frac{m^2 + n^2}{2mn} > 1$

故选 A.

3.4.5 椭圆第二定义

定义 3.7: 椭圆第二定义

椭圆上一点到焦点的距离与到对应准线距离之比等于离心率.

坐标式焦半径

椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2 , 点 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 C 上一动点, 则

$$\begin{cases} |PF_1| = a + ex_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} |PF_2| = a - ex_0 \end{cases} \quad (3.13)$$

双曲线坐标式焦半径

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2 , 点 $P(x_0, y_0)$ 为双曲线 C 上一动

点, 则

$$\begin{cases} |PF_1| = |ex_0 + a| & (3.14) \\ |PF_2| = |ex_0 - a| & (3.15) \end{cases}$$

例 3.40 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右端点为 A, B , 右焦点为 F , 直线 $l: x = 4$ 与 x 轴交于点 D , 直线 AM 与 l 交于点 N , 是否存在常数 λ , 使得 $\angle MFD = \lambda \angle NFD$? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

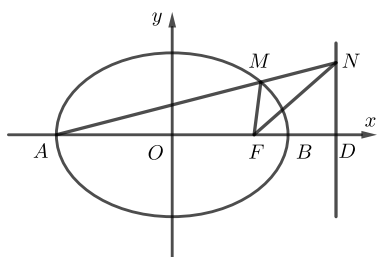


图 3.14

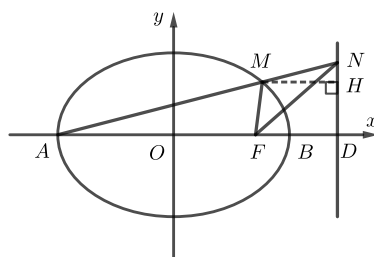


图 3.15

解 易知直线 $l: x = 4$ 是椭圆的右准线, 如图 3.15, 作 $MH \perp ND$ 于点 H , 易知 $\triangle NMH \sim \triangle NAD$, 所以

$$\frac{|MN|}{|MH|} = \frac{|AN|}{|AD|} \xrightarrow{\text{椭圆第二定义}} \frac{|MN|}{\frac{|MF|}{e}} = \frac{|AN|}{\frac{a^2}{c} + a} \quad (3.16)$$

即

$$\frac{|MN|}{|MF|} = \frac{|AN|}{e\left(\frac{a^2}{c} + a\right)} = \frac{|AN|}{|AF|} \quad (3.17)$$

由正弦定理可得

$$\frac{\sin \angle MFN}{\sin \angle MNF} = \frac{\sin \angle AFN}{\sin \angle ANF} \Rightarrow \sin \angle MFN = \sin \angle AFN \quad (3.18)$$

所以 $\angle MFD = 2\angle NFD$, 即 $\lambda = 2$.

3.4.6 原曲焦点弦

定义 3.8: 焦点弦

如图 3.16 所示, 过圆锥曲线的焦点 F 被圆锥曲线所截的弦 AB 称作焦点弦.

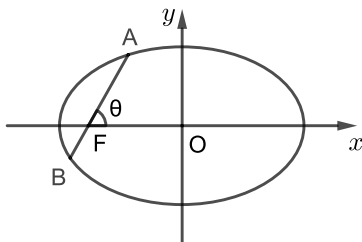


图 3.16

焦点弦长

如图 3.16 所示, 焦半径公式和焦点弦长公式:

$$|AF| = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}, \quad |FB| = \frac{b^2}{a + c \cos \theta} \quad (3.19)$$

$$|AB| = |AF| + |FB| = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}$$

$|AF|$ 长, $|FB|$ 短. 其中 θ 为弦的倾斜角, a, b, c 为双曲线和椭圆定义里的数.

例 3.41 过椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点 F_1 作两条垂直直线 l_1, l_2 与椭圆分别交于 A, C 和 B, D , 是否存在常数 λ , 使得 $\frac{1}{|AC|}, \lambda, \frac{1}{|BD|}$ 成等差数列? 若存在, 求出 λ 的值, 若不存在, 请说明理由.

解 当 AC 的斜率为零或不存在时, $\frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|BD|} = \frac{7}{12}$.

当 AC 斜率存在时, 设倾斜角为 θ , 则 BD 的倾斜角为 $\theta + \frac{\pi}{2}$, 那么 $|AC| = \frac{12}{4 - \cos^2 \theta}$,

$$|BD| = \frac{12}{4 + \sin^2 \theta} \Rightarrow \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|BD|} = \frac{7}{12} = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{7}{24}.$$

推论 3.9. 抛物线中以焦点弦为直径的圆必与准线相切.

推论 3.10. 抛物线 $y^2 = 2px$ 中以焦半径为直径的圆与 y 轴相切.

例 3.42 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 和点 $D(2, 0)$, 直线 $x = ty - 2$ 与抛物线交于不同两点 A, B , 直线 BD 与抛物线交于另一点 E , 给出以下判断:

- ① 以 BE 为直径的圆与抛物线准线相离;
- ② 直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 -2 ;

③ 设过点 A, B, E 的圆的圆心坐标为 (a, b) , 半径为 r , 则 $a^2 - r^2 = 4$.

其中, 所有判断正确的序号是

()

(A) ① ②

(B) ① ③

(C) ② ③

(D) ① ② ③

解 对于①, 根据要点提示明显 ✓;

对于②, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), E(x_0, y_0)$, 于是

$$k_{OB} \cdot k_{OE} = \frac{y_2 y_0}{x_2 x_0} = \frac{y_2 y_0}{x_2 x_0} = \frac{\sqrt{4x_2} \cdot (-\sqrt{4x_0})}{x_2 x_0} \xrightarrow{\text{抛物线几何平均性质}} \frac{-8}{4} = -2$$

所以 ✓;

$$\text{对于③, 联立} \begin{cases} y^2 = 4x \\ x = ty - 2 \end{cases} \text{得 } y^2 - 4ty + 8 = 0, \text{ 韦达定理}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 4t \\ y_1 y_2 = 8 \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 4t \\ y_1 y_2 = 8 \end{cases} \quad (3.21)$$

又 $y_2 y_0 = -8$, 所以点 A, E 关于 x 轴对称, 于是过点 A, B, E 的圆的圆心在 x 轴上,

由 (3.20), (3.21) 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4t^2 - 4 \\ x_1 x_2 = 4 \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4t^2 - 4 \\ x_1 x_2 = 4 \end{cases} \quad (3.23)$$

可知点 A, B 的中点 $M(2t^2 - 2, 2t)$, 所以直线 AB 的中垂线与 x 轴交点 N 的坐标为 $(2t^2, 0)$, 于是 $a = 2t^2$, 且

$$|MN|^2 = 4 + 4t^2 \quad (3.24)$$

由两点距离公式知

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 + (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 \\ &= (4t^2 - 4)^2 - 16 + 16t^2 - 32 \\ &= 16t^4 - 16t^2 - 32 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } a^2 - r^2 = a^2 - \left(|MN|^2 + \frac{|AB|^2}{4} \right) = 4t^4 - 4 - 4t^2 - 4t^4 + 4t^2 + 8 = 4.$$

所以 ③ ✓. 选 D.

定理 3.6

三大圆锥曲线中, 若弦 AB 的倾斜角为 θ , 斜率为 k , 且 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB} (\lambda > 0)$, 则

$$|\cos \theta| = \frac{|\lambda - 1|}{e(\lambda + 1)} \Leftrightarrow e = \sqrt{1 + k^2} \cdot \left| \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right| \quad (3.25)$$

例 3.43 抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点为 F , 过焦点的弦为 AB , 若 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$, 则 AB 的倾斜角为 ()

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

解 B.

变式训练 EXERCISES

192. 过抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点 F 作倾斜角为 60° 的直线与抛物线交于 A, B 两点 (A 上 B 下), 则 $\frac{|AF|}{|BF|} = \underline{\quad \Delta \quad}$.

193. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴是短轴的 2 倍, 过右焦点 F 且斜率为 $k (k > 0)$ 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$, 则 $k =$ ()

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$

194. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点为 B , 左右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 BF_2 与椭圆 C 的另一个交点为 A , 若 $\triangle AF_1F_2, \triangle BF_1F_2$ 的面积之比为 4:5, 则椭圆 C 的离心率为 $\underline{\quad \Delta \quad}$.

195. 过椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点 F 作直线 l 与椭圆交于 M, N 两点, B 为椭圆短轴的一个顶点, 是否存在直线 l , 使得 $\frac{S_{\triangle BFM}}{S_{\triangle BFN}} = 2$. 若存在, 求出直线方程; 若不存在, 说明理由.

196. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 若存在过右焦点 F 的直线与双曲线交于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{BF}$, 则双曲线离心率的最小值为 ()

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $2\sqrt{2}$

197. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 过点 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $|AF_2| = 2|F_2B|, |AB| = |BF_1|$ 则 C 的方程为 ()

(A) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ (B) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ (C) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (D) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

定理 3.7: 通径

三大圆锥曲线中【双曲线需同一支】，若焦点弦 AB 【不平行于坐标轴】，若 L 为通径，则

例 3.44 直线 l 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F ，且与抛物线交于 A, B 两点，若线段 AF, BF 的长分别为 m, n ，则 $4m + n$ 的最小值为 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{4}{L} = \frac{2}{ep}$ (3.26)

(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7
解 由抛物线焦半径公式易知 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ ，再由权方和不等式可知

$$4m + n = \frac{4}{\frac{1}{m}} + \frac{1}{\frac{1}{n}} \geq \frac{(\sqrt{4} + \sqrt{1})^2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = 9, \text{ 故选 B.}$$

引理 3.1. 三大圆锥曲线中【双曲线需同一支】， AB 为焦点弦，且 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB}$ ，【 L 为通径】。则

$$|AB| = \frac{L}{4} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 \right)$$

推论 3.11. 抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点为 F ，过焦点的弦 AB 的倾斜角为 θ ，则

$$S_{\triangle AOB} = \frac{p^2}{2 \sin \theta}, \quad |AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta}, \quad x_A \cdot x_B = \frac{p^2}{4}, \quad y_A \cdot y_B = -p^2 \quad (3.27)$$

推论 3.12. 若抛物线的顶点对焦点弦的张角被对称轴分成两部分的大小分别为 α, β ，则 $\tan \alpha \cdot \tan \beta = 4$ 。

推论 3.13. 设 $M(a, 0)$ 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的对称轴上的一个定点，过 M 的直线交抛物线于 A, B 两点， AB 对顶点的张角被对称轴分成两部分的大小分别为 α, β ，则 $\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{2p}{a}$ 。

推论 3.14. 抛物线 $x^2 = 2py$ 的焦点为 F , 过焦点的弦 AB 的倾斜角为 θ , 则

$$S_{\triangle AOB} = \frac{p^2}{2 \cos \theta}, \quad |AB| = \frac{2p}{\cos^2 \theta}, \quad |AF| = \frac{p}{1 - \sin \theta}, \quad |BF| = \frac{p}{1 + \sin \theta} \quad (3.28)$$

$$\frac{|AF|}{|BF|} = \lambda \Rightarrow \sin \theta = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \quad (3.29)$$

例 3.45 过抛物线 $y^2 = 12x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 设 $|AF| = m, |BF| = n$, ① 当 $m = 4$ 时, $n = \underline{\quad \Delta \quad}$ ② $m - \frac{18}{n}$ 的最小值为 $\underline{\quad \Delta \quad}$,

解 ① 利用 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{p} = \frac{1}{3} \Rightarrow n = 12$, ② 利用 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{p} = \frac{1}{3}$ 得 $m - \frac{18}{n} = m + \frac{18}{m} - 6 \geq 6\sqrt{2} - 6$.

例 3.46 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 且倾斜角为 120° 的直线交抛物线于 A, B 两点, 若 AF, BF 的中点在 y 轴上的射影分别为 M, N , 且 $|MN| = 4\sqrt{3}$, 则抛物线 C 的准线方程为 ()

- (A) $x = -1$ (B) $x = -2$ (C) $x = -\frac{3}{2}$ (D) $x = -3$

解 设 A, B 两点在 y 轴上的射影分别为 A', B' , 易知 $|A'B'| = 8\sqrt{3}$, 依题意由倾斜角为 120° 可知 $|AB| = 16$, 又根据式 (3.27) 知 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 120^\circ} = \frac{8p}{3}$, 所以 $p = 6$, 选 D.

例 3.47 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 且倾斜角为锐角的直线 l 交抛物线于 A, B 两点【点 A 在第一象限】, 线段 AB 的垂直平分线与 C 的准线交于点 M , $\triangle MAB$ 的面积等于 $\frac{1}{2}|AB|^2$, 设线段 AB 的中点为 N , 则下列结论正确的是 $\underline{\quad \Delta \quad}$. 【填上所有正确的序号】

- ① 点 N 到准线的距离为 $\frac{1}{2}|MN|$; ② $\angle AMB > 90^\circ$; ③ 直线 l 的倾斜角为 60° ; ④ $\frac{|AF|}{|BF|} = 7 + 4\sqrt{3}$.

解 设抛物线的准线为 m , 分别过点 A, N, B 作 $AA' \perp m, NN' \perp m, BB' \perp m$, 垂足分别为 A', N', B' , 因为直线 l 过抛物线的焦点 F , 所以 $|BB'| = |BF|, |AA'| = |AF|$, 又 $\triangle MAB$ 的面积等于 $\frac{1}{2}|AB|^2$, 所以 $|MN| = |AB|$, 于是

$$|NN'| = \frac{1}{2}(|BB'| + |AA'|) = \frac{1}{2}(|BF| + |AF|) = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|MN|$$

故 ① $\checkmark$;

$|MN'| = \frac{1}{2}|AB|$, 所以以 AB 为直径的圆与准线相切, 所以 $\angle AN'B = 90^\circ$, 所以 $\angle AMB < 90^\circ$, 故 ② $\times$;

由 ① 知 $\angle MNN' = 60^\circ$, 则直线 MN 的倾斜角为 120° , 又 $MN \perp l$, 所以直线 l 的倾斜角为 30° , 故 ③ $\times$;

设 $|AF| = x, |BF| = y$, 由直线 l 的倾斜角为 30° , 直线 AA' 与 x 轴平行, 可得 $\angle A'AB = 30^\circ$, 过 B 作

$BH \perp AA'$, 垂足为 H , 所以 $\cos \angle A'AB = \frac{|AH|}{|AB|} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 于是 $\frac{x}{y} = 7 + 4\sqrt{3}$, 故 ④ $\checkmark$.

答案为 ① ④.

变式训练 EXERCISES

198. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, $|AF| = 2$, 则 $|BF| = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.
199. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 若 $S_{\triangle AOB} = \sqrt{6}$, 则 $|AB| =$ ()
 (A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 16
200. 过抛物线 $x^2 = 8y$ 的焦点 F 的直线交该抛物线于 A, B 两点, O 为坐标原点, 若 $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{1}{2}$, 则 $\triangle AOB$ 的面积为 ()
 (A) $3\sqrt{2}$ (B) $12\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{2}$ (D) $9\sqrt{2}$
201. 过抛物线 $y^2 = 6x$ 的焦点的弦长为 12, 则此弦所在直线的倾斜角为 ()
 (A) $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$
202. 过抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 如果 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -12$, 那么抛物线的方程为 ()
 (A) $x^2 = 8y$ (B) $x^2 = 4y$ (C) $y^2 = 8x$ (D) $y^2 = 4x$
203. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 点 $M(3, 0)$, 直线 l 过焦点 F 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 8$, 则 $\triangle AMB$ 的面积为 ()
 (A) 4 (B) $4\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) 8

推论 3.15. 圆锥曲线中, 设过焦点 F 的弦为 AB , 其垂直平分线和焦点所在坐标轴交于点 N , 和 AB 交于点 M , 则 $\frac{|FN|}{|AB|} = \frac{e}{2}$.

解法一 不妨假设此曲线为椭圆, 如图 3.17 所示, 设 AB 的倾斜角 θ , AB 中点为 M , 由焦半径定义

$$|F_1M| = |F_1A| - \frac{1}{2}|AB| = \frac{b^2}{a - c \cos \theta} - \frac{\frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}}{2} = \frac{b^2 c \cos \theta}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}$$

$$\text{又 } |NF_1| = \frac{|F_1M|}{\cos \theta} = \frac{b^2 c}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}, \text{ 所以 } \frac{|FN|}{|AB|} = \frac{e}{2}.$$

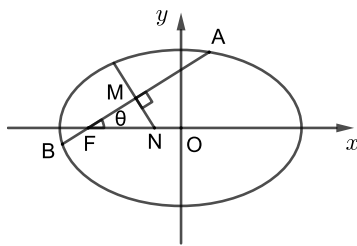


图 3.17

解法二 设 AB 为 x 轴, 则 M, N, O 三点重合, 且 A, B 为椭圆左右两端点, 所以 $\frac{|FN|}{|AB|} = \frac{c}{2a} = \frac{e}{2}$.

例 3.48 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 且斜率不为 0 的直线交椭圆于 A, B 两点, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 D , AB 的中点为 P , 且 $|DP| = \frac{3\sqrt{2}}{7}$, 求 k 的值.

解 $k = \pm 1$.

例 3.49 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线交双曲线于 P, Q 两点, 线段 PQ 的垂直平分线与 x 轴交于点 M , 则 $\frac{|MF|}{|PQ|}$ 的值为 ()

(A) $\frac{5}{3}$

(B) $\frac{5}{6}$

(C) $\frac{5}{4}$

(D) $\frac{5}{8}$

解 B.

变式训练 EXERCISES

204. 已知直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 交于不同两点 A, B .

(1) 若线段 AB 的中点为 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 求直线 l 的方程;

(2) 若 l 的斜率为 k , 且 l 过椭圆的左焦点 F , AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 N , 求证: $\frac{|FN|}{|AB|}$ 为定值.

3.5 准点弦

定义 3.9: 准点弦

圆锥曲线的准线与其对称轴的交点称为准点, 过准点的圆锥曲线的弦叫准点弦.

推论 3.16. 经过横向型圆锥曲线的准点 E 作斜率为 k 的直线 L , 与圆锥曲线交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{EA} = \lambda \overrightarrow{EB}$, 则 $k^2 = e^2 - \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^2$.

证 设 F 是准点 E 对应的焦点, 以 EF 所在直线为 x 轴, E 为原点建立直角坐标系, 则 $E(0,0)$, $F(p,0)$, 其中 p 为焦准距, 弦 EAB 的方程为

$$y = kx \quad (3.30)$$

设 $P(x,y)$ 为圆锥曲线上任意一点, 它到准线的距离为 d , 由圆锥曲线第二定义可得 $|PF| = ed \Rightarrow |PF|^2 = e^2 x^2 \Rightarrow (x-p)^2 + y^2 = e^2 x^2$, 化简得

$$(1-e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0 \quad (3.31)$$

(3.30) 代入 (3.31), 得

$$(1+k^2-e^2)x^2 - 2px + p^2 = 0 \quad (3.32)$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由第 160 页定义 3.11 可知当 $\overrightarrow{EA} = \lambda \overrightarrow{EB}$ 时可得

$$4p^2 = \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2\right)(1+k^2-e^2)p^2 \Rightarrow k^2 = e^2 - \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^2.$$

例 3.50 【2010 高考 II 理】椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 经过右准线与 x 轴的交点 E 且斜率为 k 的直线交椭圆于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{EA} = 3\overrightarrow{EB}$, 则 $k = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 $k^2 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3-1}{3+1}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$

例 3.51 【2010 高考 I 理】椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左准线与 x 轴的交点为 E , 椭圆上顶点为 B , BE 交椭圆于 A 点, 若 $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EA}$, 则离心率 $e = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 $e = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

例 3.52 【2008 高考 II 理】抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线与 x 轴的交点为 E , 过 E 作倾斜角为 30° 的直线交抛物线于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{EA} = t\overrightarrow{EB}$, 则 $t = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 $t = 5 \pm 2\sqrt{6}.$

3.6 点差法

3.6.1 中心弦

定义 3.10: 中心弦

- 如图 3.18 所示, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 直线 $y = kx$ 与椭圆 E 交于 A, B 两点【 AB 称为椭圆的直径】, P 为椭圆上异于 A, B 的点, 若直线 PA, PB 的斜率存在, 且分别为 k_1, k_2 , 则

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2} \quad (3.33)$$

- 双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则有结论 $k_1 \cdot k_2 = \frac{b^2}{a^2}$.

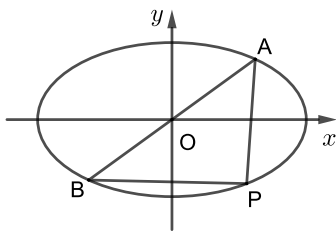


图 3.18

证 设 $A(x_0, y_0)$, 则 $B(-x_0, -y_0)$, $P(x, y)$, 则 $\begin{cases} \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$. 两式做差得 $\frac{x^2 - x_0^2}{a^2} + \frac{y^2 - y_0^2}{b^2} = 0$. 所以

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

例 3.53 $\triangle ABC$ 的三个顶点在椭圆 $4x^2 + 5y^2 = 6$ 上, 其中 A, B 两点关于原点 O 对称, 设直线 AB 的斜率为 k_1 , 直线 BC 的斜率为 k_2 , 则 $k_1 \cdot k_2 = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

解 $-\frac{4}{5}$.

例 3.54 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $y = x$ 交于 M, N 两点, 若在椭圆上存在点 P , 使得直线 MP, NP 斜率之积为 $-\frac{4}{9}$, 则椭圆离心率为 ()

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

解 B.

例 3.55 已知 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, 动点 $M(x, y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 记 M 的轨迹为曲线 C .

(1) 求 C 的方程, 并说明是什么曲线;

(2) 过坐标原点的直线交 C 于 P, Q 两点, 点 P 在第一象限, $PE \perp x$ 轴, 垂足为 E , 连接 QE 并延长交 C 于点 G , 证明: $\triangle PQG$ 是直角三角形.

解 (1) $\frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 (x \neq \pm 2)$, 所以 C 为中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上的椭圆, 不含左右顶点.

(2) 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(-x_1, -y_1)$, $E(x_1, 0)$ 于是 $k_{PQ} = \frac{y_1}{x_1}$, $k_{QE} = \frac{y_1}{2x_1} \Rightarrow k_{PQ} = 2k_{QE} \dots \dots \dots$ ①

由于坐标原点的直线交 C 于 P, Q 两点, 所以 $k_{GP} \cdot k_{GQ} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \dots \dots \dots$ ②

将①式代入②式即得 $k_{GP} \cdot k_{PQ} = -1$, 所以 $PQ \perp PG$, 故 $\triangle PQG$ 是直角三角形.

中心弦结论

1. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右顶点为 A, B , P 为椭圆上任意一点【不与 A, B 重合】, 则 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$.

2. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的内接平行四边形 $ABCD$ 邻边 AB 与 AD 所在直线的斜率之积为 $k_{AB} \cdot k_{AD} = -\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$.

3. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右顶点为 A, B , P 为双曲线上任意一点【不与 A, B 重合】, 则 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$.

例 3.56 已知直线 $l: \sqrt{3}x + y + m = 0$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右支交于 M, N 两点, 点 M 在第一象限, 若点 Q 满足 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ} = \mathbf{0}$ 【 O 为坐标原点】, 且 $\angle MNQ = 30^\circ$, 则双曲线的渐近线方程是 ()

(A) $y = \pm \frac{1}{2}x$

(B) $y = \pm x$

(C) $y = \pm 2x$

(D) $y = \pm \sqrt{2}x$

解 根据题意, $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ} = \mathbf{0} \Rightarrow M, Q$ 关于坐标原点 O 对称, 所以

$$k_{NM} \cdot k_{NQ} = \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow (-\sqrt{3}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{b^2}{a^2} = 1. \text{ 答案为 B.}$$

例 3.57 如图 3.19, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上、下顶点分别为 B_1, B_2 , 点 P 是椭圆

上不与 B_1, B_2 重合的点, B_1P, B_2P 分别交 x 轴于 M, N , 求证: $|OM| \cdot |ON|$ 为定值.

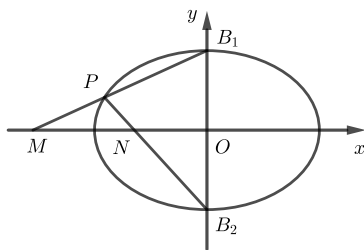


图 3.19

证 设 $M(m, 0), N(n, 0)$, 由定义 3.10 可知 $k_{B_1P} \cdot k_{B_2P} = -\frac{b^2}{a^2}$, $\therefore \frac{b}{-m} \cdot \frac{b}{n} = -\frac{b^2}{a^2}$, $\therefore m \cdot n = a^2$, 即 $|OM| \cdot |ON| = a^2$ 为定值.

例 3.58 如图 3.20, PQ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 不过中心的弦, 椭圆的左、右顶点分别为 a_1, a_2 , 直线 a_1P, Qa_2 相交于点 M , 直线 Pa_2, a_1Q 相交于点 N , 求证: $MN \perp a_1a_2$.

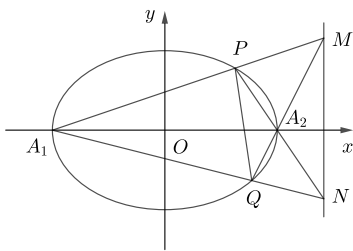


图 3.20

证 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由定义 3.10 可知 $k_{PA_1} \cdot k_{PA_2} = -\frac{b^2}{a^2}$, 即

$$\frac{y_1}{x_1 + a} \cdot \frac{y_2}{x_2 - a} = -\frac{b^2}{a^2} \quad (3.34)$$

同理

$$\frac{y_2}{x_2 + a} \cdot \frac{y_1}{x_1 - a} = -\frac{b^2}{a^2} \quad (3.35)$$

由以上两式得 $(x_1 + a)(x_2 - a) = (x_2 + a)(x_1 - a)$, $\therefore a(x_2 - x_1) = a(x_1 - x_2)$, $\therefore x_1 = x_2$, $\therefore MN \perp a_1a_2$.

例 3.59 如图 3.21, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 a_1, a_2 , 点 F_2 是椭圆的右焦点, 直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$, M 为椭圆上任意一点, 直线 a_1M, a_2M 分别交直线 l 于点 P, Q , 求证: $PF_2 \perp QF_2$.

证 设 $P(\frac{a^2}{c}, y_1), Q(\frac{a^2}{c}, y_2)$, 由定义 3.10 可知 $k_{Ma_1} \cdot k_{Ma_2} = -\frac{b^2}{a^2}$, $\therefore \frac{y_1}{\frac{a^2}{c} + a} \cdot \frac{y_2}{\frac{a^2}{c} - a} = -\frac{b^2}{a^2}$,

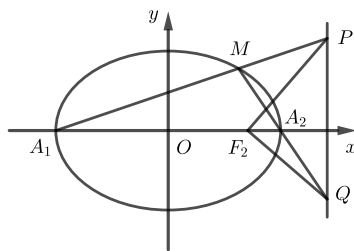


图 3.21

$$\therefore \frac{y_1 y_2}{\frac{a^4}{c^2} - a^2} = -\frac{b^2}{a^2}, \therefore y_1 y_2 = b^2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) = -\frac{b^4}{c^2},$$

$$\therefore k_{PF_2} \cdot k_{QF_2} = \frac{y_1}{\frac{a^2}{c} - c} \cdot \frac{y_2}{\frac{a^2}{c} - c} = \frac{-\frac{b^4}{c^2}}{\frac{b^4}{c^2}} = -1, \therefore PF_2 \perp QF_2.$$

例 3.60 如图 3.21, 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴的两个端点分别为 A, B , 点 P 是双曲线上不同于实轴端点的点, 直线 PA, PB 分别与直线 $l: x = m (|m| < a)$ 交于 M, N 两点, 求证: 以线段 MN 为直径的圆必经过两个定点.

证 设 $P(x_0, y_0)$, 易知 $A(-a, 0), B(a, 0)$, 由中心弦定理可得

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y_0^2}{x_0^2 - a^2} = \frac{b^2}{a^2} \quad (3.36)$$

由直线 PB 和直线 l 可得点 M 坐标为 $M\left(m, \frac{y_0}{x_0 - a}(m - a)\right)$, 同理可得点 N 坐标为

$MN\left(m, \frac{y_0}{x_0 + a}(m + a)\right)$, 于是线段 MN 为直径的圆的方程为

$$(x - m)^2 + \left(y - \frac{y_0}{x_0 - a}(m - a)\right)\left(y - \frac{y_0}{x_0 + a}(m + a)\right) = 0 \quad (3.37)$$

由对称性知这两个定点在 x 轴上, 给圆的方程令 $x = 0$, 得到

$$(x - m)^2 + \frac{y_0^2}{x_0^2 - a^2}(m^2 - a^2) = 0 \quad (3.38)$$

把式 (3.36) 代入式 (3.38), 得 $(x - m)^2 + \frac{b^2}{a^2}(m^2 - a^2) = 0$, 于是两个定点为 $E\left(m + \frac{b\sqrt{a^2 - m^2}}{a}, 0\right)$,

$F\left(m - \frac{b\sqrt{a^2 - m^2}}{a}, 0\right)$.

205. 【多选】已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与直线 $y = kx$ 交于 A, B 两点, 点 $P(x_0, y_0)$ 为 C 上任意一点, 直线 PA, PB 的斜率分别为 k_{PA}, k_{PB} , 且 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{9}{4}$, 则下列结论正确的是 ()

(A) 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{3}{2}x$

(B) 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{5}{2}x$

(C) 双曲线的离心率为 $\frac{\sqrt{13}}{2}$

(D) 双曲线的离心率为 $\frac{13}{4}$

3.6.2 非对称韦达

在圆锥曲线中, 如果最后整理出的式子 x_1, x_2 或 y_1, y_2 前的系数相同, 那么直接使用韦达定理即可化简; 若并非对称出现, 就要进行一些处理之后才能继续.

非对称韦达

式子 $\frac{my_1y_2 - y_1}{my_1y_2 + 3y_2}$ 就叫非对称韦达式, 将含有两根积的项转化为两根和的形式即可.

例 3.61 如图 3.25, 已知 P, Q 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右顶点, 直线 AB 过坐标轴上的定点 $M(m, 0)$, 于是 $\frac{k_{BQ}}{k_{PA}} = \frac{a+m}{a-m}$.

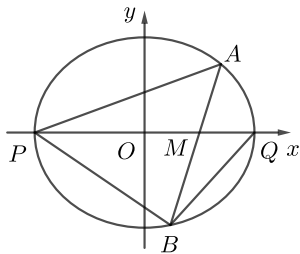


图 3.22

证 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 $AB: x = ty + m$, 联立

$$\begin{cases} x = ty + m \\ b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \end{cases} \quad \text{可得}$$

$$(b^2t^2 + a^2)y^2 + 2b^2tmy + b^2(m^2 - a^2) = 0 \quad (3.39)$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-2b^2tm}{b^2t^2 + a^2} \\ y_1y_2 = \frac{b^2(m^2 - a^2)}{b^2t^2 + a^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{y_1 + y_2}{y_1y_2} = -\frac{2b^2tm}{b^2(m^2 - a^2)} \Rightarrow ty_1y_2 = \frac{a^2 - m^2}{2m}(y_1 + y_2) \quad (3.40)$$

$$\frac{k_{BQ}}{k_{PA}} = \frac{y_2(x_1 + a)}{y_1(x_2 - a)} = \frac{ty_1y_2 + (m+a)y_2}{ty_1y_2 + (m-a)y_1} \quad (3.41)$$

(3.40) 代入 (3.41) 可得

$$\frac{k_{BQ}}{k_{PA}} = \frac{(a+m)(a-m)y_1 + (a+m)^2y_2}{(a-m)^2y_1 + (a+m)(a-m)y_2} = \frac{a+m}{a-m} \quad (3.42)$$

例 3.62 如图 3.23, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的左、右顶点分别为 P, Q , 过椭圆右焦点 F 的直线 l 与椭圆交于 A, B 两点, 且直线 l 的斜率不为 0, 问是否存在常数 λ , 使得在直线 l 的转动过程中, 有 $k_{AP} = \lambda k_{BQ}$ 恒成立?

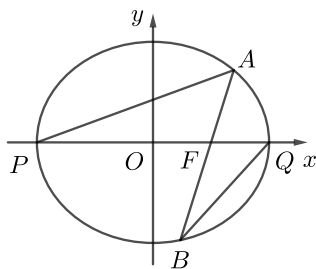


图 3.23

解 $\lambda = \frac{1}{3}$.

例 3.63 如图 3.24, 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别为 A, B , 过右焦点 $F(1, 0)$ 的直线 l 与椭圆交于 M, N 两点, 且直线 l 的斜率不为 0, 则直线 AM 与直线 NB 交点 $T(x_0, y_0)$ 的横坐标 x_0 为定值.

解 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 $l: x = my + 1$, 易知 $k_{NB} = 3k_{AM}$, 设直线 $NB: x = ty + 2$, 则直线 $AM: x = 3ty - 2$, 联立

$$\begin{cases} x = ty + 2 \\ x = 3ty - 2 \end{cases} \quad \text{可得 } x_0 = 4.$$

例 3.64 如图 3.25, 已知 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的左右顶点, G 为 E 的上顶点, $\vec{AG} \cdot \vec{GB} = 8$, P 为直线 $x = 6$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C , PB 与 E 的另一交点为 D .

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 证明: 直线 CD 过定点.

解 (1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$;

$$\begin{cases} \frac{y^2}{2} + x^2 = 1 \\ y = kx + 1 \end{cases} \quad \text{可得}$$

$$(k^2 + 2)x^2 + 2kx - 1 = 0 \quad (3.48)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2k}{k^2 + 2} \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{k^2 + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{4}{k^2 + 2} \\ y_1 y_2 = -\frac{2k^2 - 2}{k^2 + 2} \end{cases} \Rightarrow y_1 y_2 = \frac{1 - k^2}{2}(y_1 + y_2) \quad (3.49)$$

直线 AC 与直线 BD 的方程为

$$\begin{cases} y = \frac{y_1}{x_1 + 1}(x + 1) \end{cases} \quad (3.50)$$

$$\begin{cases} y = \frac{y_2}{x_2 - 1}(x - 1) \end{cases} \quad (3.51)$$

两式相比得

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{y_2(x_1+1)}{y_1(x_2-1)} = \frac{y_2\left(\frac{y_1-1}{k}+1\right)}{y_1\left(\frac{y_2-1}{k}-1\right)} = \frac{\frac{1}{k}y_1y_2 + \left(1-\frac{1}{k}\right)y_2}{\frac{1}{k}y_1y_2 - \left(1+\frac{1}{k}\right)y_1} \quad (3.52)$$

式 (3.49) 代入式 (3.52) 化简得 $\frac{x+1}{x-1} = \frac{k-1}{k+1}$, 于是 $x_Q = -k$, 所以 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \left(-\frac{1}{k}\right)(-k) = 1$.

例 3.66 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右端点分别为 a_1, a_2 , 过点 $F(1, 0)$ 的直线 l 交椭圆于 P, Q 两点, 且点 P 位于 x 轴上方, 记直线 a_1Q, a_2P 的斜率分别为 k_1, k_2 .

(1) 证明: $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值;

(2) 设点 Q 关于 x 轴的对称点为 Q_1 , 求 $\triangle PFQ_1$ 面积的最大值.

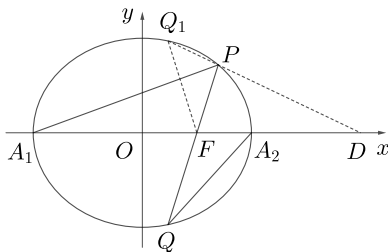


图 3.26

解 (1) $\frac{k_1}{k_2} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$;

(2) 易知 $\begin{cases} k_{a_1P} \cdot k_{a_1Q} = -\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{4} \\ k_{a_1Q} = -k_{a_1Q_1} \end{cases}$ 故 $k_{a_1P} \cdot k_{a_1Q_1} = \frac{1}{4}$, 于是 Q_1P 所在直线恒过点 $D(4, 0)$, 设

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $Q_1(x_2, -y_2)$, 直线 $PQ: x = my + 1$, 和椭圆联立后有 $y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}$,

$$S_{\triangle PFQ_1} = S_{\triangle DFQ_1} - S_{\triangle DFP} = \frac{3}{2} |y_1 + y_2| = \frac{9|m|}{3m^2 + 4} = \frac{9}{3|m| + \frac{4}{|m|}} \quad (3.53)$$

由基本不等式得

$$S_{\triangle PFQ_1} = \frac{9}{3|m| + \frac{4}{|m|}} \leq \frac{9}{2\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (3.54)$$

当且仅当 $3m = \frac{4}{|m|}$ 时等号成立.

例 3.67 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右顶点分别为 A, B , P, Q 是椭圆上的两点且满足 $k_{AP} = 7k_{QB}$, 求 $\triangle PQB$ 与 $\triangle PQA$ 面积之差的最大值.

解 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 直线 $PQ: x = my + n$, 联立

$$\begin{cases} x = my + n \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{可得} \quad (m^2 + 4)y^2 + 2mny + n^2 - 4 = 0 \quad (3.55)$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-2mn}{m^2 + 4} \\ y_1 y_2 = \frac{n^2 - 4}{m^2 + 4} \end{cases} \Rightarrow \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = -\frac{2mn}{n^2 - 4} \Rightarrow my_1 y_2 = \frac{4 - n^2}{2n} (y_1 + y_2) \quad (3.56)$$

$$\frac{k_{AP}}{k_{BQ}} = 7 \Rightarrow \frac{y_1}{x_1 + 2} = \frac{7y_2}{x_2 - 2} \Rightarrow 7 = \frac{my_1 y_2 + (n - 2)y_1}{my_1 y_2 + (2 + n)y_2} \quad (3.57)$$

(3.56) 代入 (3.57) 可得

$$7 = \frac{2 - n}{n + 2} \Rightarrow n = -\frac{3}{2} \quad (3.58)$$

所以直线 PQ 恒过定点 $N\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

此时方程 (3.55) 变为

$$(m^2 + 4)y^2 - 3my - \frac{7}{4} = 0 \quad (3.59)$$

$$\Delta = 9m^2 + 4(m^2 + 4) \cdot \frac{7}{4} = 4(4m^2 + 7),$$

故 $\triangle PQB$ 与 $\triangle PQA$ 面积之差

$$\begin{aligned}
 S &= S_{\triangle PQB} - S_{\triangle PQA} \\
 &= \frac{1}{2}|BN| \cdot |y_1 - y_2| - \frac{1}{2}|AN| \cdot |y_1 - y_2| \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot |y_1 - y_2| - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |y_1 - y_2| \\
 &= \frac{3}{2} \cdot |y_1 - y_2| = \frac{3}{2} \cdot \frac{2\sqrt{4m^2+7}}{m^2+4} = \frac{3\sqrt{4m^2+7}}{m^2+4}
 \end{aligned}$$

设 $t = \sqrt{4m^2+7}$, 则 $m^2 = \frac{t^2-7}{4}$, $t \geq \sqrt{7}$, 所以

$$S = \frac{12t}{t^2+9} \leq \frac{12t}{2\sqrt{t^2 \cdot 9}} = 2 \quad (3.60)$$

当且仅当 $t = 3 > \sqrt{7}$ 时, 不等式等号成立, 故 $\triangle PQB$ 与 $\triangle PQA$ 面积之差的最大值为 2.

例 3.68 【2022 深圳二模】已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $M(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 且焦距 $|F_1F_2| = 2\sqrt{3}$, 线段 AB , CD 分别是它的长轴和短轴.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 若 $N(s, t)$ 是平面上的动点, 从下面两个条件中选一个, 证明: 直线 PQ 经过定点.

① $s = 1, t \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 NA, NB 与椭圆 E 的另一交点分别为 P, Q ;

② $t = 2, s \in \mathbf{R}$, 直线 NC, ND 与椭圆 E 的另一交点分别为 P, Q .

解 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; (2) 选 ②, 直线 PQ 经过的定点应是 $(0, \frac{1}{2})$.

3.6.3 中点弦

定理 3.8: 中点弦

如图 3.27 所示, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 直线 $y = kx + m$ 与椭圆 E 交于 A, B 两点, P 为弦 AB 的中点, 若直线 AB 的斜率为 k_{AB} , 则

$$k_{AB} \cdot k_{OP} = e^2 - 1 \quad (3.61)$$

双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 结论相同.

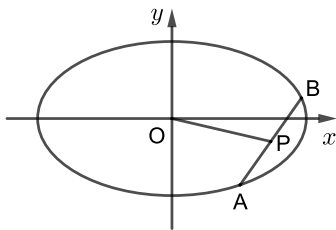


图 3.27

证 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$, 则 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$, 两式做差

$$\begin{aligned} \frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} &= 0 \Rightarrow \frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{a^2} + \frac{(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}{b^2} = 0 \\ \Rightarrow \frac{2x_0(x_2 - x_1)}{a^2} + \frac{2y_0(y_2 - y_1)}{b^2} &= 0 \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} \Rightarrow k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} \end{aligned}$$

例 3.69 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一条弦所在直线方程是 $x - y + 5 = 0$, 弦的中点坐标是 $M(-4, 1)$, 则椭圆的离心率是 ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

解 C.

例 3.70 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为离心率的两倍, 直线 $l: 4x - 4y + 3 = 0$ 交 C 于

A, B 两点, 且 AB 中点的横坐标为 $-\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 M, N 为椭圆 C 上的点, O 为坐标原点, 且 $|OM|^2 + |ON|^2 = \frac{3}{4}$, 求证: OM, ON 的斜率平方之积是定值.

解 (1) 依题意由中点弦公式可知椭圆 C 的方程为 $2x^2 + 4y^2 = 1$;

证 (2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 依题意

$$|OM|^2 + |ON|^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = \frac{3}{4} \quad (3.62)$$

因为 M, N 为椭圆 C 上的点, 所以

$$\begin{cases} 2x_1^2 + 4y_1^2 = 1 \\ 2x_2^2 + 4y_2^2 = 1 \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\quad (3.64)$$

由 (3.62)(3.63)(3.64) 可知 $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$. 所以

$$k_{OM}^2 \cdot k_{ON}^2 = \frac{y_1^2 y_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{\frac{1}{4}(1-2x_1^2) \cdot \frac{1}{4}(1-2x_2^2)}{x_1^2 x_2^2} = \frac{\frac{1}{16}(1-2(x_1^2+x_2^2))+4(x_1^2 x_2^2)}{x_1^2 x_2^2} = \frac{1}{4}$$

变式训练 EXERCISES

206. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, M 是椭圆 C 的上顶点, 椭圆 C 的左右焦点为 F_1, F_2 , 且 $\triangle MF_1F_2$ 的周长为 6,

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过动点 $P(1, t)$ 作直线交椭圆 C 于 A, B 两点, 且 $|PA| = |PB|$, 过 P 作直线 l , 使 l 与 AB 垂直, 求证: 直线 l 恒过定点, 并求出此定点.

207. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 试确定 m 的取值范围, 使得对于直线 $l: y = 4x + m$, 椭圆 C 上有两个不同的点关于这条直线对称.

208. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 右焦点 F , 斜率为 1 的直线交椭圆于 A, B 两点, $\vec{OA} + \vec{OB}$ 与 $\mathbf{a} = (3, -1)$ 共线, 求椭圆的离心率.

209. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为黄金分割数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的倒数, 则称为黄金双曲线. 已知直线 $y = x + b$ 与黄金双曲线交于 A, B 两点, M 为 AB 的中点, 则直线 OM 的斜率为 ()

(A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(C) $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$

(D) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

210. 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点 $A(-1,0)$, $B(1,0)$, 且 $\sin A$, $\sin C$, $\sin B$ 成等差数列.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的顶点 C 的轨迹方程;

(2) 直线 $y=kx+b$ 与顶点 C 的轨迹交于 M 、 N 两点, 当线段 MN 的中点 P 落在直线

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 上时, 试问: 线段 MN 的垂直平分线是否恒过定点? 若过定点, 求出定点的坐标; 若不过定点, 请说明理由.

211. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且经过点 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $(0,2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同两点 A 、 B , 以 OA 、 OB 为邻边的平行四边形 $OAMB$ 的顶点 M 在椭圆 C 上, 求直线 l 的方程.

定理 3.9: 抛物线中点弦公式

• 抛物线 $E: y^2 = 2px$ 的中点弦公式为

$$k_{AB} = \frac{p}{y_0} \quad (3.65)$$

• 抛物线 $E: x^2 = 2py$ 的中点弦公式为

$$k_{AB} = \frac{x_0}{p} \quad (3.66)$$

例 3.71 抛物线 $x^2 = 4y$, 一动点 $P(1, t)$, 若过点 P 可以作直线交抛物线于 A 、 B 两点, 且 P 为线段 AB 的中点, 则直线 AB 的斜率为 ()

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) 2

(D) -2

解 由抛物线中点弦公式可知 $k_{AB} = \frac{x_0}{p} = \frac{1}{2}$, 故选 A.

例 3.72 过抛物线 $y^2 = 4\sqrt{3}x$ 的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A 、 B 两点 (点 A 在第一象限), 若 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$, 则以 AB 为直径的圆的方程为 ()

(A) $\left(x - \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{64}{3}$

(B) $(x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = \frac{64}{3}$

(C) $(x - 5\sqrt{3})^2 + (y - 2)^2 = 64$

(D) $(x - 2\sqrt{3})^2 + (y - 2)^2 = 64$

解 易知 AB 所在直线方程为 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}y + \sqrt{3}$. 设 A, B 中点 $M(x_0, y_0)$, 由中点弦公式

$$k_{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{y_0} = \sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow x_0 = \frac{5\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 A.}$$

例 3.73 抛物线的顶点在坐标原点, 焦点为 $F(1, 0)$, 过焦点的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点, 若直线 l 的倾斜角为 45° , 则弦 AB 的中点坐标为 ▲ .

解 $(3, 2)$.

变式训练 EXERCISES

212. 设点 F 为抛物线 $y^2 = 16x$ 的焦点, A, B, C 三点在抛物线上, 且四边形 $ABCF$ 为平行四边形, 若对角线 $|BF| = 5$ (点 B 在第一象限), 则对角线 AC 所在的直线方程为 ()

(A) $8x - 2y - 11 = 0$ (B) $4x - y - 8 = 0$ (C) $4x - 2y - 3 = 0$ (D) $2x - y - 3 = 0$

二次曲线中点弦所在直线方程求法 移项, 使得右边为常数【0 也可以】. 等号左边二次项分别用 x_0x 和 y_0y 替换. 一次项分别用 $\frac{x_0+x}{2}$ 和 $\frac{y_0+y}{2}$ 替换. 等号右边是把已知点带入移项后的曲线的左端.

具体结论:

(1) 若点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 内, 则被 P 所平分的中点弦的方程是

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

(2) 双曲线: $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$.

(3) 抛物线: $y^2 - 2px = 0 \Rightarrow y_0y - p(x_0 + x) = y_0^2 - 2px_0$.

证 (1) 由式(3.61)可知

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow a^2y_0y - a^2y_0^2 + b^2x_0x - b^2x_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 \Rightarrow \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

中点轨迹

(1) 若点 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 所在平面内一点, 则过 P 的椭圆的弦中点的轨迹方程是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2}$$

(2) 双曲线:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2}$$

证 (1) 由式(3.61)可知

$$\begin{aligned} \frac{y - y_0}{x - x_0} \cdot \frac{y}{x} &= -\frac{b^2}{a^2} \\ \Rightarrow a^2 y^2 - a^2 y_0 y + b^2 x^2 - b^2 x_0 x &= 0 \\ \Rightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 &= b^2 x_0 x + a^2 y_0 y \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} \end{aligned}$$

例 3.74 过椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 内一点 $M(2, 1)$ 引一条弦, 使弦被点 M 平分, 则这条弦所在直线方程为 .

解 $x + 2y - 4 = 0$.

3.6.4 圆曲中的 8 字

例 3.75 如图 3.28, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 任意作两条斜率为 k 的平行直线 l_1, l_2 , 分别与椭圆 C 交于 A, B, C, D 四点, 设 AB, CD 的中点分别为 E, F , 则直线 EF 必过坐标原点.

证 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$, 直线 AB 的斜率为 k , 由点差法易知

$k_{OE} = -\frac{b^2}{a^2 k} = k_{OF}$, 所以 O, E, F 三点共线.

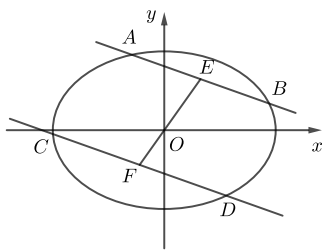


图 3.28

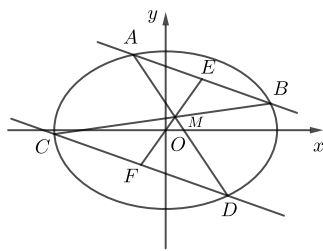


图 3.29

例 3.76 如图 3.29, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 任意作两条斜率为 k 的平行直线 l_1, l_2 , 分别与椭圆 C 交于 A, B, C, D 四点, AD, BC 相交于点 $M(x_0, y_0)$, 则椭圆离心率为

$$e = \sqrt{1 + k \cdot \frac{y_0}{x_0}}.$$

证 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$, 设 AB, CD 的中点分别为 E, F , 由点差法易知 $k_{OE} = -\frac{b^2}{a^2k} = k_{OF}$, 所以 O, E, F 三点共线.

又 $\triangle ABM \sim \triangle CDM$, 所以 M, E, F 三点共线, 于是 $k_{OE} = -\frac{b^2}{a^2k} = k_{OF} = k_{OM}$, 即 $-\frac{b^2}{a^2k} = \frac{y_0}{x_0}$,

所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 + \frac{y_0}{x_0}$, 即 $e = \sqrt{1 + k \cdot \frac{y_0}{x_0}}$.

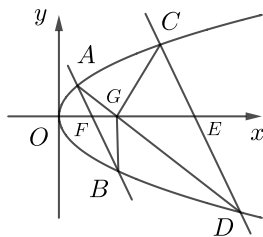


图 3.30

例 3.77 如图 3.30, 过点 $F(1,0)$ 和点 $E(4,0)$ 的两条平行直线 l_1, l_2 , 分别与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B, C, D 四点, AD 交 x 轴于点 G .

(1) 求证: 点 C , 点 D 的纵坐标乘积为定值;

(2) 分别记 $\triangle ABG$ 和 $\triangle CDG$ 的面积为 S_1 和 S_2 , 当 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$ 时, 求直线 AD 的方程.

证 (1) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$, 由抛物线几何平均值可知 $x_3x_4 = 4^2 = 16$, 所以 $y_3y_4 = -\sqrt{(4x_3)(4x_4)} = -16$;

(2) 由抛物线几何平均值以及平行线可得

$$\begin{cases} y_1y_2 = -4 & (3.67) \\ y_3y_4 = -16 & (3.68) \\ y_1 + y_2 = y_3 + y_4 & (3.69) \end{cases}$$

设直线 AB 的斜率为 k , 由三角形面积公式, $\begin{cases} S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2}|AB||AG|\sin \angle BAG \\ S_{\triangle CDG} = \frac{1}{2}|CD||DG|\sin \angle CDG \end{cases}$, 可得

$$\frac{S_1}{S_2} = -\frac{|AB| \cdot y_1}{|CD| \cdot y_4}, \text{ 依题可得}$$

$$-\frac{\sqrt{1+k^2} |y_1 - y_2| \cdot y_1}{\sqrt{1+k^2} |y_3 - y_4| \cdot y_4} = -\frac{y_1^2 - y_1 y_2}{y_3 y_4 - y_4^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{y_1^2 + 4}{y_4^2 + 16} = \frac{1}{4} \Rightarrow -2y_1 = y_4 \quad (3.70)$$

由式 (3.67), (3.68), (3.69), (3.70) 解得 $y_1 = 2$, $y_4 = -4$, 进而可得 $S(4, -4)$, $A(1, 2)$, 所以直线 AD 方程为 $y = -2x + 4$.

3.7 定点定值

3.7.1 直角引定点

直径对直角：圆上一点张直角的弦为直径，过定点圆心.

椭圆的顶点：

(1) 如果直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 相交于 A, B 两点, M 是其右顶点, 当 $MA \perp MB$ 时, 直线 l 过定点 $(at, 0)$, 其中 $t = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

(2) 如果直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 相交于 A, B 两点, M 是其左顶点, 当 $MA \perp MB$ 时, 直线 l 过定点 $(-at, 0)$, 其中 $t = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

(3) 如果直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 相交于 A, B 两点, M 是其上顶点, 当 $MA \perp MB$ 时, 直线 l 过定点 $(0, -tb)$, 其中 $t = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

(4) 如果直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 相交于 A, B 两点, M 是其下顶点, 当 $MA \perp MB$ 时, 直线 l 过定点 $(0, tb)$, 其中 $t = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

双曲线的顶点：

(1) 如果直线 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0, a \neq b)$ 相交于 A, B 两点, M 是其右顶点, 当 $MA \perp MB$ 时, 直线 l 过定点 $(at, 0)$, 其中 $t = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$.

(2) 如果直线 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0, a \neq b)$ 相交于 A, B 两点, M 是其左顶点, 当 $MA \perp MB$ 时, 直线 l 过定点 $(-at, 0)$, 其中 $t = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$.

抛物线的顶点：

- (1) 如果直线 l 与抛物线 $y^2 = 2px$ 相交于 A, B 两点, 当 $OA \perp OB$ 时, 直线 l 过定点 $(2p, 0)$.
- (2) 如果直线 l 与抛物线 $x^2 = 2py$ 相交于 A, B 两点, 当 $OA \perp OB$ 时, 直线 l 过定点 $(0, 2p)$.

直角顶点在圆锥曲线上的其它点 (非顶点):

- (1) 如果直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 相交于 A, B 两点, $M(x_0, y_0)$ 是椭圆上一定点, 当 $MA \perp MB$ 时, 直线 l 过定点 $(tx_0, -ty_0)$, 其中 $t = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.
- (2) 如果直线 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0, a \neq b)$ 相交于 A, B 两点, $M(x_0, y_0)$ 是双曲线上一定点, 当 $MA \perp MB$ 时, 直线 l 过定点 $(tx_0, -ty_0)$, 其中 $t = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$.
- (3) 如果直线 l 与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 相交于 A, B 两点, $M(x_0, y_0)$ 是抛物线上一定点, 当 $MA \perp MB$ 时, 直线 l 过定点 $(x_0 + 2p, -y_0)$.

例 3.78 过椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的上顶点 A 作互相垂直的直线分别交椭圆 C 于 M, N 两点, 求证: 直线 MN 过定点, 并求出该定点坐标.

解 设直线 AM 方程为 $y = kx + 1$, 联立椭圆方程, 得

$$(4k^2 + 1)x^2 + 8kx = 0 \quad (3.71)$$

由韦达定理得 $x_M = -\frac{8k}{4k^2 + 1}$, $y_M = \frac{1 - 4k^2}{4k^2 + 1}$,

同理可得 $x_N = -\frac{8k}{k^2 + 4}$, $y_N = \frac{k^2 - 4}{k^2 + 4}$,

由两点式可得直线 MN 的方程为 $y - \frac{1 - 4k^2}{4k^2 + 1} = \frac{k^2 - 1}{5k} \left(x + \frac{8k}{1 + 4k^2} \right)$, 即 $y = \frac{k^2 - 1}{5k}x - \frac{3}{5}$, 直线 MN 过定点 $\left(0, -\frac{3}{5}\right)$.

3.7.2 两垂直弦中点连线过定点

推论 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 内 x 轴上一点 $E(m, 0)$ 作两条互相垂直的弦 AB, CD , 设 AB, CD 的中点分别为 M, N , 则直线 MN 恒过定点 $\left(\frac{a^2 m}{a^2 + b^2}, 0\right)$.

例 3.79 已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 过点 $E(1, 0)$ 作两条互相垂直的弦 AB, CD , 设 AB, CD 的中点分别为 M, N .

- (1) 求证: 直线 MN 过定点;
- (2) 求 $\triangle MNE$ 面积的最大值.

解 (1) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 $AB: x = t_1 y + 1$, 联立

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \\ x = t_1 y + 1 \end{cases} \Rightarrow (t_1^2 + 2)y^2 + 2t_1 y - 1 = 0 \quad (3.72)$$

韦达定理 $\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-2t_1}{t_1^2 + 2} \\ y_1 y_2 = \frac{-1}{t_1^2 + 2} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{4}{t_1^2 + 2}$, 点 M 坐标为 $\left(\frac{2}{t_1^2 + 2}, \frac{-t_1}{t_1^2 + 2}\right)$, 由对称性易知直线

MN 恒过 x 轴上某定点, 设直线 MN 方程为 $x = my + n$, 代入点 M , 可得

$$nt_1^2 - mt_1 + 2n - 2 = 0 \quad (3.73)$$

同理设直线 $CD: x = t_2 y + 1$, 可得点 N 满足方程

$$nt_2^2 - mt_2 + 2n - 2 = 0 \quad (3.74)$$

所以直线 MN 方程为 $nt^2 - mt + 2n - 2 = 0$, 并且 t_1, t_2 为此方程的两根, 因为 $AB \perp CD$, 所以 $\frac{2n-2}{n} = -1 \Rightarrow n = \frac{2}{3}$, 所以直线 MN 过定点 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

(2) 采用 **参数方程**, 设直线 AB 方程为 $\begin{cases} x = 1 + p \cos \alpha \\ y = p \sin \alpha \end{cases}$, 代入椭圆方程, 整理得

$$(1 + \sin^2 \alpha)p^2 + 2p \cos \alpha - 1 = 0 \quad (3.75)$$

设 p_1, p_2 为此方程的两根, 则

$$|ME| = \left| \frac{p_1 + p_2}{2} \right| = \left| \frac{\cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} \right| \quad (3.76)$$

同理

$$|NE| = \left| \frac{p_1 + p_2}{2} \right| = \left| \frac{\sin \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} \right| \quad (3.77)$$

$$S_{\triangle MNE} = \frac{1}{2} \cdot |ME| \cdot |NE| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(1 + \sin^2 \alpha)(1 + \cos^2 \alpha)} \right| \quad (3.78)$$

$$= \left| \frac{1}{\frac{8}{\sin 2\alpha} + \sin 2\alpha} \right| \leq \frac{1}{9} \quad (3.79)$$

所以 $\triangle MNE$ 面积的最大值为 $\frac{1}{9}$.

例 3.80 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 过点 $E(1, 0)$ 作两条斜率分别为 k_1, k_2 的弦 AB, CD , 且 $k_1 + k_2 = -1$, 设 AB, CD 的中点分别为 M, N , 求证: 直线 MN 过定点.

证 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 $AB: x = t_1 y + 1$, 这里 $t_1 = \frac{1}{k_1}$, 联立

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = t_1 y + 1 \end{cases} \Rightarrow (3t_1^2 + 4)y^2 + 6t_1 y - 9 = 0 \quad (3.80)$$

韦达定理

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-6t_1}{3t_1^2 + 4} \\ y_1 y_2 = \frac{-9}{3t_1^2 + 4} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{4}{t_1^2 + 2} \quad (3.81)$$

点 M 坐标为 $\left(\frac{4}{3t_1^2 + 4}, \frac{-3t_1}{3t_1^2 + 4}\right)$, 设直线 MN 方程为 $mx + ny = 1$, 代入点 M , 可得

$$3t_1^2 + 3nt_1 + 4 - 4m = 0 \quad (3.82)$$

同理设直线 $CD: x = t_2 y + 1$, 这里 $t_2 = \frac{1}{k_2}$, 可得点 N 满足方程

$$3t_2^2 + 3nt_2 + 4 - 4m = 0 \quad (3.83)$$

所以直线 MN 方程为 $3t^2 + 3nt + 4 - 4m = 0$, 并且 t_1, t_2 为此方程的两根, 因为 $k_1 + k_2 = -1$, 所以 $t_1 + t_2 + t_1 t_2 = 0 \Rightarrow 4 - 4m = 3n$, 所以直线 MN 过定点 $\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

变式训练 EXERCISES

- 213.** 已知过抛物线 $y^2 = 2px$, 过 x 轴上一点 $E(m, 0)$ 作两条互相垂直的弦 AB, CD , 设 AB, CD 的中点分别为 M, N , 则直线 MN 恒过定点 $(p + m, 0)$.

3.7.3 两斜率互为相反数

两斜率互为相反数: 三大圆锥曲线中, 曲线上的一定点 $A(x_0, y_0)$ 与曲线上的两动点 B, C 满足直线 AB 与直线 AC 的斜率互为相反数, 则直线 BC 的斜率为定值.

$$(1) k_{BC} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}, \text{ 椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0);$$

$$(2) k_{BC} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}, \text{ 双曲线 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0);$$

(3) $k_{BC} = -\frac{p}{y_0}$, 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

证 (1) 设 $AB: y - y_0 = k(x - x_0)$, 与椭圆联立

$$\left. \begin{array}{l} y = kx + y_0 - kx_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2k(y_0 - kx_0)x + a^2[(y_0 - kx_0)^2 - b^2] = 0$$

由韦达定理得

$$x_0 + x_B = -\frac{2a^2k(y_0 - kx_0)}{a^2k^2 + b^2} \Rightarrow B\left(\frac{a^2k^2x_0 - 2a^2ky_0 - b^2x_0}{a^2k^2 + b^2}, \frac{b^2y_0 - a^2k^2y_0 - 2b^2kx_0}{a^2k^2 + b^2}\right) \quad (3.84)$$

同理 $C\left(\frac{a^2k^2x_0 + 2a^2ky_0 - b^2x_0}{a^2k^2 + b^2}, \frac{b^2y_0 - a^2k^2y_0 + 2b^2kx_0}{a^2k^2 + b^2}\right)$, 所以 $k_{BC} = \frac{4b^2kx_0}{4a^2ky_0} = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

(3) 设 $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$,

$$\begin{cases} y_0^2 = 2px_0 \\ y_1^2 = 2px_1 \end{cases}$$

两式 **相减** 并整理得

$$k_{AB} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2p}{y_1 + y_0} \quad (3.85)$$

同理

$$\begin{cases} k_{AC} = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{2p}{y_2 + y_0} \end{cases} \quad (3.86)$$

$$\begin{cases} k_{BC} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p}{y_1 + y_2} \end{cases} \quad (3.87)$$

因为直线 AB 与直线 AC 的斜率互为相反数, 所以 $k_{AB} = -k_{AC}$, 即 $y_1 + y_2 = -2y_0$, 故 $k_{BC} = -\frac{p}{y_0}$.

和通径相关的点

(1) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 e , 右焦点为 F_2 , 点 $A\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$, M 、 N 为椭圆 C 上的两个动点, 当直线 AM 的斜率与直线 AN 的斜率互为相反数, 那么直线 MN 的斜率为 e .

(2) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 e , 右焦点为 F_2 , 点 $A\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$, M 、 N 为双曲线 C 上的两个动点, 当直线 AM 的斜率与直线 AN 的斜率互为相反数, 那么直线 MN 的斜率为 $-e$.

- (3) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 焦点为 F , 点 $A\left(\frac{p}{2}, p\right)$, M, N 为抛物线 C 上的两个动点, 当直线 AM 的斜率与直线 AN 的斜率互为相反数, 那么直线 MN 的斜率为 -1 .

例 3.81 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 过点 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$, E, F 是椭圆上的两动点, 直线 AE 与直线 AF 的斜率互为相反数, 则直线 EF 的斜率为定值, 并求出该定值.

解 设直线 AE 方程为 $y = k(x-1) + \frac{3}{2}$, 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 得

$$(3 + 4k^2)x^2 + 4k(3 - 2k)x + 4\left(\frac{3}{2} - k\right)^2 - 12 = 0 \quad (3.88)$$

设 $E(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$, 因为点 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在椭圆上, 由韦达定理,
$$\begin{cases} x_1 + 1 = -\frac{4k(3-2k)}{3+4k^2} \\ x_1 \times 1 = \frac{4\left(\frac{3}{2}-k\right)^2-12}{3+4k^2} \end{cases}$$

所以 $x_1 = \frac{4\left(\frac{3}{2}-k\right)^2-12}{3+4k^2}$, $y_1 = kx_1 + \frac{3}{2} - k$,

又直线 AE 与直线 AF 的斜率互为相反数, 所以 $k_{EF} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-k(x_2 + x_1) + 2k}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}$, 即直线 EF 的斜率为定值 $\frac{1}{2}$.

变式训练 EXERCISES

- 214.** 作斜率为 $\frac{1}{3}$ 直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 交于 A, B 两点, 点 $P(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 在直线 l 的左上方, 求证: $\triangle PAB$ 的内切圆的圆心在一条定直线上.

- 215.** 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上一定点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 过 P 作两条直线 l_1, l_2 与圆

$$(x-1)^2 + y^2 = r^2 \left(0 < r < \frac{3}{2}\right) \text{ 相切且分别交椭圆于 } M, N \text{ 两点,}$$

(I) 求证: 直线 MN 的斜率为定值;

(II) 求 $\triangle MON$ 面积的最大值.

- 216.** 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上一定点 $P(1, 2)$ 作两条直线分别交抛物线于 A, B 两点, 且射线 PA 与 PB 关于直线 $x = 1$ 对称, 证明直线 AB 的斜率为定值.

3.7.4 和双曲线渐近线有关的定值

和双曲线渐近线有关

- 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦点到渐近线的距离是定值 b ;
- 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的顶点到渐近线的距离是定值 $\frac{b}{e}$.

定理 3.10

过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦点 F 作一条渐近线的垂线, 垂足为 A , 与另一条渐近线交于点 B , 若 $|FB| = \lambda|FA|$,

1. 点 A 坐标为 $A\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right)$, 在右准线上;
2. 如图 3.31, 若 A, B 在 F 同侧, 则双曲线的离心率 $e = \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda-1}}$;
3. 如图 3.32, 若 A, B 在 F 异侧, 则双曲线的离心率 $e = \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda+1}}$.

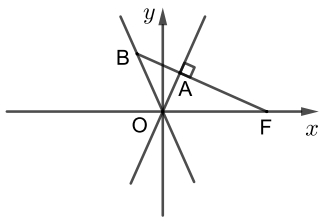


图 3.31

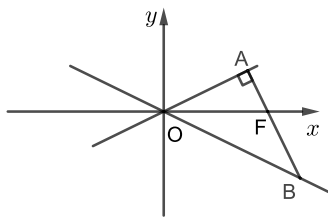


图 3.32

证 我们这里只证第一种情况.

如图 3.31 所示, 由点 A 坐标及相似可得 B 点坐标 $B\left(\frac{c^2 - ab^2}{c}, \frac{\lambda ab}{c}\right)$, 又 B 点在渐近线 $y = -\frac{b}{a}x$ 上, 解得 $e = \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda-1}}$.

注 第二种情况利用角平分线定理 + 勾股定理可证明.

例 3.82 已知 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点, 过 F 作双曲线 C 的一条渐近线的垂线 l , 垂足为 H , 直线 l 与双曲线 C 的另一条渐近线交于点 P , O 为坐标原点, 若 $\triangle POF$ 为等腰三角形, 则双曲线的离心率为 .

解 依题意可知 $FP = 2FH$, 所以 $e = \sqrt{\frac{2 \times 2}{2-1}} = 2$ 或 $e = \sqrt{\frac{2 \times 2}{2+1}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例 3.83 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦点 F 作一条渐近线的垂线, 垂足为 A , 与另一条渐近线交于点 B , 若 $S_{\triangle AOB} = 2ab$ (O 为原点), 则双曲线的离心率为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{21}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 或 $\sqrt{6}$

解 设 $|FB| = \lambda|FA|$, 分两种情况讨论:

① 如图 3.31, 若 A, B 在 F 同侧, 则 $2ab = S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\lambda - 1)b \Rightarrow \lambda = 5$, 由定

理 3.10 知双曲线的离心率 $e = \sqrt{\frac{2 \times 5}{5 - 1}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

② 如图 3.32, 若 A, B 在 F 异侧, 则 $2ab = S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\lambda + 1)b \Rightarrow \lambda = 3$, 由定

理 3.10 知双曲线的离心率 $e = \sqrt{\frac{2 \times 3}{3 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

选 C.

例 3.84 设 F 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点, 过 F 作双曲线一条渐近线的垂线, 与两条渐近线分别交于 P, Q , 若 $\overrightarrow{FP} = 3\overrightarrow{FQ}$, 则双曲线的离心率为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

解 C.

例 3.85 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点 F 作一条渐近线的垂线, 垂足为 A , 与另一条渐近线交于点 B , 若 $\overrightarrow{FB} = 2\overrightarrow{FA}$, 则该双曲线的离心率为 ()

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

解 C.

例 3.86 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线分别与 C 的两条渐近线交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{F_1A} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_1B} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 0$, 则 C 的离心率为 .

解法一 如图 3.33 所示, 依题意易知 $|OB| = |OF_1|$, 所以 $OA \perp F_1B$, 所以

$$\angle F_1OA = \angle AOB = \angle BOF_2 = 60^\circ, \text{ 因此 } e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

解法二 依题意易知 $|OB| = |OF_1|$, 所以 $OA \perp F_1B$, 利用本书第 124 页定理 3.10 可知

$$e = \sqrt{\frac{2 \times 2}{2 - 1}} = 2.$$

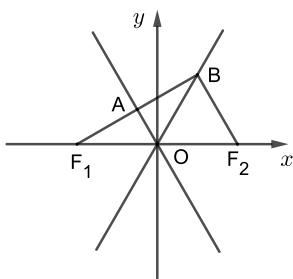


图 3.33

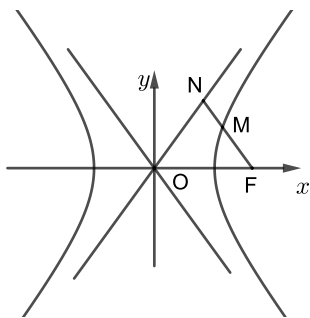


图 3.34

定理 3.11

过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦点 F 且与一条渐近线平行的直线与双曲线交于点 M , 与另一条渐近线交于点 N , 若 $\overrightarrow{FM} = \lambda \overrightarrow{MN}$, 则双曲线的离心率 $e = \sqrt{\lambda + 1}$.

证 如图 3.34 所示, 联立 FN 所在直线方程与第二条渐近线, 得 N 点坐

$$\text{标, } \begin{cases} y = -\frac{b}{a}(x-c) \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{c}{2}, \frac{bc}{2a}\right), \text{ 联立 } FM \text{ 所在直线方程与双曲线, 得 } M \text{ 点坐标.}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{b}{a}(x-c) \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{a^2 + c^2}{2c}, \frac{b^3}{2ac}\right),$$

$$\text{根据题意可知 } \overrightarrow{FM} = \lambda \overrightarrow{MN} \Rightarrow \frac{y_M}{y_N} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \Rightarrow \frac{b^2}{c^2} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \Rightarrow e = \sqrt{\lambda + 1}.$$

例 3.87 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦点 F 且与一条渐近线平行的直线与双曲线交于点 M , 与另一条渐近线交于点 N , 若 $\overrightarrow{FM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$, 则双曲线的离心率为 ()

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

解 C.

例 3.88 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 A , P 是双曲线上异于顶点的一个动点, 从 A 引两条渐近线的平行线与直线 OP 分别交于 Q 和 R 两点, 若 $\overrightarrow{OR} = \lambda \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ} = \mu \overrightarrow{OP}$, 则 $\lambda\mu = 1$.

证 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, $A(a, 0)$, 所以 AQ, AR 的方程为 $\begin{cases} y = \frac{b}{a}(x-a) \\ y = -\frac{b}{a}(x-a) \end{cases} \because \overrightarrow{OR} = \lambda \overrightarrow{OP},$

$$\overrightarrow{OQ} = \mu \overrightarrow{OP}, \therefore \overrightarrow{OR} = (\lambda x_0, \lambda y_0), \overrightarrow{OQ} = (\mu x_0, \mu y_0), \therefore \begin{cases} \mu y_0 = \frac{b}{a}(\mu x_0 - a) \\ \lambda y_0 = -\frac{b}{a}(\lambda x_0 - a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{ab}{bx_0 - ay_0} \\ \lambda = \frac{ab}{bx_0 + ay_0} \end{cases} \text{ 所以}$$

$$\lambda \mu = \frac{ab}{bx_0 + ay_0} \cdot \frac{ab}{bx_0 - ay_0} = \frac{(ab)^2}{b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2} = 1$$

推论 3.17. 过已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上的任意一点, 分别作两条渐近线的平行线, 则它们与渐近线围成的平行四边形面积是定值 $\frac{ab}{2}$.

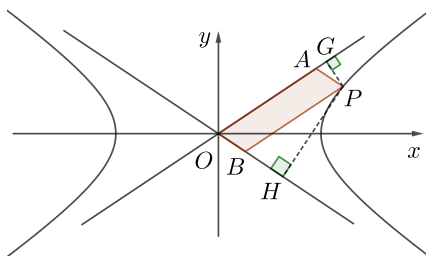


图 3.35

证 如图 3.35 所示, 设 $P(x_0, y_0)$, $\angle AOB = 2\alpha$, 则 $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{2b}{a}}{1 + \frac{b^2}{a^2}}$,

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形}AOBP} &= |OA| \cdot |OB| \cdot \sin \angle AOB = |OA| \cdot |OB| \cdot \sin 2\alpha \\ &= \frac{|PH|}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{|PG|}{\sin 2\alpha} \cdot \sin 2\alpha = |PH| \cdot |PG| \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} \\ &= \frac{\left| \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \cdot \frac{\left| \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \cdot \frac{1 + \frac{b^2}{a^2}}{\frac{2b}{a}} = \frac{a^2 b^2}{2ab} = \frac{1}{2} ab \end{aligned}$$

例 3.89 已知点 P 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0, c^2 = a^2 + b^2)$ 上一点, 若点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离之积为 $\frac{c^2}{4}$, 则该双曲线的离心率为 ()

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

解 特殊化: 把点 P 看成顶点, 则点 P 到渐近线的距离为 $\frac{ab}{c}$, 所以 $\frac{a^2 b^2}{c^2} = \frac{c^2}{4} \Rightarrow c^2 = 2ab$, 即 $a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow a = b$, 离心率为 $\sqrt{2}$, 选 A.

例 3.90 过已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦点, 分别作两条渐近线的平行线, 它们与渐

进线围成的四边形面积为 bc , 则双曲线的离心率为 ()

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) 3

解 B.

推论 3.18. 如图 3.36, 直线 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 则 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{b}{a} \cdot |x_1 x_2|$.

证 三角形 AOB 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 \left(-\frac{b}{a} x_2 \right) - x_2 \left(\frac{b}{a} x_1 \right) \right| = \frac{b}{a} \cdot |x_1 x_2|$.

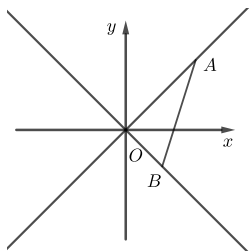


图 3.36

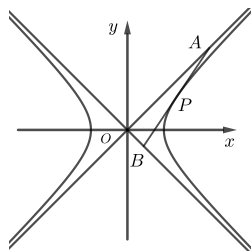


图 3.37

推论 3.19. 如图 3.37, 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一点 P 的切线与双曲线的渐近线交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 则三角形 AOB 的面积为 ab .

证 设 $P(x_0, y_0)$, 则切线 AB 方程为 $b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = a^2 b^2$, 与渐近线联立
$$\begin{cases} b^2 x^2 - a^2 y^2 = 0 \\ b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = a^2 b^2 \end{cases}$$

解得 $x_1 = \frac{a^2 b}{bx_0 - ay_0}$, $x_2 = \frac{a^2 b}{bx_0 + ay_0}$, 故 $S_{\triangle AOB} = \frac{b}{a} \cdot |x_1 x_2| = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^4 b^2}{a^2 b^2} = ab$.

变式训练 EXERCISES

217. 【2014 福建】 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别为 $l_1: y = 2x$, $l_2: y = -2x$.

(1) 求双曲线 E 的离心率;

(2) 动直线 l 分别与 l_1, l_2 交于 A, B 两点 (A, B 分别在第一, 第四象限), 且 $\triangle OAB$ 的面积恒为 8, 试探究: 是否存在总与直线 l 有且只有一个公共点的双曲线 E ? 若存在, 求出双曲线 E 的方程; 若不存在, 请说明理由.

推论 3.20. 如图 3.38, 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 直线 l 与双曲线右支及双曲线的渐近线交于 A, B, C, D 四个点, 求证: $|AB| = |CD|$.

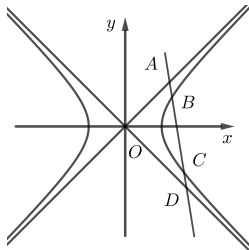


图 3.38

证 设 $l: x = ty + m (t \neq \pm \frac{b}{a})$, 渐近线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, 联立直线和渐近线,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ x = ty + m \end{cases} \Rightarrow (b^2 t^2 - a^2)y^2 + 2b^2 mty + b^2 m^2 = 0$$

$$\therefore y_A + y_D = \frac{2b^2 m t}{1 - m^2}, \therefore AD \text{ 的中点坐标为 } \left(\frac{ma^2}{a^2 - b^2 t^2}, \frac{b^2 m t}{a^2 - b^2 t^2} \right),$$

$$\text{联立双曲线和直线方程 } \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = ty + m \end{cases} \Rightarrow (b^2 t^2 - a^2)y^2 + 2b^2 mty + b^2(m^2 - a^2) = 0$$

故 BC 的中点坐标为 $\left(\frac{ma^2}{a^2 - b^2 t^2}, \frac{b^2 m t}{a^2 - b^2 t^2} \right)$, 所以 AD 与 BC 的中点为同一点, 又 A, B, C, D 四点共线, 故 $|AB| = |CD|$.

例 3.91 【2010 重庆高考改编】如图 3.39, 设双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, 过点 $M(x_1, y_1)$ 的直线 $l_1: x_1 x + 4y_1 y = 4$ 与过点 $N(x_2, y_2)$ 的直线 $l_2: x_2 x + 4y_2 y = 4$ 的交点 E 在双曲线 C 上, 直线 MN 与两条渐近线分别交于 G, H 两点, 求 $\triangle OGH$ 的面积.

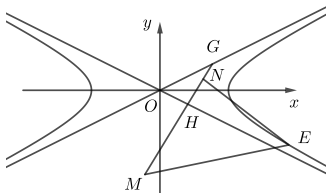


图 3.39

解 因为点 $E(x_3, y_3)$ 为 l_1, l_2 的交点, 所以 $\begin{cases} x_1 x_3 + 4y_1 y_3 = 4 \\ x_2 x_3 + 4y_2 y_3 = 4 \end{cases}$ 所以 $l_{MN}: x_3 x + 4y_3 y = 4$, 又因为

点 E 在双曲线 C 上, 所以 $\frac{x_3^2}{4} - y_3^2 = 1$,

设 $G(x_4, y_4)$, $H(x_5, y_5)$, 直线 GH 和双曲线的渐近线联立
$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - y^2 = 0 \\ x_3x + 4y_3y = 4 \end{cases} \quad \text{整理得}$$

$\left(\frac{1}{4} - \frac{x_3^2}{16y_3^2}\right)x^2 + \frac{x_3}{2y_3^2}x - \frac{1}{y_3^2} = 0$, 由韦达定理知 $x_4x_5 = \frac{16}{x_3^2 - 4y_3^2} = 4$, 由推论 3.18 可知

$$S_{\triangle OGH} = \frac{1}{2} \cdot |x_4x_5| = 2.$$

推论 3.21. 如图 3.40 所示, 平行四边形 $ABCD$ 中, 若两个小平行四边形的面积相等, 即 $S_1 = S_2$, 则 $EF \parallel BD$.

证 因为 $S_1 = S_2$, 所以 $ad \sin C = bc \sin C$, 即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 于是 $EF \parallel BD$.

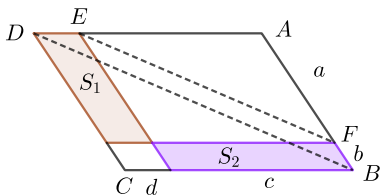


图 3.40

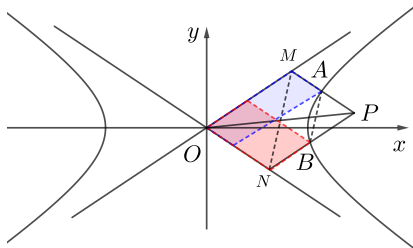


图 3.41

推论 3.22. 如图 3.41 所示, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线为 l_1, l_2 , 点 $P(x_0, y_0)$ 不在双曲线和渐近线上, 过点 $P(x_0, y_0)$ 作 l_1 的平行线交双曲线于点 A , 交 l_2 于点 M , 过点 $P(x_0, y_0)$ 作 l_2 的平行线交双曲线于点 B , 交 l_1 于点 N , 则 $AB \parallel MN$.

解法一 由推论 3.17, 推论 3.21 可知 $AB \parallel MN$.

解法二 直线 l_1, l_2 所形成的点集 C_1 可以视为一个特殊的二次曲线, 其方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, 过点 $P(x_0, y_0)$ 作 l_1, l_2 的平行线 PA, PB 所形成的二次曲线 C_2 的方程为 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 0$, 将双曲线 C 和 C_2 方程相减得

$$\frac{2x_0x - x_0^2}{a^2} - \frac{2y_0y - y_0^2}{b^2} = 1 \quad (3.89)$$

因为点 A 和点 B 都在 C 和 C_2 上, 所以点 A 和点 B 必在方程 (3.89) 上, 又因为此方程表示一条直线, 所以方程 (3.89) 就是直线 AB 的方程.

同理将二次曲线 C_1 和 C_2 方程相减得 MN 方程

$$\frac{2x_0x - x_0^2}{a^2} - \frac{2y_0y - y_0^2}{b^2} = 0 \quad (3.90)$$

注意到 AB 和 MN 的斜率相等, 且纵截距不相等, 所以 $AB \parallel MN$.

例 3.92 【2022 新高考 II 卷】设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(2, 0)$, 渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{3}x$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 经过 F 的直线与 C 的渐近线分别交于 A, B 两点, 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 在 C 上, 且 $x_1 > x_2 > 0, y_1 > 0$. 过 P 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与过 Q 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交于点 M , 从下面三个条件①②③中选择两个条件, 证明另一个条件成立:

① M 在 AB 上; ② $PQ \parallel AB$; ③ $|AM| = |BM|$.

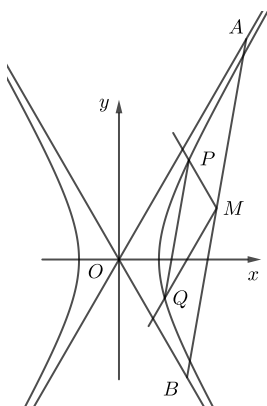


图 3.42

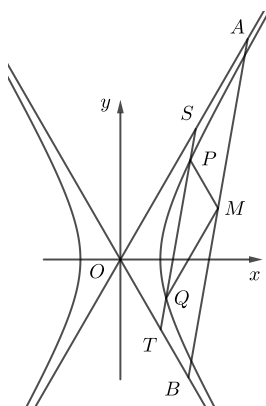


图 3.43

解 (1) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$; (2) 设 $M(x_0, y_0)$, 由于双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两条渐近线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, 故两条相交直线 $PM \cup QM$ 的方程为

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 0 \quad (3.91)$$

此方程与双曲线 C 的方程有相同的二次项系数, 相减即可得到直线 PQ 的方程为

$$\frac{2x_0x}{a^2} - \frac{2y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \quad (3.92)$$

故 $k_{PQ} = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, 即 $k_{PQ} \cdot k_{OM} = \frac{b^2}{a^2}$.

我们可以用“点差法”证明垂径定理在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda (\lambda \in \mathbf{R})$, 包括退化的情形, 即两条渐近线的情形) 中的推广: 设 M 是曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda$ 的弦 AB 的中点, 则 $k_{AB} \cdot k_{OM} = \frac{b^2}{a^2}$.

因此, 如果选择①③作为条件, 马上有 $k_{AB} = k_{PQ}$, 通过数量关系很容易得到② $PQ \parallel AB$. 由于两条直线的交点是唯一的, 故①② $\Rightarrow$ ③和②③ $\Rightarrow$ ①均可以用同一法证明.

事实上, 利用在“垂径定理”在双曲线中的推广, 可以进一步得到如下结论: 设直线 l 与双曲线 C 交于 P, Q 两点, 与双曲线 C 的渐近线交于 S, T 两点, 则由推论 3.20 可知 $|SP| = |QT|$, $|SQ| = |PT|$. 据此可以给出 ① ② $\Rightarrow$ ③ 的另一个证明: 如图 3.43, 依题意得四边形 $AMQS$, $BMPT$ 都是平行四边形, 故 $|AM| = |SQ| = |PT| = |BM|$.

推论 3.23. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线上分别有两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 且三角形 AOB 的面积为 ab , 平面上点 N 满足 $\overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$, 则点 N 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 4\lambda\mu$.

证 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点都在 y 轴右侧, 易知 $N(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$, 由推论 3.18 可得 $x_1 x_2 = a^2$, 且 $y_1 y_2 = \frac{b}{a} x_1 \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) x_2 = -b^2$, 则

$$\begin{aligned} b^2(\lambda x_1 + \mu x_2)^2 - a^2(\lambda y_1 + \mu y_2)^2 &= \lambda^2(b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2) + \mu^2(b^2 x_2^2 - a^2 y_2^2) + \lambda\mu(2a^2 b^2 - 2a^2 y_1 y_2) \\ &= \lambda\mu(2a^2 b^2 + 2a^2 b^2) = 4a^2 b^2 \lambda\mu \end{aligned}$$

所以 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 4\lambda\mu$, 即点 N 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 4\lambda\mu$.

3.7.5 抛物线的弦引发的结论

推论 3.24. 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, AB 为抛物线的弦, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $k_{AB} = \frac{2p}{y_1 + y_2}$.

证 $k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{2p} - \frac{y_1^2}{2p}} = \frac{2p}{y_1 + y_2}$.

推论 3.25. 抛物线中的内接三角形

1. 在抛物线 $y^2 = 2px$ 上有两点 A, B , 则有 $\frac{1}{k_{OA}} + \frac{1}{k_{OB}} = \frac{1}{k_{AB}}$.
2. 在抛物线 $x^2 = 2py$ 上有两点 A, B , 则有 $k_{OA} + k_{OB} = k_{AB}$.

例 3.93 已知过点 $M(1, 0)$ 的直线 AB 与抛物线 $y^2 = 2x$ 交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 若 OA, OB 的斜率之和为 1, 则直线 AB 方程为 .

解 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由抛物线几何平均性质知 $x_1 x_2 = 1$, 所以 $y_1 y_2 = -2$, 因此

$$k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -2$$

于是 $\frac{1}{k_{OA}} + \frac{1}{k_{OB}} = \frac{1}{k_{AB}} \Rightarrow k_{AB} = -2$, 所以直线 AB 方程为 $y = -2x + 2$.

例 3.94 已知不过原点 O 的直线交抛物线 $y^2 = 2px$ 于 A, B 两点, 若 OA, AB 的斜率分别为 $k_{OA} = 2, k_{AB} = 6$, 则 OB 的斜率为 ()

- (A) 3 (B) 2 (C) -2 (D) -3

解 D.

例 3.95 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 四边形 $ABCD$ 内接于抛物线, 若直线 AB, CD, BC, AD 的斜率存在, 分别记为 k_1, k_2, k_3, k_4 , 则 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4}$.

证 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$, 则

$$\begin{cases} \frac{1}{k_1} = \frac{y_1 + y_2}{2p}, & \frac{1}{k_2} = \frac{y_3 + y_4}{2p} \end{cases} \quad (3.93)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{k_3} = \frac{y_2 + y_3}{2p}, & \frac{1}{k_4} = \frac{y_1 + y_4}{2p} \end{cases} \quad (3.94)$$

于是

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{2p} = \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4}$$

3.7.6 抛物线几何平均

抛物线几何平均

- 抛物线 $y^2 = 2px$, 直线 l 与抛物线交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 直线 l 与 x 轴交于点 $C(x_0, 0)$, 则 $x_0^2 = x_1 x_2$;
- 抛物线 $x^2 = 2py$, 直线 l 与抛物线交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 直线 l 与 y 轴交于点 $C(0, y_0)$, 则 $y_0^2 = y_1 y_2$.

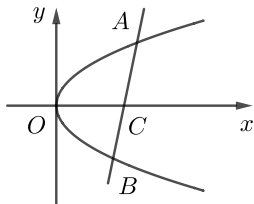


图 3.44

证 设直线 $x = ty + x_0$, 与抛物线联立可得方程 $y^2 - 2pty - 2px_0 = 0$, 再由韦达定理知 $y_1 y_2 = -2px_0$.

又 $y_1 y_2 = \sqrt{2px_1} \cdot (-\sqrt{2px_2}) = -2p\sqrt{x_1 x_2}$. 所以 $x_0^2 = x_1 x_2$.

例 3.96 过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点的直线 l 与抛物线交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点 (异于 O), 若 $|AF| = 5$, 则 $|BF| =$ ()

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) 1 (C) $\frac{5}{4}$ (D) 2

解 由抛物线定义可知点 A 坐标为 $A(4, 4)$, 再由几何平均性质知点 B 坐标为 $B\left(\frac{1}{4}, -1\right)$, 故

$$|BF| = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

例 3.97 抛物线 $y^2 = 4x$, 直线 l 与抛物线交于异于 O 的两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 且 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{1}{2}$, 求证: 直线 AB 恒过定点.

证 设直线 AB 与 x 轴交于点 $C(x_0, y_0)$.

$$k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-\sqrt{4x_1} \cdot \sqrt{4x_2}}{x_1 x_2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 x_2 = 64 \Rightarrow x_0 = 8$$

所以直线 AB 恒过定点 $(8, 0)$.

例 3.98 抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 直线 $y = k(x + 2)$ 与抛物线交于两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则直线 FA 与直线 FB 的斜率之和为 ()

- (A) 0 (B) 2 (C) -4 (D) 4

解 根据抛物线几何平均性质可知 $x_1 x_2 = (-2)^2 = 4$, 而

$$k_{FA} + k_{FB} = \frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{k(x_1 + 2)}{x_1 - 2} + \frac{k(x_2 + 2)}{x_2 - 2} = \frac{2k(x_1 x_2 - 4)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = 0$$

例 3.99 抛物线 $y^2 = 4x$ 上两动点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ (A 上 B 下) 满足 $OA \perp OB$, 则 $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOF$ 面积之和的最小值是 ()

- (A) 16 (B) $8\sqrt{3}$ (C) $8\sqrt{5}$ (D) 18

解 易知 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 4 \times (y_1 - y_2) = 2(y_1 - y_2)$, $S_{\triangle AFO} = \frac{1}{2}y_1$, 又由抛物线几何平均性质知

$$x_1 x_2 = 16 \Rightarrow y_1 y_2 = -16 \Rightarrow y_2 = -\frac{16}{y_1}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AFO} = \frac{5y_1}{2} + \frac{32}{y_1} \geq 8\sqrt{5}.$$

例 3.100 已知直线 $y = k(x - 3) (k > 0)$ 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 且 C 的准线与 x 轴交于点 M , 求证: $9x_1 + x_2 \geq 18$.

证 由抛物线几何平均性质知 $x_1 x_2 = 9 \Rightarrow 9x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{9x_1 x_2} = 18$, 当且仅当 $9x_1 = x_2$, 即 $x_1 = 1$, $x_2 = 9$ 时等号成立.

例 3.101 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , $\triangle ABC$ 的顶点都在抛物线上, 且满足 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{FC}$, 则 $\frac{1}{k_{AB}} + \frac{1}{k_{BC}} + \frac{1}{k_{CA}} = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 我们不妨设 C 为坐标原点, 易知

$$\frac{1}{k_{AB}} + \frac{1}{k_{BC}} + \frac{1}{k_{CA}} = \frac{1}{k_{AB}} + \frac{1}{k_{AB}} = \frac{2}{k_{AB}}$$

根据题意 F 为三角形的重心, 则 $AB \perp x$ 轴, 因此 $\frac{2}{k_{AB}} = 0$.

例 3.102 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , $\triangle ABC$ 的顶点都在抛物线上, 且满足 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \mathbf{0}$, 则 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}| = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 我们不妨设 A, B, C 三点的横坐标分别为 x_1, x_2, x_3 , 则由抛物线定义

$$\begin{cases} |\overrightarrow{FA}| = x_1 + 1 \\ |\overrightarrow{FB}| = x_2 + 1 \\ |\overrightarrow{FC}| = x_3 + 1 \end{cases} \Rightarrow |\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}| = x_1 + x_2 + x_3 + 3$$

由根据题意可知 F 为三角形的重心, 所以 $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, 答案为 6.

3.7.7 中心张直角两半弦

定理 3.12: 中心张直角两半弦

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 直线 l 与椭圆交于 A, B 两点, 在 $\triangle AOB$ 中, AB 边上的高为 OH , 则 $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|OH|^2} = \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

例 3.103 已知椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$, 直线 l 与椭圆交于 A, B 两点, 若以 AB 为直径的圆经过原点 O , 试探究点 O 到直线 AB 的距离是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

解法一 当直线 AB 的斜率不存在时, 直线 AB 垂直于 x 轴, 由对称性可设 $B(\pm x, \pm x)$, 代入椭圆方程可得 $|x| = \frac{2\sqrt{5}}{3}$, 此时原点 O 到直线 AB 的距离是 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

当直线 AB 的斜率 k 存在时, 设直线 AB 的方程为 $y = kx + t$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

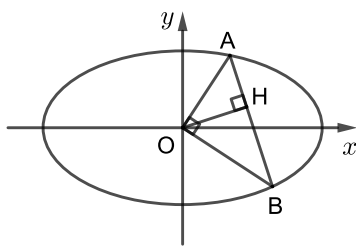


图 3.45 中心张直角

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx + t \end{cases} \quad \text{得 } (4 + 5k^2)x^2 + 10ktx + 5t^2 - 20 = 0, \text{ 所以 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-10kt}{4 + 5k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{5t^2 - 20}{4 + 5k^2} \end{cases},$$

$\therefore$ 以 AB 为直径的圆经过原点 O , $\therefore \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, $\therefore x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$,

$$\therefore x_1 x_2 + (kx_1 + t)(kx_2 + t) = (k^2 + 1)x_1 x_2 + kt(x_1 + x_2) + t^2 = 0,$$

$\therefore 9t^2 = 20(1 + k^2)$, 此时原点 O 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|t|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$, 此时原点 O 到直线 AB 的距离是 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

综上所述, 原点 O 到直线 AB 的距离是 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

解法二 当直线 AB 的斜率不存在时, $\begin{cases} |OA| = \sqrt{5} \\ |OB| = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} |OB| = \sqrt{5} \\ |OA| = 2 \end{cases}$, 于是 $d = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4+5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

当直线 OA 的斜率 k 存在且不为 0 时, 设 OA 的方程为 $y = kx$, 与椭圆联立

$$\begin{cases} \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} x_A^2 = \frac{20}{4 + 5k^2} \\ y_A^2 = \frac{20k^2}{4 + 5k^2} \end{cases} \quad \text{同理} \quad \begin{cases} x_B^2 = \frac{20k^2}{5 + 4k^2} \\ y_B^2 = \frac{20}{5 + 4k^2} \end{cases}$$

由 **等面积** 法可知

$$d^2 = \frac{|OA|^2 \cdot |OB|^2}{|AB|^2} = \frac{|OA|^2 \cdot |OB|^2}{|OA|^2 + |OB|^2} \Rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} = \frac{4 + 5k^2}{20(1 + k^2)} + \frac{5 + 4k^2}{20(1 + k^2)} = \frac{9}{20} \quad (3.95)$$

于是 $d = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

解法三 设 $A(x, y)$, $B(\lambda y, -\lambda x)$, 代入椭圆方程可得

$$\begin{cases} \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ \frac{\lambda^2 y^2}{5} + \frac{\lambda^2 x^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} = \frac{y^2}{5} + \frac{x^2}{4} \end{cases} \quad (3.96)$$

(3.96) + (3.97) 可得 $\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2} = \frac{9}{20}(x^2 + y^2)$, 于是

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{\lambda^2(x^2 + y^2)} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2(x^2 + y^2)} = \frac{9}{20} \quad (3.98)$$

于是 $d = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

变式训练 EXERCISES

218. 已知椭圆 C 的中心在坐标原点 O , 其短半轴长为 1, 一个焦点坐标为 $(1, 0)$, 点 A 在椭圆 C 上, 点 B 在直线 $y = \sqrt{2}$ 上, 且 $OA \perp OB$.

(1) 证明: 直线 AB 与圆: $x^2 + y^2 = 1$ 相切;

(2) 设 AB 与椭圆 C 的另一个交点为 D , 当 $\triangle AOB$ 面积最小时, 求 OD 的长.

219. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(1, \frac{3}{2})$, 且其离心率为 $\frac{1}{2}$, 过坐标原点 O 作两条互相垂直的射线与椭圆 C 分别交于 M, N 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 是否存在圆心在原点的定圆与直线 MN 总相切, 若存在, 求定圆的方程; 若不存在, 请说明理由.

220. 已知椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, P, Q 是椭圆上的两点, 且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$, 设 $\triangle OPQ$ 内切圆的半径为 r , 则 r 的最小值为 ()

(A) $\sqrt{2} - 1$

(B) $2 - \sqrt{2}$

(C) $\sqrt{2} + 1$

(D) $\sqrt{2}$

推论 3.26. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 直线 l 与椭圆交于 A, B 两点, 若 $OA \perp OB$, 则 $|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2$ 的最小值为 $\frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

例 3.104 已知椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$, 直线 l 与椭圆交于 A, B 两点, 若以 AB 为直径的圆经过原点 O , 试求弦长 $|AB|$ 的最小值.

解法一 采用“1”的代换

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |OA|^2 + |OB|^2 = \frac{20}{9} (|OA|^2 + |OB|^2) \left(\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} \right) \\ &= \frac{20}{9} \left(2 + \frac{|OB|^2}{|OA|^2} + \frac{|OA|^2}{|OB|^2} \right) \geq \frac{80}{9} \end{aligned}$$

当且仅当 $|OA| = |OB|$ 时 $|AB|$ 取得最小值 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

解法二 由等面积法可知求弦长 $|AB|$ 的最小值即求 $|OA| \cdot |OB|$ 的最小值. 由基本不等式

$$\frac{9}{20} = \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} \geq \frac{2}{|OA| \cdot |OB|} \Rightarrow |OA| \cdot |OB| \geq \frac{40}{9} \quad (3.99)$$

当且仅当 $|OA| = |OB|$ 时 $|OA| \cdot |OB|$ 取得最小值, 此时 $|AB|$ 也取得最小值 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

3.7.8 椭圆中有趣的六个定值

推论 3.27. 已知动直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 交于 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 两个不同的点, 若 $k_{OM} \cdot k_{ON} = -\frac{b^2}{a^2}$, 则:

- ① $x_1^2 + x_2^2 = a^2$; ② $y_1^2 + y_2^2 = b^2$; ③ $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$;
- ④ $|x_1 y_2 - x_2 y_1| = ab$; ⑤ $|OM|^2 + |ON|^2 = a^2 + b^2$; ⑥ $S_{\triangle MON} = \frac{1}{2}ab$.

证 详细证明如下:

①

$$k_{OM} \cdot k_{ON} = -\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow a^2 y_1 y_2 = -b^2 x_1 x_2 \quad (3.100)$$

因为点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 在椭圆上, 所以

$$\begin{cases} b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2 \Rightarrow b^2 x_1^2 - a^2 b^2 = -a^2 y_1^2 & (3.101) \\ b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2 = a^2 b^2 \Rightarrow b^2 x_2^2 - a^2 b^2 = -a^2 y_2^2 & (3.102) \end{cases}$$

(3.101) $\times$ (3.102) 得 $b^4(x_1^2 - a^2)(x_2^2 - a^2) = a^4 y_1^2 y_2^2 \xrightarrow{(3.100)} b^4 x_1^2 x_2^2$, 所以 $x_1^2 + x_2^2 = a^2$;

② (3.101) + (3.102) 得 $b^2(x_1^2 + x_2^2) + a^2(y_1^2 + y_2^2) = 2a^2b^2$, 所以 $y_1^2 + y_2^2 = b^2$;

③ 因为

$$\begin{aligned}(x_1y_1 + x_2y_2)^2 &= x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 \stackrel{\text{椭圆方程}}{=} b^2x_1^2\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right) + b^2x_2^2\left(1 - \frac{x_2^2}{a^2}\right) - 2 \cdot \frac{b^2}{a^2}x_1^2x_2^2 \\ &= b^2(x_1^2 + x_2^2) - \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 + x_2^2)^2 = a^2b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot a^4 = 0\end{aligned}$$

④ 因为 $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_1 + x_2y_2)^2 = (x_1^2 + x_2^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2)$,

$$\text{所以 } (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = a^2b^2 \Rightarrow |x_1y_2 - x_2y_1| = ab.$$

⑤ $|OM|^2 + |ON|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) = a^2 + b^2$;

⑥

$$\begin{aligned}S_{\triangle MON} &= \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cdot \sin \angle MON \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)^2}{(x_1^2 + x_2^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2)}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1y_2 - x_2y_1)^2} = \frac{1}{2} \cdot |x_1y_2 - x_2y_1| = \frac{1}{2}ab\end{aligned}$$

例 3.105 已知椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, A, B 为椭圆的左右顶点, M, N 为椭圆上非顶点的两点, P 为椭圆上一点, 满足 $OM \parallel AP$, $ON \parallel BP$, 求证: $\triangle OMN$ 的面积为定值.

证 根据题意, $k_{OM} \cdot k_{ON} = k_{AP} \cdot k_{BP} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{2}$, 可知答案为 $2\sqrt{2}$.

例 3.106 设点 $A(-\sqrt{3}, 0)$, $B(\sqrt{3}, 0)$, 直线 AP 和 BP 相交于点 P , 且它们的斜率之积为 $-\frac{2}{3}$.

(1) 求点 P 的轨迹方程 C ;

(2) 点 M, N 是 C 上不同于 A, B 的两点, 且满足 $AP \parallel OM$, $BP \parallel ON$, 求证 $\triangle MON$ 的面积为定值.

解 (1) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 (x \neq \pm \sqrt{3})$;

(2) 根据题意 $\left. \begin{array}{l} AP \parallel OM \\ BP \parallel ON \end{array} \right\} \Rightarrow k_{OM} \cdot k_{ON} = -\frac{2}{3} = -\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow S_{\triangle OMN} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

例 3.107 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(-2, 0)$, $B\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 四边形 $EFGH$ 的四个顶点都在椭圆上, 且对角线 EG, FH 过原点 O , 若 $k_{EG} \cdot k_{FH} = -\frac{3}{4}$, 求证: 四边形 $EFGH$ 的面积为定值, 并求出此定值.

解 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) $k_{EG} \cdot k_{FH} = -\frac{3}{4} = -\frac{b^2}{a^2}$, 所以 $S_{\text{四边形}EFGH} = 4S_{\triangle OGH} = 4 \times \frac{ab}{2} = 4\sqrt{3}$.

定理 3.13

如图 3.46 所示, 已知动直线 $l: Ax + By + C = 0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 交于 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 两个不同的点, 当且仅当 $a^2A^2 + b^2B^2 = 2C^2$ 时, $\triangle OMN$ 的面积取到最大值 $\frac{ab}{2}$.

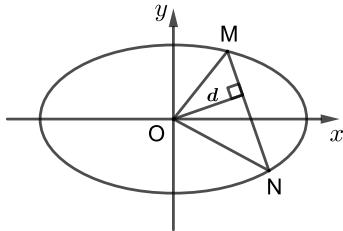


图 3.46

证 由等面积法可知

$$\frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot d = \frac{ab}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{a^2b^2(A^2 + B^2)(a^2A^2 + b^2B^2 - C^2)}}{a^2A^2 + b^2B^2} \cdot \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = ab$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2 - C^2} \cdot |C| = a^2A^2 + b^2B^2 \Rightarrow a^2A^2 + b^2B^2 = 2C^2.$$

例 3.108 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $B(1, 2)$.

(1) 若直线 l_1 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 且 A 为线段 MN 的中点, 求直线 MN 的斜率;

(2) 若直线 $l_2: y = 2x + t (t \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 求 $\triangle BPQ$ 面积的最大值.

解 (1) 具体方法详见本书第 112 页定理 3.8. 答案为 -1 ; (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

定理 3.14

已知动直线 l 经过点 $P(x_0, y_0)$, 且与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 交于 M, N 两个不同的点.

1. 当 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \geq \frac{1}{2}$ 时, $\triangle OMN$ 的面积取到最大值 $\frac{ab}{2}$. 相应的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$ 相切.
2. 当 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \leq \frac{1}{2}$ 时, $\triangle OMN$ 的面积取到最大值 $ab \cdot \sqrt{\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right)\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right)}$. 相应的点 P 是点 M, N 的中点.

例 3.109 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 点 $F(0, \sqrt{3})$, 以线段 PF 为直径的圆内切于圆 O , 记点 P 的轨迹为 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 为曲线 C 上两点, 记 $\mathbf{m} = \left(x_1, \frac{y_1}{2}\right), \mathbf{n} = \left(x_2, \frac{y_2}{2}\right)$, 且 $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$, 试问 $\triangle AOB$ 的面积是否为定值? 如果是, 请给予证明; 如果不是, 请说明理由.

解 (1) 根据题意, 取 $F'(0, -\sqrt{3})$, 连接 PF' . 设动圆圆心为 M , 因为两圆内切, 所以 $|OM| = 2 - \frac{1}{2}|PF|$.

又因为 $|OM| = \frac{1}{2}|PF'|$, 所以 $|PF| + |PF'| = 4 > |FF'| = 2\sqrt{3}$.

所以点 P 的轨迹是以 F, F' 为焦点的椭圆, 曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$.

(2) 当直线 AB 斜率不存在时, 易知 $S_{\triangle AOB} = 1$, 当直线 AB 斜率存在时, 化椭圆为圆即可. 答案为 $S_{\triangle AOB} = 1$.

例 3.110 如图 3.47 所示, 已知动直线 $l: Ax + By + C = 0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 交于

$M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 两个不同的点, R 为 MN 的中点, 若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -\frac{b^2}{a^2}$, 则 R 的轨迹为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}.$$

解 根据题意, $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -\frac{b^2}{a^2}$, 化椭圆为圆 $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{a}{b}y \end{cases} \Rightarrow k_{OM'} \perp k_{ON'},$

所以 R' 的轨迹方程为 $x'^2 + y'^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$.

例 3.111 已知椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$, $N(x_0, y_0)$ 为椭圆上任意一点, 从原点 O 向圆

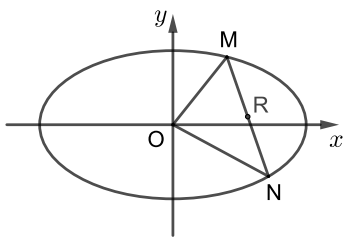


图 3.47

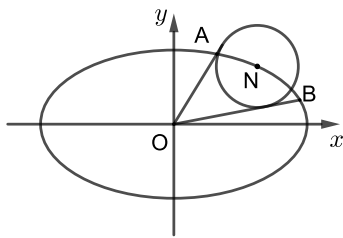


图 3.48

$N: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 3$ 作两条切线, 分别交椭圆于 A, B 两点, 试探究 $|OA|^2 + |OB|^2$ 是否为定值? 若是, 求出其值; 若不是, 说明理由.

解 如图 3.48 所示, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 切线为 $y = kx$, 因为与圆相切

$$\frac{|kx_0 - y_0|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{3} \Rightarrow (x_0^2 - 3)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 3 = 0$$

$$k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{y_0^2 - 3}{x_0^2 - 3} = \frac{y_0^2 - 3}{9 - 3y_0^2} = -\frac{1}{3}$$

这就是我们的模型了. 答案为 16.

3.7.9 伴侣点

在椭圆和双曲线的很多性质中, 常常出现有一对活跃的点 $A(m, 0)$ 和 $B(\frac{a^2}{m}, 0)$, 而在抛物线上出现的形式则是 $A(m, 0)$ 和 $B(-m, 0)$, 这一对点总是同时出现在圆锥曲线的对称轴上, 形影不离, 相伴而行, 我们把这一对特殊的点形象地称作伴侣点.

一、伴侣点等角证明

例 3.112 设抛物线 $C: y^2 = 2x$, 点 $A(2, 0), B(-2, 0)$, 过点 A 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点, 证明: $\angle ABM = \angle ABN$.

证 设直线 $l: x = ty + 2$, 点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 要证 $\angle ABM = \angle ABN$, 即证 $k_{BM} + k_{BN} = 0$, 等价于 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 0$, 即

$$\frac{x_2 + 2}{y_2} + \frac{x_1 + 2}{y_1} = 0 \Rightarrow \frac{ty_2 + 4}{y_2} + \frac{ty_1 + 4}{y_1} = 0$$

此即

$$2t + \left(\frac{4}{y_1} + \frac{4}{y_2} \right) = 0 \quad (3.103)$$

$$\text{直线和抛物线联立} \begin{cases} y^2 = 2x, \\ x = ty + m, \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2ty - 4 = 0. \text{韦达定理}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2t \\ y_1 y_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = -\frac{t}{2} \quad (3.104)$$

由式 (3.103), (3.104) 得证.

例 3.113 动直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B 两点, F 为 C 的右焦点, 若直线 AF 与 BF 的倾斜角互补, 求证: 直线 AB 过定点.

证 设直线 $l: x = ty + m$, 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 依题可得 $k_{AF} + k_{BF} = 0$, 等价于 $\frac{1}{k_{AF}} + \frac{1}{k_{BF}} = 0$, 即

$$\frac{x_1 - 1}{y_1} + \frac{x_2 - 1}{y_2} = 0 \Rightarrow \frac{ty_1 + m - 1}{y_1} + \frac{ty_2 + m - 1}{y_2} = 0$$

此即

$$2t + (m - 1) \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right) = 0 \quad (3.105)$$

$$\text{直线和椭圆联立} \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \\ x = ty + m \end{cases} \Rightarrow (3t^2 + 4)y^2 + 6tmy + 3m^2 - 12 = 0. \text{韦达定理}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{6tm}{3t^2 + 4} \\ y_1 y_2 = \frac{3m^2 - 12}{3t^2 + 4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = -\frac{6tm}{3m^2 - 12} \quad (3.106)$$

由式 (3.105), (3.106) 可得 $m = 4$. 故直线 AB 过定点 $(4, 0)$.

例 3.114 动直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 2px$ 交于 A, B 两点, F 为 C 的焦点, 若直线 AF 与 BF 的倾斜角互补, 求证: 直线 AB 过定点.

证 设直线 $l: x = ty + m$, 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 依题可得 $k_{AF} + k_{BF} = 0$, 等价于 $\frac{1}{k_{AF}} + \frac{1}{k_{BF}} = 0$, 即

$$\frac{x_1 - \frac{p}{2}}{y_1} + \frac{x_2 - \frac{p}{2}}{y_2} = 0 \Rightarrow \frac{ty_1 + m - \frac{p}{2}}{y_1} + \frac{ty_2 + m - \frac{p}{2}}{y_2} = 0$$

此即

$$2t + \left(m - \frac{p}{2}\right) \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right) = 0 \quad (3.107)$$

$$\text{直线和抛物线联立} \begin{cases} y^2 = 2px \\ x = ty + m \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2pty - 2pm = 0. \text{韦达定理}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2pt \\ y_1 y_2 = -2pm \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = -\frac{t}{m} \quad (3.108)$$

由式 (3.107), (3.108) 可得 $m = -\frac{p}{2}$. 故直线 AB 过定点 $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.

二、伴侣点引发三斜率成等差

例 3.115 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的对称轴上的定点 $M(m, 0)$ (其中 $m \neq 0$) 的直线 AB 交抛物线 C 于 A, B 两点, 交直线 $l: x = -m$ 于点 N , 点 P 是过点 M 垂直 x 轴的直线上异于点 M 的任一点, 则直线 PA, PN, PB 的斜率成等差数列.

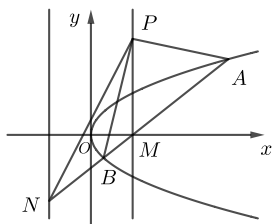


图 3.49

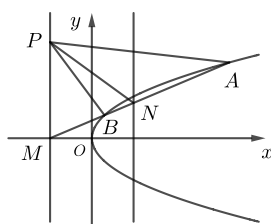


图 3.50

证 如图 3.49, 图 3.50, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 AB 方程为 $x = ty + m$, 则 $P(m, y_0) (y_0 \neq 0)$,

$$N\left(-m, -\frac{2m}{t}\right), k_{PN} = \frac{y_0 - \left(-\frac{2m}{t}\right)}{m - (-m)} = \frac{1}{t} + \frac{y_0}{2m}, \text{联立方程}$$

$$\begin{cases} x = ty + m \\ y^2 = 2px \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2pty - 2pm = 0$$

$$\text{故 } \begin{cases} y_1 + y_2 = 2pt \\ y_1 y_2 = -2pm \end{cases}, \text{ 又 } k_{PA} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - m} = \frac{y_1 - y_0}{ty_1 + m - m} = \frac{y_1 - y_0}{ty_1} = \frac{1}{t} - \frac{y_0}{ty_1}, \text{ 又 } k_{PB} = \frac{1}{t} - \frac{y_0}{ty_2}, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} k_{PA} + k_{PB} &= \frac{1}{t} - \frac{y_0}{ty_1} + \frac{1}{t} - \frac{y_0}{ty_2} = \frac{2}{t} - \frac{y_0}{t} \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right) \\ &= \frac{2}{t} - \frac{y_0}{t} \left(\frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} \right) = \frac{2}{t} - \frac{y_0}{t} \left(\frac{2pt}{-2pm} \right) \\ &= \frac{2}{t} + \frac{y_0}{m} = 2k_{PN} \end{aligned}$$

所以直线 PA , PN , PB 的斜率成等差数列.

例 3.116 过定点 $M(m, 0)$ (其中 $m \neq 0$) 的直线 AB 交椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 于 A, B 两

点, 交直线 $l: x = \frac{a^2}{m}$ 于点 N , 点 P 是过点 M 垂直 x 轴的直线上异于点 M 的任一点, 则直线 PA , PN , PB 的斜率成等差数列.

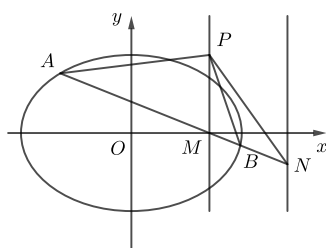


图 3.51

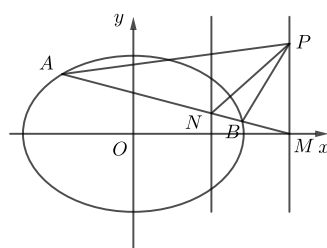


图 3.52

证 如图 3.51, 图 3.52, 当直线 AB 为 x 轴时, 易知直线 PA , PN , PB 的斜率成等差数列.

当直线 AB 不与 x 轴重合时, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 AB 方程为 $x = ty + m$, 则

$$P(m, y_0) (y_0 \neq 0), N\left(\frac{a^2}{m}, \frac{a^2 - m^2}{mt}\right), \text{ 所以 } k_{PN} = \frac{y_0 - \frac{a^2 - m^2}{mt}}{m - \frac{a^2}{m}} = \frac{1}{t} + \frac{my_0}{m^2 - a^2}, \text{ 联立方程}$$

$$\begin{cases} x = ty + m \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow (a^2 + b^2 t^2)y^2 + 2mtb^2 y + m^2 b^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$\text{故 } \begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{2mtb^2}{a^2 + b^2 t^2} \\ y_1 y_2 = -\frac{m^2 b^2 - a^2 b^2}{a^2 + b^2 t^2} \end{cases}, \text{ 又 } k_{PA} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - m} = \frac{y_1 - y_0}{ty_1 + m - m} = \frac{y_1 - y_0}{ty_1} = \frac{1}{t} - \frac{y_0}{ty_1}, \text{ 又 } k_{PB} = \frac{1}{t} - \frac{y_0}{ty_2},$$

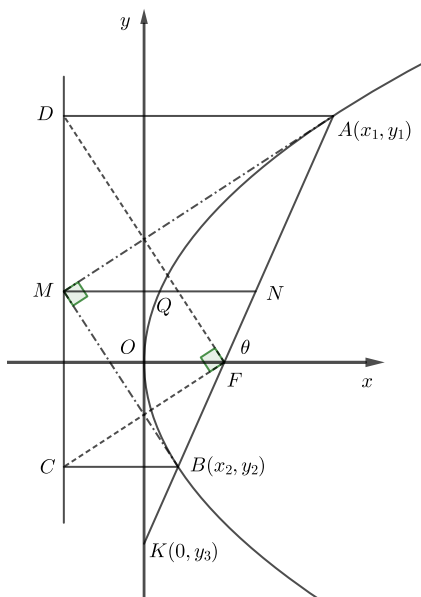
所以

$$\begin{aligned}
 k_{PA} + k_{PB} &= \frac{1}{t} - \frac{y_0}{ty_1} + \frac{1}{t} - \frac{y_0}{ty_2} = \frac{2}{t} - \frac{y_0}{t} \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right) \\
 &= \frac{2}{t} - \frac{y_0}{t} \left(\frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} \right) = \frac{2}{t} + \frac{y_0}{t} \left(\frac{2mt}{m^2 - a^2} \right) \\
 &= \frac{2}{t} + \frac{2my_0}{m^2 - a^2} = 2k_{PN}
 \end{aligned}$$

所以直线 PA , PN , PB 的斜率成等差数列.

例 3.117 过定点 $M(m, 0)$ (其中 $m \neq 0$) 的直线 AB 交双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 于 A, B 两点, 交直线 $l: x = \frac{a^2}{m}$ 于点 N , 点 P 是过点 M 垂直 x 轴的直线上异于点 M 的任一点, 则直线 PA, PN, PB 的斜率成等差数列.

3.7.10 抛物线性质归纳



焦半径、焦点弦性质

如图, AB 是过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 焦点 F 的弦, AD, BC 是准线的垂线, 垂足分别为 D, C , M 是 CD 的中点, N 是 AB 的中点. 设点 $A(x_1, y_1)$ 、点 $B(x_2, y_2)$, 直线 AB 交 y 轴于点 $K(0, y_3)$, 则:

- (1) ① $y_1 y_2 = -p^2$; ② $x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}$; ③ $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_3}$; ④ $|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{2p}{\sin^2 \theta}$, (θ 为 AB 的倾斜角); ⑤ $S_{\triangle AOB} = \frac{p^2}{2 \sin \theta}$; ⑥ $S_{\text{梯形} ABCD} = \frac{2p^2}{\sin^3 \theta}$.

$$(2) \frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p};$$

$$(3) \angle AMB = \angle DFC = 90^\circ;$$

(4) AM 、 BM 是抛物线的切线;

(5) AM 、 BM 分别是 $\angle DAB$ 和 $\angle CBA$ 的平分线;

(6) AM 、 DF 、 y 轴三线共点, BM 、 CF 、 y 轴三线共点;

(7) A 、 O 、 C 三点共线, B 、 O 、 D 三点共线;

(8) 若 $|AF|:|BF| = m:n$, 点 A 在第一象限, 设 θ 为直线 AB 的倾斜角, 则 $\cos \theta = \frac{m-n}{m+n}$;

(9) 以 AF 为直径的圆与 y 轴相切, 以 BF 为直径的圆与 y 轴相切; 以 AB 为直径的圆与准线相切;

(10) MN 交抛物线于点 Q , 则 Q 是 MN 的中点.

3.8 两点距离公式见奇效

例 3.118 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 点 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆外一点, 过点 P 的两条直线分别交椭圆于 A, B 和 C, D 四点, 求 $\frac{|PA| \cdot |PB|}{|PC| \cdot |PD|}$ 的值.

解法一 采用 **直线参数方程**, 设直线 AB 方程为
$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 代入椭圆方程, 整理得

$$\left(\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \right) t^2 + \left(\frac{2x_0 \cos \alpha}{a^2} + \frac{2y_0 \sin \alpha}{b^2} \right) t + \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) - 1 = 0 \quad (3.109)$$

$$\therefore |PA| \cdot |PB| = t_1 t_2 = \frac{\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) - 1}{\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}} \quad (3.110)$$

设直线 CD 方程为
$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \beta \\ y = y_0 + t \sin \beta \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 同理可得

$$|PC| \cdot |PD| = t_3 t_4 = \frac{\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) - 1}{\frac{\cos^2 \beta}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b^2}} \quad (3.111)$$

由式 (3.110), (3.111) 可得

$$\frac{|PA| \cdot |PB|}{|PC| \cdot |PD|} = \frac{\frac{\cos^2 \beta}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b^2}}{\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}} \quad (3.112)$$

解法二 采用 **两点距离公式**, 设直线 $AB: y = k_1x + m$, $CD: y = k_2x + m$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$, 则联立

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = k_1x + m \end{cases} \Rightarrow (a^2k_1^2 + b^2)x^2 + 2a^2mk_1x + a^2(m^2 - b^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2a^2mk_1}{a^2k_1^2 + b^2} \\ x_1x_2 = \frac{a^2(m^2 - b^2)}{a^2k_1^2 + b^2} \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} |PA| = \sqrt{1 + k_1^2} |x_1 - x_0| & (3.113) \\ |PB| = \sqrt{1 + k_1^2} |x_2 - x_0| & (3.114) \\ |PC| = \sqrt{1 + k_2^2} |x_3 - x_0| & (3.115) \\ |PD| = \sqrt{1 + k_2^2} |x_4 - x_0| & (3.116) \end{cases}$$

于是

$$\frac{|PA| \cdot |PB|}{|PC| \cdot |PD|} = \frac{(1 + k_1^2) (x_1x_2 - x_0(x_1 + x_2) + x_0^2)}{(1 + k_2^2) (x_3x_4 - x_0(x_3 + x_4) + x_0^2)}$$

然后将韦达定理代入计算即可.

例 3.119 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 过 $(0, 2)$ 的直线 l 相切椭圆于点 T , 直线 $l' \parallel OT$, 交椭圆于 A, B 两点, 交直线 l 于点 P ,

(1) 求点 T 坐标;

(2) 证明: $\frac{|PA| \cdot |PB|}{|PT|^2}$ 为定值.

解 (1) $T\left(1, \frac{3}{2}\right)$;

(2)

解法一 由式 (3.112) 可得

$$\frac{|PA| \cdot |PB|}{|PT|^2} = \frac{\frac{\cos^2 \beta}{4} + \frac{\sin^2 \beta}{3}}{\frac{\cos^2 \alpha}{4} + \frac{\sin^2 \alpha}{3}} \quad (3.117)$$

其中 α, β 分别为直线 l' , 直线 l 的倾斜角, 所以

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

代入式 (3.117) 可得

$$\frac{|PA| \cdot |PB|}{|PT|^2} = \frac{\frac{4}{4} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{13} + \frac{9}{3}} = \frac{13}{15} \quad (3.118)$$

解法二 采用 **两点距离公式**, 设直线 $l': y = \frac{3}{2}x + m$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 解得 $P\left(1 - \frac{m}{2}, \frac{3}{2} + \frac{m}{4}\right)$, 则

$$|PT|^2 = \frac{5m^2}{16} \quad (3.119)$$

联立

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = \frac{3}{2}x + m \end{cases} \Rightarrow x^2 + mx + \frac{1}{3}m^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = \frac{1}{3}m^2 - 1 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} |PA| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_P| = \frac{\sqrt{13}}{2} \left| x_1 - \left(1 - \frac{m}{2}\right) \right| \end{cases} \quad (3.120)$$

$$\begin{cases} |PB| = \sqrt{1+k^2} |x_2 - x_P| = \frac{\sqrt{13}}{2} \left| x_2 - \left(1 - \frac{m}{2}\right) \right| \end{cases} \quad (3.121)$$

由式 (3.119), (3.120), (3.121) 可得

$$\frac{|PA| \cdot |PB|}{|PT|^2} = \frac{\frac{13}{4} \cdot \left| x_1 x_2 - \left(1 - \frac{m}{2}\right)(x_1 + x_2) + \left(1 - \frac{m}{2}\right)^2 \right|}{\frac{5m^2}{16}} = \frac{\frac{13m^2}{48}}{\frac{5m^2}{16}} = \frac{13}{15}$$

例 3.120 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, 过点 $P(2, 2)$ 作直线 l_1, l_2 与椭圆 E 分别交于 A, B 和 C, D , 且直线 l_1, l_2 的斜率互为相反数.

(1) 证明: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$;

(2) 记直线 AC, BD 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求证: $k_1 + k_2$ 为定值.

解 (1) 要证 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, 即证 $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$, 由两点距离公式知只要证明 $\frac{2-x_A}{x_C-2} = \frac{x_D-2}{2-x_B}$ 即可;

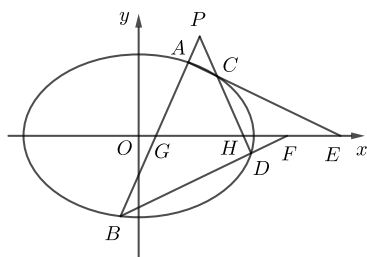


图 3.53

设直线 $l_1: y - 2 = k(x - 2)$, 则直线 $l_2: y - 2 = -k(x - 2)$. 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y - 2 = k(x - 2) \end{cases}$ 可得

$$(2k^2 + 1)x^2 + 8k(1 - k)x + 8(1 - k)^2 - 6 = 0$$

$$\text{则} \begin{cases} x_A + x_B = \frac{-8k(1 - k)}{2k^2 + 1} \\ x_A x_B = \frac{8(1 - k)^2 - 6}{2k^2 + 1} \end{cases} \text{同理} \begin{cases} x_C + x_D = \frac{8k(1 + k)}{2k^2 + 1} \\ x_C x_D = \frac{8(1 + k)^2 - 6}{2k^2 + 1} \end{cases} \text{因为}$$

$$(2 - x_A)(2 - x_B) = 4 - 2(x_A + x_B) + x_A x_B = \frac{6}{2k^2 + 1}$$

$$(x_C - 2)(x_D - 2) = 4 - 2(x_C + x_D) + x_C x_D = \frac{6}{2k^2 + 1}$$

所以 $(2 - x_A)(2 - x_B) = (x_C - 2)(x_D - 2)$, 所以 $\frac{2 - x_A}{x_C - 2} = \frac{x_D - 2}{2 - x_B}$, 所以 $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$, 即

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

(2) 如图 3.53, 由 (1) 知 $\triangle PAC \sim \triangle PBD$, 根据三角形外角和有

$$\begin{cases} \angle PGH = \angle PBD + \angle BFG \\ \angle PHG = \angle HCE + \angle CEH = \angle PCA + \angle CEH \end{cases} \quad (3.122)$$

$$\begin{cases} \angle PGH = \angle PBD + \angle BFG \\ \angle PHG = \angle HCE + \angle CEH = \angle PCA + \angle CEH \end{cases} \quad (3.123)$$

因为直线 l_1, l_2 的斜率互为相反数, 所以 $\angle PGH = \angle PHG \Rightarrow \angle BFG = \angle CEH$, 而

$$\begin{cases} k_1 = \tan \angle CEH \\ k_2 = -\tan \angle BFG \end{cases} \quad (3.124)$$

$$\begin{cases} k_1 = \tan \angle CEH \\ k_2 = -\tan \angle BFG \end{cases} \quad (3.125)$$

故 $k_1 + k_2 = 0$.

例 3.121 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F_1(-\sqrt{17}, 0)$, $F_2(\sqrt{17}, 0)$, 点 M 满足 $|MF_1| - |MF_2| = 2$. 记 M 的轨迹为 C .

(1) 求 C 的方程;

- (2) 设点 T 在直线 $x = \frac{1}{2}$ 上, 过 T 的两条直线分别交 C 于 A, B 两点和 P, Q 两点, 且 $|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$, 求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

解 (1) 由双曲线定义可得 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1 (x > 0)$;

(2) 设 $T\left(\frac{1}{2}, t\right)$, 直线 AB 的方程为 $y = k_1\left(x - \frac{1}{2}\right) + t$, 和双曲线联立 $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{16} = 1 \\ y = k_1\left(x - \frac{1}{2}\right) + t \end{cases}$ 可得

$$(16 - k_1^2)x^2 + (k_1^2 - 2tk_1)x - \frac{1}{4}k_1^2 + k_1t - t^2 - 16 = 0$$

则 $\begin{cases} x_A + x_B = \frac{k_1^2 - 2tk_1}{k_1^2 - 16} \\ x_A x_B = \frac{-\frac{1}{4}k_1^2 + k_1t - t^2 - 16}{16 - k_1^2} \end{cases}$

所以

$$|TA| \cdot |TB| = (1 + k_1^2) \left(x_1 - \frac{1}{2}\right) \left(x_2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{(1 + k_1^2)(t^2 + 12)}{k_1^2 - 16} \quad (3.126)$$

同理

$$|TP| \cdot |TQ| = \frac{(1 + k_2^2)(t^2 + 12)}{k_2^2 - 16} \quad (3.127)$$

由以上两式可得 $\frac{(1 + k_1^2)(t^2 + 12)}{k_1^2 - 16} = \frac{(1 + k_2^2)(t^2 + 12)}{k_2^2 - 16} \Rightarrow k_1^2 = k_2^2 \Rightarrow k_1 + k_2 = 0$.

例 3.122 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{2}$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;

- (2) 点 P 为直线 $x = 4$ 上的动点, 过点 P 的动直线 l 与椭圆 C 交于不同两点 A, B , 在线段 AB 上取点 Q , 满足 $|AP| \cdot |QB| = |AQ| \cdot |PB|$, 证明: 点 Q 的轨迹过定点.

解 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$;

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $Q(x, y)$, $P(4, t)$, 直线 AB 的斜率显然存在, 设为 k , 则 AB 的方程为 $y = k(x - 4) + t$.

因为 A, B, Q, P 四点共线, 不妨设 $x_2 < x < x_1 < 4$, 则

$$\begin{cases} |AP| = \sqrt{1 + k^2}(4 - x_1), & |AQ| = \sqrt{1 + k^2}(x_1 - x) \\ |QB| = \sqrt{1 + k^2}(x - x_2), & |PB| = \sqrt{1 + k^2}(4 - x_2) \end{cases}$$

由 $|AP| \cdot |QB| = |AQ| \cdot |PB|$ 可得

$$(4 - x_1)(x - x_2) = (x_1 - x)(4 - x_2) \Rightarrow 2x_1x_2 - (x_1 + x_2)(4 + x) + 8x = 0 \quad (3.128)$$

联立直线 $y = k(x - 4) + t$ 和椭圆的方程,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = k(x - 4) + t \end{cases} \Rightarrow (2k^2 + 1)x^2 + 4k(t - 4k)x + 2(t - 4k)^2 - 4 = 0$$

韦达定理 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4k(t - 4k)}{2k^2 + 1} \\ x_1x_2 = \frac{2(t - 4k)^2 - 4}{2k^2 + 1} \end{cases}$ 代入式 (3.128), 化简得 $x = \frac{4kt + 2 - t^2}{kt + 2} = 4 - \frac{6 + t^2}{kt + 2}$, 即

$$\frac{6 + t^2}{kt + 2} = 4 - x \quad (3.129)$$

又 $k = \frac{y - t}{x - 4}$, 代入式 (3.129), 得 $\frac{6 + t^2}{\frac{y-t}{x-4}t + 2} = 4 - x$, 化简得 $2x + ty - 2 = 0$. 故点 Q 的轨迹过定点 $(1, 0)$.

变式训练 EXERCISES

- 221.** 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知动点 C 到定点 $F(1, 0)$ 的距离与它到直线 $l: x = 4$ 的距离之比为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求动点 C 的轨迹方程;

(2) 点 P 为直线 l 上的动点, 过点 P 的动直线 m 与点 C 的轨迹交于不同两点 A, B , 在线段 AB 上取点 Q , 满足 $|AP| = \lambda|PB|$, $|AQ| = \lambda|QB|$, 证明: 点 Q 总在一动直线上且该动直线恒过定点.

- 222.** 已知椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$, 直线 l_1 相切椭圆于点 $P(2, 1)$, 直线 l_2 交椭圆于 A, B 两点, 交直线 l_1 于点 Q , 且 l_1, l_2 两直线斜率之积等于 $-\frac{1}{4}$,

(1) 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值;

(2) 证明: $\frac{|PQ|^2}{|QA| \cdot |QB|}$ 为定值.

3.9 曲线系与蝴蝶

例 3.123 在 $\odot O$ 中, 弦 GH 的中点为 O_1 , 过 O_1 任作两条弦 AB, CD , AC, BD 分别交 GH 于 E, F , 则 $O_1E = O_1F$.

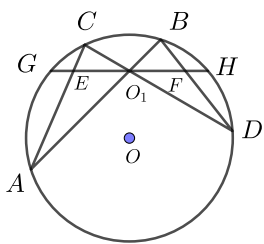


图 3.54

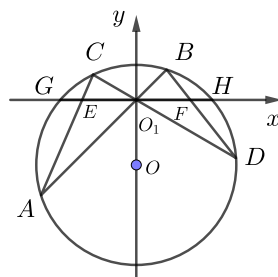


图 3.55

证 如图 3.55, 以 O_1 为原点, 直线 GH 为 x 轴, OO_1 为 y 轴, 设 $\odot O$ 方程为

$$x^2 + y^2 - 2by + f = 0 \quad (3.130)$$

直线 AB , CD 的方程分别为 $\begin{cases} y = k_1x \\ y = k_2x \end{cases}$ 或合并为

$$(y - k_1x)(y - k_2x) = 0 \quad (3.131)$$

于是过二次曲线 (3.130), (3.131) 的四个交点 A 、 B 、 C 、 D 的曲线束为

$$x^2 + y^2 - 2by + f + \lambda(y - k_1x)(y - k_2x) = 0 \quad (3.132)$$

曲线 (3.132) 与直线 GH , 也就是 x 轴的交点 E 、 F 的横坐标满足

$$(1 + \lambda k_1 k_2)x^2 + f = 0$$

根据韦达定理, $x_E + x_F = 0$, 也就是说 EF 的中点是 O_1 .

例 3.124 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 直线 $y = 1$ 与椭圆 C 交于 G , H 两点, 过点 $P(0, 1)$ 任作两条弦 AB , CD , AC , BD 分别交 GH 于 E , F , 则 $PE = PF$.

证 设直线 AB , CD 的方程分别为

$$\begin{cases} y = k_1x + 1 \\ y = k_2x + 1 \end{cases} \quad (3.133)$$

$$\begin{cases} y = k_1x + 1 \\ y = k_2x + 1 \end{cases} \quad (3.134)$$

或合并为

$$(y - k_1x - 1)(y - k_2x - 1) = 0 \quad (3.135)$$

于是过二次曲线 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, (3.135) 的四个交点 A, B, C, D 的曲线束为

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 + \lambda(y - k_1x - 1)(y - k_2x - 1) = 0 \quad (3.136)$$

曲线 (3.136) 与直线 GH , 也就是 $y = 1$ 的交点 E, F 的横坐标满足 $\left(\frac{1}{4} + \lambda k_1 k_2\right)x^2 - 1 = 0$, 根据韦达定理, $x_E + x_F = 0$, 也就是说 EF 的中点是 P .

例 3.125 如图 3.56, 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点 F , A 为椭圆上异于顶点的任一点, 原点 O 是线段 AB 的中点, 直线 AF, BF 分别与椭圆交于 C, D 两点, 设 $\overrightarrow{AF} = \lambda_1 \overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{BF} = \lambda_2 \overrightarrow{FD}$.

(1) 求 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的值; (2) $\frac{k_{CD}}{k_{AB}}$ 是否为定值?

解 (1) 设 $A(x_0, y_0)$, $B(-x_0, -y_0)$, $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, 则 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$, 由 $\overrightarrow{AF} = \lambda_1 \overrightarrow{FC}$ 可得

$$\lambda_1 = \frac{-y_0}{y_1},$$

当 $x_0 = -1$ 时, 此时 $A(-1, \frac{3}{2})$, $B(1, -\frac{3}{2})$, $C(-1, -\frac{3}{2})$, $D(-\frac{13}{7}, \frac{9}{14})$, 故 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{7}{3}$, 故

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{10}{3}.$$

当 $x_0 \neq -1$ 时, 直线 AC 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 + 1}(x + 1)$, 即 $x = \frac{(x_0 + 1)y - y_0}{y_0}$, 代入椭圆方程消去 x 并整理得

$$(6x_0 + 15)y^2 + 6(x_0 + 1)y_0y - 9y_0^2 = 0 \quad (3.137)$$

韦达定理 $y_1y_0 = -\frac{9y_0^2}{6x_0 + 15}$, 所以 $\lambda_1 = \frac{2x_0 + 5}{3}$, 同理可得 $\lambda_2 = \frac{5 - 2x_0}{3}$, 故 $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{10}{3}$.

综上可得 $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{10}{3}$.

(2) 当 $x_0 = -1$ 时, 此时 $A(-1, \frac{3}{2})$, $B(1, -\frac{3}{2})$, $C(-1, -\frac{3}{2})$, $D(-\frac{13}{7}, \frac{9}{14})$, 易知 $\frac{k_{CD}}{k_{AB}} = \frac{5}{3}$.

当 $x_0 \neq -1$ 时, 由 (1) 韦达定理知 $y_1y_0 = -\frac{9y_0^2}{6x_0 + 15}$, 所以 $y_1 = -\frac{9y_0}{6x_0 + 15} = \frac{-3y_0}{2x_0 + 5}$, 于是

$$x_1 = \frac{-5x_0 - 8}{2x_0 + 5},$$

同理 $y_2 = \frac{-3y_0}{2x_0 - 5}$, 于是 $x_2 = \frac{-5x_0 + 8}{2x_0 - 5}$, 所以 $k_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5y_0}{3x_0}$, 所以 $\frac{k_{CD}}{k_{AB}} = \frac{5}{3}$.

综上可得 $\frac{k_{CD}}{k_{AB}} = \frac{5}{3}$.

例 3.126 如图 3.57, 经过椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左焦点 F , 斜率为 $k_1 (k_1 \neq 0)$ 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 设 $R(1, 0)$, 延长 AR, BR , 分别与椭圆交于 C, D 两点, 设直线 CD 的斜率为 k_2 , 则

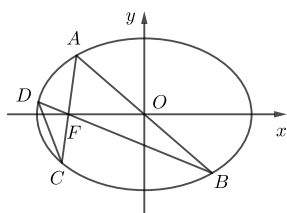


图 3.56

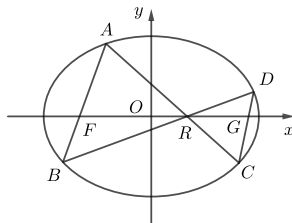


图 3.57

(1) $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值, 且直线 CD 过定点; (2) 直线 AB 与直线 CD 的交点 H 在定直线上, 且 $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OH}$ 为定值.

解 (1) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$, 显然 $y_1 \neq 0$, $y_3 \neq 0$, 故直线 AR 的方程为 $x = \frac{x_1 - 1}{y_1}y + 1$, 代入椭圆方程, 消去 x 得:

$$\frac{5 - x_1}{y_1^2}y^2 + \frac{x_1 - 1}{y_1}y - 4 = 0 \quad (3.138)$$

由韦达定理可得 $y_1 y_3 = -\frac{4y_1^2}{5 - x_1}$, 所以 $y_3 = \frac{4y_1}{x_1 - 5}$, 于是 $x_3 = \frac{5x_1 - 9}{x_1 - 5}$, 因为 $y_1 = k_1(x_1 + 2)$, 所以 $C\left(\frac{5x_1 - 9}{x_1 - 5}, \frac{4k_1 x_1 + 8k_1}{x_1 - 5}\right)$, 即 $C\left(5 + \frac{16}{x_1 - 5}, 4k_1 + \frac{28k_1}{x_1 - 5}\right)$.

同理 $D\left(5 + \frac{16}{x_2 - 5}, 4k_1 + \frac{28k_1}{x_2 - 5}\right)$, 显然 C, D 两点均满足直线 $y = 4k_1 + \frac{7}{4}k_1(x - 5)$ 的方程, 故直线 CD 的方程为 $y = \frac{7}{4}k_1\left(x - \frac{19}{7}\right)$, 所以 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{4}{7}$, 且直线 CD 过定点 $\left(\frac{19}{7}, 0\right)$.

(2) 联立直线 AB 和直线 CD 的方程 $\begin{cases} y = k_1(x + 2) \\ y = \frac{7}{4}k_1\left(x - \frac{19}{7}\right) \end{cases} \Rightarrow x_H = 9$, 故直线 AB 与直线 CD 的交点

H 在定直线 $x = 9$ 上, 且 $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OH} = (1, 0) \cdot (9, y_H) = 9$ 为定值. (注: 此处即 a^2)

例 3.127 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 $M(4, 0)$, 过点 F 且斜率为 k_1 的直线与抛物线交于 A, B 两点, 延长 AM, BM 与抛物线交于 C, D 两点, 设直线 CD 的斜率为 k_2 , 则 $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值, 且直线 CD 过定点.

解 设 A, B, C, D 四点的纵坐标分别为 y_1, y_2, y_3, y_4 , 则

$$\frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} = 1^2 \Rightarrow y_1 y_2 = -4 \quad (3.139)$$

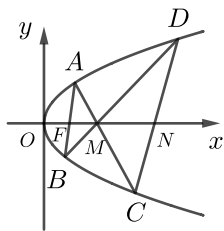


图 3.58

同理

$$\begin{cases} y_1 y_3 = -16 & (3.140) \\ y_2 y_4 = -16 & (3.141) \end{cases}$$

$$\therefore k_1 = \frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} = \frac{4}{y_1 + y_2}, \quad k_2 = \frac{y_3 - y_4}{\frac{y_3^2}{4} - \frac{y_4^2}{4}} = \frac{4}{y_3 + y_4}$$

$$\therefore \frac{k_1}{k_2} = \frac{y_3 + y_4}{y_1 + y_2} = \frac{\left(-\frac{16}{y_1}\right) + \left(-\frac{16}{y_2}\right)}{y_1 + y_2} = -\frac{\frac{16(y_1 + y_2)}{y_1 y_2}}{y_1 + y_2} = -\frac{16}{y_1 y_2} = 4$$

又 $y_3 y_4 = \frac{y_1 y_3 y_2 y_4}{y_1 y_2} = \frac{(-16) \times (-16)}{-4} = -64$, 所以 $x_3 x_4 = 256$.

由抛物线几何平均值知直线 CD 过定点 $(16, 0)$.

由例题可知:

推论 3.28. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 点 $F(a, 0)$, $M(b, 0)$ 为 x 轴上两定点, 过点 F 且斜率为 k_1 的直线与抛物线交于 A, B 两点, 延长 AM, BM 与抛物线交于 C, D 两点, 设直线 CD 的斜率为 k_2 , 则 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{b}{a}$ 为定值, 且直线 CD 过定点 $N\left(\frac{b^2}{a}, 0\right)$.

变式训练 EXERCISES

- 223. 【2011 四川改编】** 如图 3.59, 过点 $C(0, 1)$ 的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 椭圆与 x 轴交于两点 $A(a, 0), B(-a, 0)$, 过点 C 的直线与椭圆交于另一点 D , 并与 x 轴交于点 P , 直线 AC 与直线 BD 交于点 Q .

(1) 求椭圆方程;

(2) 当点 P 异于点 B 时, 求证: $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 为定值.

- 224.** 已知四边形 $ABCD$ 内接于抛物线 $y^2 = 4x$, 对边 AB, CD 与 x 轴分别相交于点 $E(1, 0), F$, 两条对角线 AC, BD 与 x 轴都相交于点 $M(4, 0)$, 试问直线 CD 是否经过定点?

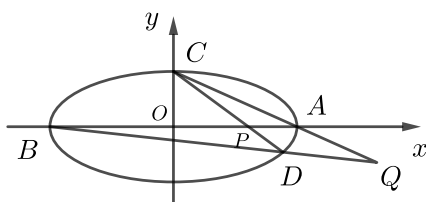


图 3.59

3.10 面积最值

点乘法

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 设直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 则利用点乘法我们可以得到 $\triangle AOB$ 面积的一个关系式, 并可知面积最值.

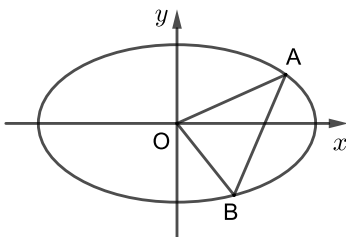


图 3.60

解 两式相乘并配方 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} \right)^2 + \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}{a^2 b^2} = 1$, 即

$\left(\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} \right)^2 + \frac{4(S_{\triangle AOB})^2}{a^2 b^2} = 1$, 因此当 $\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} = 0$ 也就是 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{b^2}{a^2}$ 时, 三角形面积有最大值 $\frac{ab}{2}$.

例 3.128 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 C 的中心在原点 O , 焦点在 x 轴上, 短轴长为 2, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) A, B 为椭圆 C 上满足 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 的任意两点, E 为线段 AB 的中点, 射线 OE 交椭圆 C 与点 P , 设 $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OE}$, 求实数 t 的值.

解 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$;

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 因为两点在椭圆上, 所以

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1 \\ \frac{x_2^2}{2} + y_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x_1 x_2}{2} + y_1 y_2\right)^2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = 1 \quad (3.142)$$

因为 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$, 代入 (3.142), 可知

$$\left(\frac{x_1 x_2}{2} + y_1 y_2\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 x_2 + 2y_1 y_2 = \pm 1 \quad (3.143)$$

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OE} = \left(\frac{t(x_1 + x_2)}{2}, \frac{t(y_1 + y_2)}{2}\right)$$

因为点 P 在椭圆上, 所以

$$\frac{t^2(x_1 + x_2)^2}{8} + \frac{t^2(y_1 + y_2)^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{t^2}{4}(2 + x_1 x_2 + 2y_1 y_2) = 1 \quad (3.144)$$

将 (3.143) 式代入 (3.144), 可得 $t^2 = 4$ 或 $t^2 = \frac{4}{3}$.

例 3.129 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 C 的中心在原点 O , 焦点在 y 轴上, 短轴长为 2, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 为椭圆 C 上两点, $\mathbf{m} = \left(\frac{x_1}{b}, \frac{y_1}{a}\right)$, $\mathbf{n} = \left(\frac{x_2}{b}, \frac{y_2}{a}\right)$, 且满足 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$, 试问 $\triangle AOB$ 的面积是否为定值? 如果是, 请给予证明; 如果不是, 请说明理由.

解 (1) $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$; (2) $\triangle AOB$ 的面积为 1.

例 3.130 已知直线 $y = 2x + m$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 相交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 当 $\triangle AOB$ 的面积取得最大值时, $|AB| =$ ()

- (A) $\frac{5\sqrt{42}}{21}$ (B) $\frac{\sqrt{210}}{21}$ (C) $\frac{2\sqrt{42}}{7}$ (D) $\frac{3\sqrt{42}}{7}$

解 由本书第 140 页定理 3.13 可知当 $\triangle AOB$ 的面积取得最大值时, 有

$$5 \times 4 + 1 \times 1 = 2m^2 \Rightarrow m^2 = \frac{21}{2}$$

最后由弦长公式可知

$$|AB| = \frac{2\sqrt{5 \times 5 \times (21 - \frac{21}{2})}}{21} = \frac{5\sqrt{42}}{21}$$

定理 3.15: 四边形面积

任意凸四边形 $ABCD$ 的面积公式: 两对角线长度之积的一半乘以两对角线夹角的正弦值.

$$S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{|AC| \cdot |BD| \cdot \sin \langle AC, BD \rangle}{2}$$

例 3.131 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点, 右顶点分别为 F, A , 过 F 的直线交椭圆于 C, D 两点, 求四边形 $OCAD$ 面积的最大值.

解 设 OA, CD 的夹角为 θ , 则 $S_{\text{四边形}OCAD} = \frac{|OA| \cdot |CD| \cdot \sin \theta}{2} \leq \frac{|OA| \cdot |CD|}{2} = \frac{a \cdot \frac{2b^2}{a}}{2} = 3$.

引理 3.2. 抛物线 $y^2 = 2px$ 有过焦点的两互相垂直弦 AC, BD , 则两弦长和最小值为 $8p$, 四边形 $ABCD$ 的面积最小值为 $8p^2$ 【取最小时两弦的斜率分别为 ± 1 】.

证 令两条焦点弦分别为 $|AC| = \frac{2p}{\sin^2 \theta}, |BD| = \frac{2p}{\sin^2(\theta + \frac{\pi}{2})} = \frac{2p}{\cos^2 \theta}$.

例 3.132 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过 F 的直线与抛物线交于 A, B 两点. 如图 3.61 所示.

(1) 若 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$, 求直线 AB 的斜率;

(2) 设点 M 在线段 AB 上运动, 原点 O 关于点 M 的对称点为 C , 求四边形 $OACB$ 面积的最小值.

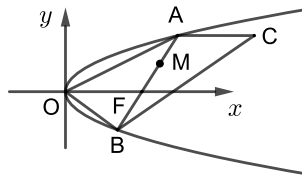


图 3.61

解 (1) 利用本书第 96 页式子 (3.25), 得 $k = \pm 2\sqrt{2}$;

(2) 根据题意, 点 M 为线段 OC 的中点, 所以

$$S_{\text{四边形}OACB} = 2S_{\triangle AOB} = \frac{2 \times 4}{2 \sin \theta} = \frac{4}{\sin \theta} \geq 4$$

推论 3.29. 如图 3.62 所示, 已知定点 A, M 为 $\angle A$ 里面的一点, 过 M 有无数条直线和 $\angle A$ 的两边相交, 当且仅当 M 为 BC 的中点时, 三角形 ABC 的面积有最小值.

证 如图 3.63 所示, 作 $BN \parallel AC$, 则 $\triangle CC_1M \cong \triangle BNM$, 所以 $S_{\triangle AB_1C_1} > S_{\triangle ABC}$.

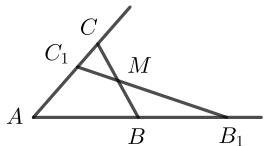


图 3.62

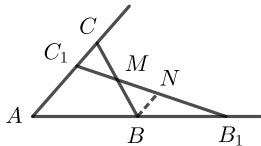


图 3.63

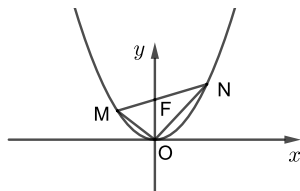


图 3.64

例 3.133 如图 3.64 所示, 过抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点作任一直线 l 交抛物线于 M, N 两点, 则 $\triangle MON$ 的面积的最小值为 ()

(A) 2

(B) $2\sqrt{2}$

(C) 4

(D) 8

解 A.

3.11 圆锥曲线中的向量

3.11.1 共线型

定义 3.11: 两根比

若 x_1, x_2 为方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根, 且 $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$, 则 $b^2 = \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2\right)ac$.

证 根据题意 $\begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = \lambda \\ \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} - 2 = \lambda + \frac{1}{\lambda}$, 再利用韦达定理得

$$\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2}{\frac{c}{a}} = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 \Rightarrow b^2 = \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2\right)ac.$$

例 3.134 椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 与直线 l 交于两个不同的点 A, B , 若直线 l 过点 $E(1, 0)$, 且 $\vec{EA} + 2\vec{EB} = \mathbf{0}$, 求直线 l 的方程.

解 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $l: x = ty + 1$, 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ x = ty + 1 \end{cases} \Rightarrow (t^2 + 3)y^2 + 2ty - 2 = 0$,

$$\vec{EA} + 2\vec{EB} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = -2 \text{ 由第 160 页定义 3.11 可知 } 4t^2 = \left(-2 - \frac{1}{2} + 2\right)(t^2 + 3) \times (-2) \Rightarrow t = \pm 1.$$

例 3.135 过点 $P(-1, 0)$ 的直线 l 交抛物线 $y^2 = 4x$ 于两个不同的点 A, B , 若 $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, 求直线 l 的方程.

解 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $l: x = ty - 1$, 联立
$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x = ty - 1 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4ty + 4 = 0, \text{ 又}$$

$$\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = 2, \text{ 由第 160 页定义 3.11 可知 } 16t^2 = \left(2 + \frac{1}{2} + 2\right) \times 4 \Rightarrow t = \pm \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

例 3.136 椭圆 $E: \frac{y^2}{6} + \frac{x^2}{2} = 1$, 过点 $C(0, 1)$ 的直线 l 与椭圆 E 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$, 求直线 l 的方程.

解 $y = \pm \sqrt{5}x + 1$.

例 3.137 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程 $[t \text{ 为参数}]$ 为
$$\begin{cases} x = a + \frac{3}{5}t \\ y = 1 + \frac{4}{5}t \end{cases}, \text{ 以 } O \text{ 为极点, } x \text{ 轴正}$$

半轴为极轴的坐标系中, 曲线 C 的方程为 $\rho \cos^2 \theta + 8 \cos \theta - \rho = 0$, 已知点 $P(a, 1)$, 设直线 l 与曲线 C 的两个交点为 A, B , 若 $|PA| = 3|PB|$, 求 a 的值.

解 联立
$$\begin{cases} x = a + \frac{3}{5}t \\ y = 1 + \frac{4}{5}t \\ y^2 = 8x \end{cases} \Rightarrow \frac{16}{25}t^2 - \frac{16}{5}t + (1 - 8a) = 0, \text{ 设 } A, B \text{ 两点对应的 } t \text{ 分别为 } t_1, t_2.$$

① 若 $\frac{t_1}{t_2} = 3$,

$$\left(-\frac{16}{5}\right)^2 = \left(3 + \frac{1}{3} + 2\right) \times \frac{16}{25} \times (1 - 8a) \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

② 若 $\frac{t_1}{t_2} = -3$,

$$\left(-\frac{16}{5}\right)^2 = \left(-3 - \frac{1}{3} + 2\right) \times \frac{16}{25} \times (1 - 8a) \Rightarrow a = \frac{13}{8}$$

例 3.138 设直线 l 过点 $E(-1, 0)$, 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交于 A, B 两点, 若 $|EA| = 2|EB|$, 求直线 l 的方程.

解 $y = \pm \frac{\sqrt{15}}{6}(x + 1)$.

例 3.139 设直线 $l: y = k(x + 1) (k \neq 0)$ 与椭圆 $3x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 相交于 A, B 两点, 与 x 轴相交于点 C , 若 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$, 求 $\triangle OAB$ 的面积取得最大值时的椭圆方程.

解 $\frac{y^2}{15} + \frac{x^2}{5} = 1$.

例 3.140 过点 $M(2, 1)$ 的直线交椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 于 A, B 两点, 使 M 是 AB 的一个三等分点, 求此直线的斜率.

解 容易验证当 AB 斜率不存在时, 不符合题意. 当 AB 斜率为 k 时, 设直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 + kt, \end{cases} \quad \text{其中 } t \text{ 为参数, 与椭圆方程联立 } \frac{(2+t)^2}{16} + \frac{(1+kt)^2}{4} = 1, \text{ 即}$$

$$(4k^2 + 1)t^2 + (8k + 4)t - 8 = 0 \quad (3.145)$$

设此方程的两根为 t_1, t_2 , 分别对应点 A, B , 有 $\frac{t_1}{t_2} = -2$. 因为 t_1, t_2 为方程 (3.145) 的两根, 所以

$$(8k + 4)t_1 = \left(-2 - \frac{1}{2} + 2\right)(4k^2 + 1) \times (-8), \text{ 化简得 } 12k^2 + 16k + 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{6}.$$

3.11.2 线性组合型

推论 3.30. 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, A, B 为椭圆上两动点, M 为平面上一动点, 满足 $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$, 若 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{b^2}{a^2}$, 则动点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda^2 + \mu^2$.

证 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $M(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$, 由 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{b^2}{a^2}$ 可得 $b^2 x_1 x_2 + a^2 y_1 y_2 = 0$, 从而

$$\begin{aligned} b^2(\lambda x_1 + \mu x_2)^2 + a^2(\lambda y_1 + \mu y_2)^2 &= \lambda^2(b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2) + \mu^2(b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2) + 2\lambda\mu(b^2 x_1 x_2 + a^2 y_1 y_2) \\ &= (\lambda^2 + \mu^2)a^2 b^2 \end{aligned}$$

所以 $\frac{(\lambda x_1 + \mu x_2)^2}{a^2} + \frac{(\lambda y_1 + \mu y_2)^2}{b^2} = \lambda^2 + \mu^2$, 即点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda^2 + \mu^2$.

推论 3.31. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, A, B 是椭圆上两点, 点 M 为弦 AB 的中点, 若 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{b^2}{a^2}$, 则点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$.

例 3.141 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, M, N 是椭圆上两点, 直线 OM, ON 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 若动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}$, 试探究是否存在两个定点 F_1, F_2 , 使得 $|PF_1| + |PF_2|$ 为定值? 若存在, 求 F_1, F_2 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

解 由推论 3.30 可得点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{10} = 1$, 故 $F_1(-\sqrt{10}, 0), F_2(\sqrt{10}, 0)$.

例 3.142 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 其焦点在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上.

(1) 求椭圆方程;

(2) 设 A, B, M 是椭圆上的三点, 且存在锐角 θ , 使 $\overrightarrow{OM} = \cos \theta \overrightarrow{OA} + \sin \theta \overrightarrow{OB}$.

① 求证: 直线 OA 与 OB 的斜率的乘积为定值;

② 求 $|OA|^2 + |OB|^2$ 的值.

解 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$;

(2) 易知 ① $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{1}{2}$; ② 由 ① 知 $\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (y_1 y_2)^2 = \frac{x_1^2}{2} \cdot \frac{x_2^2}{2} = (1 - y_1^2)(1 - y_2^2)$, 继续化简可知 $(y_1 y_2)^2 = 1 - (y_1^2 + y_2^2) + (y_1 y_2)^2 \Rightarrow y_1^2 + y_2^2 = 14$, 又 $\frac{x_1^2}{2} + y_1^2 + \frac{x_2^2}{2} + y_2^2 = 2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 2$, 所以 $|OA|^2 + |OB|^2 = 3 = a^2 + b^2$. 这其实就是本书第 138 页推论 3.27.

3.12 二次曲线的切线

3.12.1 切线方程

定理 3.16: 二次曲线的切线

二次曲线 $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $Axx_0 + Byy_0 + C \cdot \frac{x_0 + x}{2} + D \cdot \frac{y_0 + y}{2} + E = 0$.

定理 3.17

(1) 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 相切的斜率为 k 的切线方程是 $y = kx \pm \sqrt{a^2 k^2 + b^2}$.

(2) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 外一点 $P(x_0, y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

(4) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

(5) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 外一点 $P(x_0, y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

(6) 抛物线 $y^2 = 2px$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程是 $y_0 y = p(x + x_0)$.

(7) 抛物线 $y^2 = 2px$ 外一点 $P(x_0, y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $y_0 y = p(x + x_0)$.

证 (1) $\because$ 点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, $\therefore \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, 对 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 求导得:

$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$, 将点 $P(x_0, y_0)$ 代入得 $\frac{2x_0}{a^2} + \frac{2y_0 y'_0}{b^2} = 0$, $\therefore y' = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, 所以切线方程为

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0) \quad (3.146)$$

即 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

(2) 设切点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由 (1) 知

$$\begin{cases} \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \\ \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad (3.147)$$

$$\begin{cases} \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \\ \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad (3.148)$$

因为点 $P(x_0, y_0)$ 是这两条切线的交点, 故

$$\begin{cases} \frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} = 1 \\ \frac{x_0 x_2}{a^2} + \frac{y_0 y_2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad (3.149)$$

$$\begin{cases} \frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} = 1 \\ \frac{x_0 x_2}{a^2} + \frac{y_0 y_2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad (3.150)$$

因为点 A, B 在直线 AB 上, 且同时满足方程 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$, 所以 $AB: \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

例 3.143 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 上的任一点 M 到直线 $y = -1$ 的距离比 M 点到点 $F(0, 2)$ 的距离小 1.

(1) 求动点 M 的轨迹 C_1 的方程;

(2) 若点 P 是圆 $C_2: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$ 上一动点, 过点 P 作曲线 C_1 的两条切线, 切点分别为 A, B , 求直线 AB 斜率的取值范围.

解 (1) 曲线 C_1 上的任一点 M 到直线 $y = -2$ 的距离等于 M 点到点 $F(0, 2)$ 的距离, 由抛物线定义可知 $C_1: x^2 = 8y$;

(2) 易知点 $P(x_0, y_0)$ 在曲线 C_1 外, 利用导数可知 $k_{AB} = \frac{x_0}{4}$, 又因为 $1 \leq x_0 \leq 3$, $\therefore k_{AB} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

推论 3.32. 若 l 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 不垂直于对称轴的切线, M 为切点, 则 $k_l \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$.

例 3.144 过椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上一点 M 作圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的两条切线, A, B 为切点, 过 A, B 的直线 l 与 x 轴, y 轴分别交于 P, Q 两点, 则 $\triangle POQ$ 面积的最小值为 ()

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) 1

(D) $\frac{4}{3}$

解 设 $M(x_0, y_0)$, 则直线 l 方程为 $x_0x + y_0y = 2$, 所以

$$P\left(\frac{2}{x_0}, 0\right), Q\left(0, \frac{2}{y_0}\right) \Rightarrow S_{\triangle POQ} = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{2}{x_0} \cdot \frac{2}{y_0}\right| = \frac{2}{|x_0 y_0|} \quad (3.151)$$

又因为点 M 在椭圆上, 所以

$$1 = \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x_0^2}{9} \cdot \frac{y_0^2}{4}} = \frac{|x_0 y_0|}{3} \quad (3.152)$$

由式 (3.151), (3.152) 知答案为 B.

例 3.145 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B 两点, 分别以 A, B 为切点的椭圆

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的切线交于点 P , 则点 P 的轨迹方程为 .

解 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 其中点 Q 是直线 AB 与圆的切点, 所以直线 AB 方程可以分别用 P, Q 表示出来

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x_1}{4} \cdot x + \frac{y_1}{3} \cdot y = 1 \\ x_2 \cdot x + y_2 \cdot y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{x_1}{4} \\ y_2 = \frac{y_1}{3} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{3}\right)^2 = 1$$

所以点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

例 3.146 抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 直线 m 是抛物线的不与 x 轴重合的切线, 切点为 P , 抛物线的准线与 m 交于点 Q , 求证: 以线段 PQ 为直径的圆过点 F .

证 设 P 点坐标为 $P(x_0, y_0)$, 则切线 m 的方程为 $y = \frac{x_0}{p}(x - x_0) + \frac{x_0^2}{2p}$, 因此, Q 点坐标为

$$Q\left(\frac{x_0^2 - p^2}{2x_0}, -\frac{p}{2}\right), \text{ 所以 } \overrightarrow{FP} = \left(x_0, \frac{x_0^2}{2p} - \frac{p}{2}\right), \overrightarrow{FQ} = \left(\frac{x_0^2 - p^2}{2x_0}, -p\right) \Rightarrow \overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FQ} = 0.$$

例 3.147 直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相切于点 P (不为椭圆的左右顶点), 直线 l 与直线 $x = 2$ 相交于点 A , 与直线 $x = -2$ 相交于点 B , 点 F 为椭圆右焦点, 请问 $\angle AFB$ 是否为定值? 若不是, 请说明理由; 若是, 请证明.

证 两种情况讨论:

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 1) \\ \text{① 当直线 } l \text{ 斜率为 } 0 \text{ 时, } B(-2, 1) \\ F(\sqrt{3}, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = 0;$$

- ② 当直线 l 斜率不为 0 时, 设 P 点坐标为 $P(x_0, y_0)$, 则切线 l 的方程为 $\frac{x_0}{4}x + y_0y = 1$. 因此三个点的坐标为 $A\left(2, \frac{2-x_0}{2y_0}\right)$, $B\left(-2, \frac{2+x_0}{2y_0}\right)$, $F(\sqrt{3}, 0)$, 可得 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$.

3.12.2 求出切点

引理 3.3. 求出切点

设直线 $y = kx + m$ (k 存在) 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 切于点 P , 则点 P 的坐标为 $\left(-\frac{a^2km}{a^2k^2 + b^2}, \frac{mb^2}{a^2k^2 + b^2}\right)$.

证 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + m \end{cases} \Rightarrow (a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2(m^2 - b^2) = 0.$

因为直线与椭圆相切, 所以方程有两相等实数根, 由韦达定理可得 $x_P = -\frac{a^2km}{a^2k^2 + b^2}$, 代入直线方程可得 $y_P = \frac{mb^2}{a^2k^2 + b^2}$, 故点 P 的坐标为 $\left(-\frac{a^2km}{a^2k^2 + b^2}, \frac{mb^2}{a^2k^2 + b^2}\right)$.

例 3.148 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 圆 $M: x^2 + y^2 = R^2$ (其中 $b < R < a$), 直线 l 分别切椭圆 C , 圆 M 于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最大值为 $a - b$.

证 由题意, 可设直线 l 的方程为 $y = kx + m (k \neq 0, m \neq 0)$, 联立方程 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$, 消去 y , 得

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2m^2 - a^2b^2 = 0 \quad (3.153)$$

设 A 点横坐标为 x_1 , 由直线与椭圆相切可得

$$\begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow m^2 = b^2 + a^2k^2 \end{cases} \quad (3.154)$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a^2km}{b^2 + a^2k^2} = -\frac{a^2k}{m} \end{cases} \quad (3.155)$$

由直线 l 与圆 M 相切于 B 点, 根据点到直线的距离公式可得 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = R$, 整理得

$$m^2 = R^2(1+k^2) \quad (3.156)$$

由 (3.154), (3.156) 可得 $b^2 + a^2k^2 = R^2(1+k^2)$, 解得 $k^2 = \frac{R^2 - b^2}{a^2 - R^2}$,

联立方程 $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$, 消去 y , 得

$$(1 + k^2)x^2 + 2kmx + m^2 - R^2 = 0 \quad (3.157)$$

设 B 点横坐标为 x_2 , 则 $x_2 = -\frac{km}{1+k^2} = -\frac{km}{\frac{m^2}{R^2}} = -\frac{kR^2}{m}$,

所以 $x_1 - x_2 = \frac{k}{m}(R^2 - a^2)$, 于是

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (1 + k^2)(x_1 - x_2)^2 = \frac{m^2}{R^2} \cdot \frac{k^2}{m^2} (a^2 - R^2)^2 \\ &= \frac{(R^2 - b^2)(a^2 - R^2)}{R^2} = a^2 + b^2 - \left(R^2 + \frac{a^2 b^2}{R^2}\right) \\ &\leq a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \end{aligned}$$

当且仅当 $R^2 = \frac{a^2 b^2}{R^2}$ 即 $R = \sqrt{ab}$ 时等号成立, 因此, $|AB|$ 的最大值为 $a - b$.

引理 3.4. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 E 有且仅有一个公共点 P , 直线 l 交直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 于点 Q , 求证: 以线段 PQ 为直径的圆恒过右焦点.

例 3.149 椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 有且仅有一个公共点 P , 直线 l 交直线 $x = 2$ 于点 Q , 求证: 以线段 PQ 为直径的圆恒过定点, 并求出该定点的坐标.

解 依题意联立

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases} \Rightarrow (2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0 \quad (3.158)$$

因为直线与椭圆相切, 所以 $\Delta = 0 \Rightarrow m^2 = 2k^2 + 1$.

又方程 (3.158) 有两相等实数根, 由韦达定理可得 $x_P = -\frac{2k}{m}$, 代入直线方程可得 $y_P = \frac{1}{m}$, 故点 P 的坐标为 $\left(-\frac{2k}{m}, \frac{1}{m}\right)$.

设 $Q(2, 2k + m)$, 以线段 PQ 为直径的圆的方程为

$$\left(x + \frac{2k}{m}\right)(x - 2) + \left(y - \frac{1}{m}\right)(y - 2k - m) \Rightarrow x^2 + y^2 + \left(\frac{2k}{m} - 2\right)x + \left(2k + m + \frac{1}{m}\right)y + \left(1 - \frac{2k}{m}\right) = 0 \quad (3.159)$$

整理得

$$(x^2 + y^2 - 2x + 1) + \left[\frac{2k}{m}x + \left(2k + m + \frac{1}{m} \right)y - \frac{2k}{m} \right] = 0 \quad (3.160)$$

于是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 + y^2 = 0 \\ \frac{2k}{m}x + \left(2k + m + \frac{1}{m} \right)y - \frac{2k}{m} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad (3.161)$$

故圆过定点 $K(1, 0)$.

推论 3.33. 设直线 $y = kx + m$ (k 存在) 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 切于点 P , 则 $k \cdot k_{OP} = -\frac{b^2}{a^2}$.

变式训练 EXERCISES

- 225.** 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 和直线 $l: x = -1$, 过直线 l 上任一点 P 做抛物线的两条切线, 切点记为 A, B , 求证: 直线 AB 过定点.
- 226.** 已知点 P 是抛物线 $x^2 = 4y$ 上的动点, 点 F 是抛物线的焦点, 点 A 的坐标为 $(0, -1)$, 则 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 的最小值为 ▲ .
- 227.** 已知点 P 是抛物线 $y = \frac{1}{8}x^2$ 上的动点, 点 F 是抛物线的焦点, 点 A 的坐标为 $(3, -2)$, 则 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 的最小值为 ▲ .

3.12.3 阿基米德三角形

定义 3.12: 阿基米德三角形

圆锥曲线的弦与过弦的端点的两条切线所围成的三角形叫阿基米德三角形.

定理 3.18

1. 从抛物线 $y^2 = 2px$ 外一点 P 作抛物线的两条切线 PA, PB , 切点分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 P 点坐标为 $P\left(\frac{y_1 y_2}{2p}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.
2. 从抛物线 $x^2 = 2py$ 外一点 P 作抛物线的两条切线 PA, PB , 切点分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 P 点坐标为 $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 x_2}{2p}\right)$.
3. F 为抛物线的焦点, 则 $\angle PFA = \angle PFB$.

证 由定理 3.17 知以 $A\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$ 两点为切点的切线方程为

$$\begin{cases} yy_1 = p\left(x + \frac{y_1^2}{2p}\right) \\ yy_2 = p\left(x + \frac{y_2^2}{2p}\right) \end{cases} \quad (3.162)$$

$$\begin{cases} yy_1 = p\left(x + \frac{y_1^2}{2p}\right) \\ yy_2 = p\left(x + \frac{y_2^2}{2p}\right) \end{cases} \quad (3.163)$$

两式相减 可得 $y_P = \frac{y_1 + y_2}{2}$, 故点 P 坐标为 $P\left(\frac{y_1 y_2}{2p}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

注 阿基米德三角形底边上的中线平行于抛物线的轴.

例 3.150 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$, 直线 l 交 C 于 A, B 两点与原点不重合, 点 $M(1, 2)$ 为线段 AB 的中点.

(1) 若直线 l 的斜率为 1, 求抛物线 C 的方程;

(2) 分别过 A, B 两点作抛物线 C 的切线, 若两条切线交于点 S , 求证点 S 在一条定直线上.

解 (1) $k_{AB} = \frac{x_0}{p} \Rightarrow p = 1$;

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 求导可知过点 A 的切线方程为 $x_1 x = p\left(y_1 + \frac{x_1^2}{2p}\right)$,

同理过点 B 的切线方程为 $x_2 x = p\left(y_2 + \frac{x_2^2}{2p}\right)$, 两式做差可得 $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1$, 所以点 S 在定直线 $x = 1$ 上.

推论 3.34. 若阿基米德三角形底边弦 AB 过抛物线内定点 C , 则另一顶点 P 的轨迹为一条直线.

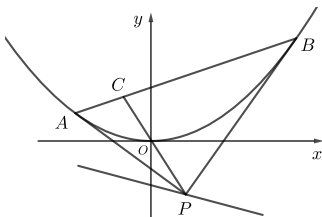


图 3.65

证 依题意, 设 $P(x, y)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_0, y_0)$, 由 3.18 易知 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{x_1 x_2}{2p}$, 所以

$x_1x_2 = 2py$, 因为 A, B, C 三点共线, 所以

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow \frac{\frac{x_1^2}{2p} - \frac{x_2^2}{2p}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1^2}{2p} - y_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow x_0(x_1 + x_2) = x_1x_2 + 2py_0 \quad (3.164)$$

将 $x_1 + x_2 = 2x$, $x_1x_2 = 2py$ 代入上式可得 $x_0x = p(y + y_0)$, 即为 Q 点的轨迹方程, 它表示一条直线.

推论 3.35. 若直线 l 与抛物线无公共点, 以 l 上的点为顶点的阿基米德三角形的底过定点.

证 依题意, 设直线 l 的方程为 $ax + by + c = 0$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_0, y_0)$, 由于弦 AB 过 C , 所以两切线交点 P 的轨迹为 $x_0x = p(y + y_0)$, 该方程与 $ax + by + c = 0$ 表示同一条直线, 于是有 $x_0 = -\frac{ap}{b}$, $y_0 = -\frac{c}{b}$, 即弦 AB 过定点 $(-\frac{ap}{b}, \frac{c}{b})$.

例 3.151 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 过直线 $y = x - 2$ 上任一点引抛物线的两条切线, 切点为 A, B , 则点 F 到直线 AB 的距离 ()

(A) 无最小值

(B) 无最大值

(C) 有最小值, 最小值为 1

(D) 有最大值, 最大值为 $\sqrt{5}$

解 易知直线 AB 恒过点 $Q(2, 2)$, 所以 $|FQ|$ 即为点 F 到直线 AB 的最大距离, 计算得 $\sqrt{5}$, 当直线 AB 经过点 F 时距离最短, 为 0, 故选 D.

例 3.152 抛物线 $y^2 = 2px$ 外一点 P 作抛物线的两条切线 PA, PB , 切点分别为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, F 为抛物线的焦点, 则 $|PF|^2 = |AF| \cdot |BF|$.

证 易知点 $P(\frac{y_1y_2}{2p}, \frac{y_1 + y_2}{2})$, $F(\frac{p}{2}, 0)$, 则

$$|PF|^2 = \left(\frac{y_1y_2}{2p} - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \frac{y_1^2y_2^2}{4p^2} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{4} + \frac{p^2}{4} \quad (3.165)$$

$$|AF| \cdot |BF| = \left(x_1 + \frac{p}{2}\right)\left(x_2 + \frac{p}{2}\right) = x_1x_2 + \frac{p}{2}(x_1 + x_2) + \frac{p^2}{4} = \frac{y_1^2y_2^2}{4p^2} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{4} + \frac{p^2}{4} \quad (3.166)$$

所以 $|PF|^2 = |AF| \cdot |BF|$.

变式训练 EXERCISES

228. 已知曲线 $x^2 = 4y$, 动点 P 在直线 $y = -3$ 上, 过点 P 作曲线的两条切线 l_1, l_2 , 切点分别为 A, B , 则直线 AB 截圆 $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ 所得弦长为 ()

(A) $\sqrt{3}$

(B) 2

(C) 4

(D) $2\sqrt{3}$

229. 过点 P 作抛物线 $C: x^2 = 2y$ 的切线 l_1, l_2 , 切点分别为 M, N , 若 $\triangle PMN$ 的重心坐标为 $(1, 1)$, 且 P 在抛物线 $D: y^2 = mx$ 上, 则 D 的焦点坐标为 ()

(A) $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ (B) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ (C) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)$ (D) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

推论 3.36. 阿基米德三角形中, P 为过 A, B 两点的抛物线的切线的交点. 若弦 AB 过抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点 F , 则有:

- P 点坐标为 $P\left(-\frac{p}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.
- $PA \perp PB$.
- $PF \perp AB$ 【即符合射影定理】.
- $\triangle PAB$ 的面积的最小值为 p^2 .

注 抛物线 $x^2 = 2py$ 的情况基本一样, 留给读者朋友推导.

例 3.153 抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 点 A, B 在抛物线上, 且 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$, 过点 A, B 分别引抛物线的切线 l_1, l_2 , 且 l_1, l_2 相交于点 P , 则 $|PF| =$ ()

(A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}$

解 由本书第 98 页式 (3.28) 可知 $|AF| = 3$, $|BF| = \frac{3}{2}$, 再由射影定理可知答案为 A.

例 3.154 抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 过 F 的直线 l 与抛物线交于不同两点 A, B , 过点 A, B 分别引抛物线的切线 l_1, l_2 , 且 l_1, l_2 相交于点 P , 设 $|AB| = m$, 则 $|PF| =$ ▲ . (结果用 m 表示)

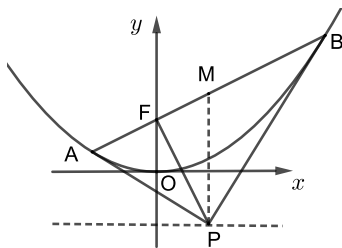


图 3.66

解 依题意, 设直线 l 的倾斜角为 θ , 取 AB 中点 M , 连接 MP , 则

$$m = |AB| = \frac{2p}{\cos^2 \theta} = \frac{4}{\sin^2 \angle FMP}$$

又根据阿基米德三角形性质知 $|PM| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}m$.

在 $\text{Rt}\triangle PFM$ 中, $|PF| = |PM| \cdot \sin \angle FMP = \frac{m}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{m}} = \sqrt{m}$.

变式训练 EXERCISES

- 230.** 已知抛物线 $C: y = \frac{x^2}{2}$, D 为直线 $y = -\frac{1}{2}$ 上的动点, 过点 D 作 C 的两条切线, 切点分别为 A, B , 证明: 直线 AB 过定点.
- 231.** 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 在 C 上存在 A, B 两点满足 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$, 且点 A 在 x 轴上方, 以 A 为切点作 C 的切线 l , l 与该抛物线的准线交于点 M , 则 M 的坐标为 .
- 232.** 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 P 为抛物线上的动点, $A(-1, 0)$, 则 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 的最小值为 ()
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 233.** 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 P 为抛物线上的动点, $A(-1, 0)$, 当 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 取得最小值时, 直线 AP 的方程为 .
- 234.** 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , 抛物线 C 上存在一点 P , 过点 P 作 $PM \perp l$, 垂足为 M , 使 $\triangle PMF$ 是等边三角形且面积是 $4\sqrt{3}$.
- (I) 求抛物线 C 的方程;
- (II) 若点 H 是圆 $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 与抛物线 C 的一个交点, 点 $A(-1, 0)$, 当 $\frac{|HF|}{|HA|}$ 取得最小值时, 求此时圆 O 的方程.
- 235.** 已知点 F_1 是抛物线 $C_1: y = \frac{1}{4}x^2$ 与椭圆 $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 的公共焦点, F_2 是椭圆 C_2 的另一焦点, P 是抛物线 C_1 上一动点, 当 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 取得最小值时, 点 P 恰好在椭圆 C_2 上, 则椭圆 C_2 的离心率为 .
- 236.** 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F , A, B 是抛物线上两动点, 且 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB} (\lambda > 0)$, 过 A, B 两点分别作抛物线的切线, 设其交点为 M , 则 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{AB} =$ ()
- (A) 大于 0 (B) 等于 0 (C) 小于 0 (D) 无法判断

237. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 与点 $M(-2, 2)$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, 则 $k =$ ()
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2
238. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与抛物线 $E: y^2 = 4x$ 相交于 M, N , 过点 $P(-1, 0)$ 的直线与抛物线 E 相切于 M, N 点, 设椭圆的右顶点为 A , 若四边形 $PMAN$ 为平行四边形, 则椭圆的离心率为 ()
 (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
239. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 与点 $M(-1, 1)$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\angle AMB = 90^\circ$, 则 $k =$.
240. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $M(x_M, 2)$ 在抛物线上, 且 $|MF| = \frac{5}{2}$, 在抛物线上不同的两点 P, Q 分别作切线 l_1, l_2 , 记线段 PQ 的中点为 N , 若 $l_1 \perp l_2$, 则点 N 的纵坐标的最小值为 ()
 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$
241. 过抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的准线上任意一点 P 作抛物线的两条切线 PA, PB , 切点分别为 A, B , 则 A 点到准线的距离与 B 点到准线的距离之和的最小值为 .
242. 已知 F_1 为抛物线 $x^2 = 2py$ 的焦点, 点 F_2 为抛物线 C 的对称轴与其准线的交点, 过 F_2 作抛物线 C 的切线, 切点为 A , 若点 A 恰好在以 F_1, F_2 为焦点的双曲线上, 则双曲线的离心率为 ()
 (A) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2} + 1$ (D) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

定理 3.19: 抛物线阿基米德三角形的面积

- 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 内一点 $M(m, n)$ 的阿基米德三角形的面积的最小值为 $\frac{1}{p} \sqrt{(2pm - n^2)^3}$, 此时 $PM \parallel x$ 轴.
- 过抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 内一点 $M(m, n)$ 的阿基米德三角形的面积的最小值为 $\frac{1}{p} \sqrt{(2pn - m^2)^3}$, 此时 $PM \parallel y$ 轴.

例 3.155 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$, 直线 $l: y = kx + 1$ 交抛物线 C 于 A, B 两点, 过 A, B 两点分别作抛物线的切线, 设其交点为 E , 求 $\triangle EAB$ 面积的最小值.

解 依题意, 易知 E 点坐标为 $E(2k, -1)$, 抛物线和直线方程联立可得: $x^2 - 4kx - 4 = 0$,

韦达定理 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4k \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$. 由“水平宽, 铅锤高”可得三角形面积

$$S_{\triangle EAB} = \frac{1}{2}(2k^2 + 2)\sqrt{16k^2 + 16} = 4(k^2 + 1)\sqrt{k^2 + 1} \stackrel{\substack{\sqrt{k^2+1}=t \geq 1 \\ \text{换元}}}{=} 4t^3 \geq 4.$$

注 此结果和本书第 160 页推论 3.29 一样.

例 3.156 已知抛物线 $C: y = ax^2$ 的焦点坐标为 $(0, 1)$, 点 $P(0, 3)$, 过点 P 作直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点, 过 A, B 两点分别作抛物线的切线, 设其交点为 Q , 则 $\triangle QAB$ 面积的最小值为 ()

(A) $6\sqrt{2}$ (B) $6\sqrt{3}$ (C) $12\sqrt{3}$ (D) $12\sqrt{2}$

解 C.

3.13 同构原理构造一元二次方程

3.13.1 双切线及蒙日圆

定理 3.20

如图 3.67 所示, 过圆锥曲线外一点 $P(x_0, y_0)$ 的两条切线的斜率分别为 k_1, k_2 , 设过点 P 的直线方程为 $y = k(x - x_0) + y_0$, 与二次曲线联立后, 令 $\Delta = 0$ 便会得到一个关于 k 的二次方程. 很明显 k_1, k_2 均满足这个二次方程, 所以 k_1, k_2 为该二次方程的两根.

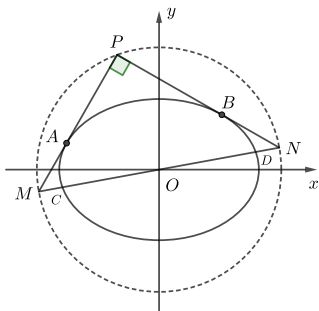


图 3.67

例 3.157 求证: 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 两垂直切线交点的轨迹为圆.

证 设 $P(x_0, y_0)$, 过点 P 的直线方程为 $y = k(x - x_0) + y_0$, 联立椭圆方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = k(x - x_0) + y_0 \end{cases}$

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 k^2 + b^2 = (y - kx_0)^2 \Rightarrow (a^2 - x_0^2)k^2 + 2x_0 y_0 k + b^2 - y_0^2 = 0$$

则 k_1, k_2 为其两根, 所以 $k_1 k_2 = \frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2} = -1 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$.

例 3.158 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, 直线 $l: mx + y - 3m - 2 = 0$, 若直线 l 上存在点 P , 使得过点 P 总能作出椭圆 C 的两条互相垂直的切线, 则实数 m 的取值范围为 .

解 易知点 P 的运动轨迹为 $x^2 + y^2 = 4$ (蒙日圆), 依题意直线 l 和此圆总有交点, 即

$$\frac{|3m+2|}{\sqrt{m^2+1}} \leq 2 \Rightarrow -\frac{12}{5} \leq m \leq 0.$$

例 3.159 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2 , 点 P 为椭圆上异于左右顶点的任意一点, 过右焦点 F_2 作 $\angle F_1 P F_2$ 的外角平分线 l 的垂线, 垂足为 Q , 且 $|OQ| = 2$, 椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 方程;

(2) 设 S 是圆 $x^2 + y^2 = 7$ 上任一点, 由 S 引椭圆两条切线 SA, SB , 切点分别为 A, B , 求证: $SA \perp SB$.

解 (1) 易知 $|OQ| = a$, 故椭圆 C 方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) ① 当两条切线中的一条的斜率不存在时, 不妨设点 S 在第一象限, 且 $SA \perp x$ 轴, 则点 A 为椭圆的右顶点, 此时 $A(2, 0), S(2, \sqrt{3}), B(0, \sqrt{3})$, 所以 $SA \perp SB$.

② 当两条切线的斜率都存在时, 设 $S(x_0, y_0)$, 一条切线的斜率为 k . 则过点 S 的切线方程为

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (3.167)$$

联立椭圆方程得

$$(4k^2 + 3)x^2 + 8k(y - kx_0)x + 4(y - kx_0)^2 - 12 = 0 \quad (3.168)$$

因为相切, 所以 $\Delta = 0 \Rightarrow (x_0^2 - 4)k^2 - 2x_0 y_0 k + y_0^2 - 3 = 0 \Rightarrow k_{SA} \cdot k_{SB} = \frac{y_0^2 - 3}{x_0^2 - 4}$, 又因为点 S 在圆

$x^2 + y^2 = 7$ 上, 故 $x_0^2 + y_0^2 = 7$. 所以 $k_{SA} \cdot k_{SB} = \frac{7 - x_0^2 - 3}{x_0^2 - 4} = -1$.

推论 3.37. 如图 3.67, 过椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的蒙日圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上一点 P 作椭圆 E 的两条切线 PM, PN , 切点为 A, B , 与圆交于 M, N 两点, 直线 MN 交椭圆 E 于 C, D 两点, 则 (1) $S_{\triangle PMN} \leq a^2 + b^2$; (2) 若点 F 为椭圆 E 上一点, 则 $k_{EC} \cdot k_{ED} = -\frac{b^2}{a^2}$.

例 3.160 求证: 抛物线 $y^2 = 4x$ 两垂直切线交点的轨迹为直线, 且此直线为抛物线的准线.

证 设 $P(x_0, y_0)$, 过点 P 的直线方程为 $y = k(x - x_0) + y_0$, 联立椭圆方程

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = k(x - x_0) + y_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{k}{4}y^2 - y + y_0 - kx_0 = 0$$

$\Delta = 0 \Rightarrow x_0 k^2 - y_0 k + 1 = 0$, 则 k_1, k_2 为其两根, 所以 $k_1 k_2 = \frac{1}{x_0} = -1 \Rightarrow x_0 = -1$.

变式训练 EXERCISES

- 243.** 蒙日圆涉及的是几何学中的一个著名定理, 该定理的内容为: 椭圆上两条互相垂直的切线的交点必在一个与椭圆同心的圆上, 该圆称为原椭圆的蒙日圆, 若椭圆 $C: \frac{x^2}{a+2} + \frac{y^2}{a} = 1 (a > 0)$ 的蒙日圆为 $x^2 + y^2 = 4$, 则 $a =$ ()
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

- 244.** 已知两动点 A, B 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 上, 动点 P 在直线 $3x + 4y - 10 = 0$ 上, 若 $\angle APB$ 恒为锐角, 则椭圆 C 的离心率的取值范围为 ▲ .

3.13.2 蒙日圆即伴随圆

推论 3.38. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的任意切线 l 与圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 相交于 A, B 两点 (两点均不在坐标轴上), 则直线 OA, OB 的斜率之积 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{b^2}{a^2}$.

证 设切线 $l: y = kx + m, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线和椭圆联立

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + m \end{cases} \Rightarrow (a^2 k^2 + b^2)x^2 + 2a^2 kmx + a^2(m^2 - b^2) = 0 \quad (3.169)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 = a^2 k^2 + b^2 \quad (3.170)$$

直线和圆联立

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \\ y = kx + m \end{cases} \Rightarrow (k^2 + 1)x^2 + 2kmx + m^2 - a^2 - b^2 = 0 \quad (3.171)$$

韦达定理

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2km}{k^2 + 1} \\ x_1 x_2 = \frac{m^2 - a^2 - b^2}{k^2 + 1} \stackrel{(3.170)}{=} \frac{a^2 k^2 - a^2}{k^2 + 1} \end{cases} \quad (3.172)$$

所以

$$\begin{aligned} k_{OA} \cdot k_{OB} &= \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{(kx_1 + m)(kx_2 + m)}{x_1 x_2} \\ &= \frac{k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2}{x_1 x_2} \stackrel{(3.170)}{=} \frac{(3.172)}{(3.172)} - \frac{b^2}{a^2} \end{aligned}$$

3.13.3 双斜率

例 3.161 已知抛物线 $y^2 = 2px$, 直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 且 $OA \perp OB$, 求证: 直线 AB 恒过定点.

证 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 OA, OB 的斜率为 $k_1 = \frac{y_1}{x_1}, k_2 = \frac{y_2}{x_2}$, 直线 $l: x = ty + m$, 则

$\frac{x - ty}{m} = 1$, 和抛物线联立得

$$y^2 = 2px \cdot 1 = 2px \cdot \left(\frac{x - ty}{m} \right)$$

化简得

$$my^2 + 2ptxy - 2px^2 = 0 \quad (3.173)$$

给式子 (3.173) 两边同除以 x^2 , 得

$$m\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2pt\left(\frac{y}{x}\right) - 2p = 0 \quad (3.174)$$

因为 $OA \perp OB$, 所以 $k_1 \cdot k_2 = -1$, 且 k_1, k_2 是方程 (3.174) 的两根, 于是 $\frac{-2p}{m} = -1 \Rightarrow m = 2p$. 故直线 AB 恒过定点 $(2p, 0)$.

例 3.162 已知抛物线 $y^2 = 2px$, 点 $P\left(\frac{p}{2}, p\right)$, 过点 P 的两条直线分别交抛物线于 A, B 两点, 且直线 PA, PB 的倾斜角互补, 求证: 直线 AB 的斜率为定值.

证 我们通过平移把点 P 移到坐标原点 O , 令 $\begin{cases} x = x' + \frac{p}{2} \\ y = y' + p \end{cases}$, 抛物线方程化简为

$$y'^2 - 2px' + 2py' = 0 \quad (3.175)$$

$A'(x'_1, y'_1)$, $B'(x'_2, y'_2)$, 直线 $A'B'$ 的方程为 $y' = kx' + m$, 则 $\frac{y' - kx'}{m} = 1$, 和式子 (3.175) 联立得

$$y'^2 - 2px' \cdot \left(\frac{y' - kx'}{m}\right) + 2py' \cdot \left(\frac{y' - kx'}{m}\right) = 0$$

化简得

$$(m + 2p)y'^2 - (2p + 2pk)x'y' + 2pkx'^2 = 0 \quad (3.176)$$

给式子 (3.176) 两边同除以 x'^2 , 得

$$(m + 2p)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 - (2p + 2pk)\left(\frac{y'}{x'}\right) + 2pk = 0 \quad (3.177)$$

因为直线 PA , PB 的倾斜角互补, 所以 $k'_1 + k'_2 = 0$, 即 $\frac{2p + 2pk}{m + 2p} = 0 \Rightarrow 2p + 2pk = 0 \Rightarrow k = -1$.

因为平移不影响斜率, 所以直线 AB 的斜率为定值 -1 .

例 3.163 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点, 点 $P(2, 3)$ 为其上一点, 且 $|PF_1| + |PF_2| = 8$.

(1) 求椭圆 C 方程;

(2) 若直线 $l: y = kx - 4$ 与椭圆 C 交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 且原点在以线段 AB 为直径的圆的外部, 求 k 的取值范围.

解 (1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$;

(2) 先构造 “1”

$$y = kx - 4 \Rightarrow \frac{kx - y}{4} = 1$$

代入椭圆方程得

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = \left(\frac{kx - y}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = \frac{k^2x^2 + y^2 - 2kxy}{16} \quad (3.178)$$

同除以 x^2 就可以得到和斜率有关的一元二次方程, 并且此斜率和坐标原点有关.

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 6k\left(\frac{y}{x}\right) + 3 - 3k^2 = 0 \quad (3.179)$$

设方程 (3.179) 的两根分别为 $k_1 = \frac{y_1}{x_1}$, $k_2 = \frac{y_2}{x_2}$, 可以得到

$$\left. \begin{array}{l} \Delta = 36k^2 - 4(3 - 3k^2) > 0 \\ k_1k_2 > -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ k \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \end{array} \right.$$

综上, $k \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

例 3.164 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点, 点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 为其上一点, 且 $|PF_1| + |PF_2| = 4$.

(I) 求椭圆 C 方程;

(II) 若直线 $l: y = kx - \frac{\sqrt{6}}{2}$ 与椭圆 C 交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 且 OA, OB 所在直线斜率满足 $k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{1}{4}$, 求 k 的值.

解 (I) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; (II) $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 3.165 椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, 直线 l 与椭圆 C 交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 与 x 轴, y 轴分别交于 P, Q 两点, 若直线 OA, OB 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$, 求 $\triangle OPQ$ 的面积取值范围.

解 采用齐次化方法: 设直线 $AB: mx + ny = 1$, 联立得:

$$(4 - 48n^2)\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 96mn\left(\frac{y}{x}\right) + (3 - 48m^2) = 0 \quad (3.180)$$

设方程 (3.180) 的两根分别为 $k_1 = \frac{y_1}{x_1}, k_2 = \frac{y_2}{x_2}$, 可以得到

$$k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3 - 48m^2}{4 - 48n^2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow 8m^2 + 6n^2 = 1$$

$$\begin{cases} |OP| = \left|\frac{1}{m}\right| \\ |OQ| = \left|\frac{1}{n}\right| \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle OPQ} = \left|\frac{1}{2mn}\right|. \text{ 由基本不等式 } 1 = 8m^2 + 6n^2 \geq 8\sqrt{3}mn \Rightarrow S_{\triangle OPQ} \geq 4\sqrt{3}.$$

例 3.166 椭圆 $E: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$, 不经过点 $A(2, 1)$ 的直线与椭圆交于 P, Q 两点, 且直线 AP 与直线 AQ 的斜率之和为 0, 证明: 直线 PQ 的斜率为定值.

证 坐标变换, 令 $\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 1 \end{cases}$, 椭圆方程转换为 $x'^2 + 4x' + 4y'^2 + 8y' = 0$, 现在设直线

$P'Q': mx' + ny' = 1$, 联立得:

$$(4 + 8n)y'^2 + (8m + 4n)x'y' + (4m + 1)x'^2 = 0 \quad (3.181)$$

两边同除以 x'^2 , 得

$$(4+8n)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 + (8m+4n)\left(\frac{y'}{x'}\right) + (4m+1) = 0 \quad (3.182)$$

设此方程的两根分别为 $k_1 = \frac{y'_1}{x'_1}$, $k_2 = \frac{y'_2}{x'_2}$, 根据题意可得

$$0 = k_1 + k_2 \Rightarrow 8m + 4n = 0 \Rightarrow n = -2m$$

所以直线 PQ 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

例 3.167 椭圆 $E: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, 过点 $D(1,0)$ 的直线 l 与椭圆交于 A, B 两点, 设点 $E(3,2)$, 直线 AE, BE 的斜率分别为 k_1, k_2 , 问 $k_1 + k_2$ 是否为定值? 并证明你的结论.

证 定值 2.

例 3.168 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $M(0, -1)$, 长轴长是短轴长的 2 倍.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设直线 l 经过点 $N(2, 1)$ 且与椭圆相交于 A, B 两点 (异于点 M), 记直线 MA 的斜率为 k_1 , 直线 MB 的斜率为 k_2 , 证明 $k_1 + k_2$ 为定值.

证 (I) 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; (II) 定值 1.

注 我们一直是给直线方程做手术, 让其产生 “1”, 构造其次方程的思想如下:

- 若曲线方程里有一次项, 那么一次项就乘以这个 “1”;
- 若曲线方程里有常数项, 那么常数项就要乘以这个 “1” 的平方.

3.13.4 双定比

注 我们把直线与曲线的两个交点看成一个点, 根据定比分点公式求出二合一的坐标, 把此坐标代入曲线方程, 我们便可得到关于两个比例系数的一元二次方程.

例 3.169 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 过点 $M(0, 2)$ 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 且直线 l 与 x 轴交于点 C , 设 $\overrightarrow{MA} = \alpha \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MB} = \beta \overrightarrow{BC}$, 证明 $\alpha + \beta$ 为定值.

证 易知直线 l 的斜率存在且不为 0, 设方程为 $y = kx + 2$, 令 $\overrightarrow{MD} = \lambda \overrightarrow{DC}$, 设 D 点坐标为 (x, y) , C

点坐标为 $\left(-\frac{2}{k}, 0\right)$, 由定比分点公式可得 $\begin{cases} x = \frac{-\frac{2}{k}\lambda}{1+\lambda} \\ y = \frac{2}{1+\lambda} \end{cases}$, 因为 D 点在抛物线上, 所以

$$y^2 = 4x \Rightarrow 2\lambda(\lambda+1) = k \Rightarrow 2\lambda^2 + 2\lambda - k = 0 \quad (3.183)$$

根据题意我们可知 α 和 β 是方程 (3.183) 的两个根. 所以 $\alpha + \beta = -1$.

例 3.170 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 过抛物线的焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 交准线 l 与 M , 设 $\overrightarrow{MA} = \lambda_1 \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{MB} = \lambda_2 \overrightarrow{BF}$, 求 $\lambda_1 + \lambda_2$.

解法一 易知直线 l 的斜率存在且不为 0, 设方程为 $x = ty + 1$, 令 $\overrightarrow{MD} = \lambda \overrightarrow{DF}$, 设 D 点坐标为

(x, y) , M 点坐标为 $\left(-1, -\frac{2}{t}\right)$, 由定比分点公式可得 $\begin{cases} x = \frac{-1+\lambda}{1+\lambda} \\ y = \frac{-\frac{2}{t}}{1+\lambda} \end{cases}$, 因为 D 点在抛物线上, 所以

$$y^2 = 4x \Rightarrow t^2 \lambda^2 - t^2 - 1 = 0 \quad (3.184)$$

根据题意可知 λ_1 和 λ_2 是方程 (3.184) 的两个根, 所以 $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

解法二 易知 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, 所以

$$\frac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{MB}|} = -\frac{\lambda_1 |\overrightarrow{AF}|}{\lambda_2 |\overrightarrow{BF}|} \quad (3.185)$$

过点 A, B 分别作准线 l 的垂线, 垂足分别为 a_1, B_1 , 则

$$\frac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{MB}|} = \frac{|\overrightarrow{Aa_1}|}{|\overrightarrow{BB_1}|} = \frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{BF}|} \quad (3.186)$$

由 (3.185) (3.186) 两式得 $-\frac{\lambda_1 |\overrightarrow{AF}|}{\lambda_2 |\overrightarrow{BF}|} = \frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{BF}|}$, 即 $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

变式训练 EXERCISES

245. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$, 过右焦点 F 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 交 y 轴于 N 点, 设 $\overrightarrow{NA} = m\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{NB} = n\overrightarrow{BF}$, 求 $m+n$ 的值.

246. 双曲线 C 与椭圆 $E: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有相同的焦点, 直线 $y = \sqrt{3}x$ 为 C 的一条渐近线.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $P(0, 4)$ 的直线 l 交双曲线 C 于 A, B 两点, 交 x 轴于 Q 点, 当 $\overrightarrow{PQ} = \lambda_1 \overrightarrow{QA} = \lambda_2 \overrightarrow{QB}$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{8}{3}$ 时, 求 Q 点坐标.

247. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 过焦点 $F(1, 0)$ 的直线交抛物线于 A, B 两点, 交 y 轴于点 N , 若 $\overrightarrow{NA} = \lambda \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{NB} = \mu \overrightarrow{BF}$, 则 $\lambda + \mu =$ ()

- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) -1 (D) -2

248. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$, 过右焦点 F 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 交 y 轴于 M 点, 设 $\overrightarrow{MA} = \lambda_1 \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{MB} = \lambda_2 \overrightarrow{BF}$, 求 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的值.

249. 设点 $P\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 在以 $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$ 为焦点的椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 经过 F_2 作直线 m 交 C 于两点 A, B , 交 y 轴于 M 点, 若 $\overrightarrow{MA} = \lambda_1 \overrightarrow{AF_2}$, $\overrightarrow{MB} = \lambda_2 \overrightarrow{BF_2}$, 且 $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, 求 λ_1 与 λ_2 .

250. 若椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, 1)$, 其长轴、焦距和短轴三者长的平方成等差数列, 直线 l 与 x 轴正半轴和 y 轴分别交于点 Q, P , 与椭圆分别交于点 M, N , 各点均不重合且满足 $\overrightarrow{PM} = \lambda_1 \overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{PN} = \lambda_2 \overrightarrow{NQ}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 若 $\lambda_1 + \lambda_2 = -3$, 证明: 直线 l 过定点并求此定点.

向量共线中的双比值

例 3.171 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边上的中点, 若 $\overrightarrow{BE} = \lambda_1 \overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{CF} = \lambda_2 \overrightarrow{FA}$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 设 AD 与 EF 交于点 P , 求证: P 为 $\triangle ABC$ 的重心.

解法一 设 $\overrightarrow{AP} = m \overrightarrow{AE} + n \overrightarrow{AF}$, 则 $m + n = 1$, 再设 $\overrightarrow{AD} = k \overrightarrow{AP}$, 所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{mk}{\lambda_1 + 1} \overrightarrow{AB} + \frac{nk}{\lambda_2 + 1} \overrightarrow{AC}$,

故 $\frac{mk}{\lambda_1 + 1} = \frac{nk}{\lambda_2 + 1} = \frac{1}{2}$, 于是

$$\frac{m}{\lambda_1 + 1} = \frac{n}{\lambda_2 + 1} \xrightarrow{\text{等比性质}} \frac{m + n}{\lambda_1 + 1 + \lambda_2 + 1} = \frac{1}{3}$$

所以 $k = \frac{3}{2}$, 故 P 为 $\triangle ABC$ 的重心.

解法二 设 EF 的延长线交 BC 的延长线于点 G , 设 $\frac{DP}{PA} = \lambda$, 由梅涅劳斯定理可得

$$\begin{cases} \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \end{cases} \quad (3.187)$$

$$\begin{cases} \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BG}{GD} \cdot \frac{DP}{PA} = 1 \end{cases} \quad (3.188)$$

$$\begin{cases} \frac{AP}{PD} \cdot \frac{DG}{GC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \end{cases} \quad (3.189)$$

由式 (3.187), (3.188) 可得 $\frac{BG}{GC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{BG}{GD} \cdot \frac{DP}{PA}$, 即 $\frac{1}{GC} \cdot \lambda_2 = \frac{1}{GD} \cdot \lambda$, 于是 $\lambda_2 = \frac{GC}{GD} \cdot \lambda$,

由式 (3.187), (3.189) 可得 $\lambda_1 = \frac{BG}{GD} \cdot \lambda$, 再由 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 可得

$$\lambda = \frac{DG}{BG + GC} = \frac{DG}{GD + BD + GD - BD} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } P \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的重心.}$$

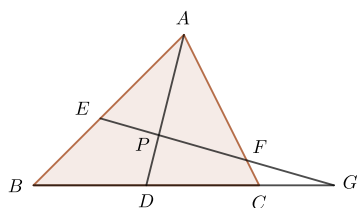


图 3.68

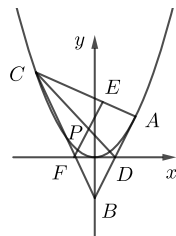


图 3.69

例 3.172 过抛物线 $y = x^2$ 上的一点 $A(1, 1)$ 作抛物线的切线, 分别交 x 轴于点 D , 交 y 轴于点 B , 点 C 在抛物线上, 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda_1 \overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{BF} = \lambda_2 \overrightarrow{FC}$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 设 CD 与 EF 交于点 P , 当点 C 在抛物线上移动时, 求点 P 的轨迹.

解 易知 $AB: y = 2x - 1$, 故 $B(0, -1)$, 且点 D 为线段 AB 的中点, 设 $P(x, y)$, $C(t, t^2)$, 由例 3.171 可知点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 因为点 C 不与 A 重合, 所以 $t \neq 1$, 由重心坐标公式可得

$$\begin{cases} 3x = t + 1 \\ 3y = t^2 \end{cases} \quad \text{消去 } t \text{ 得 } 3y = (3x - 1)^2.$$

故所求轨迹方程为 $3y = (3x - 1)^2$, ($x \neq \frac{2}{3}$).

3.13.5 “同构法”处理与圆的切线有关的一类问题

过某曲线 G 上一点 P 向圆 A 引两条切线, 求解相关问题. 本文介绍一个有效的方法——

“同构法”.

方法 3.1. 解决这类问题的方法是: 先设出 B, C 点的坐标, 由直线方程的两点式写出切线 PB 的方程, 由直线和圆相切的条件可得点 B 的坐标所满足的某个二元一次方程, 同理可得出点 C 的坐标也满足的这个二元一次方程.

例 3.173 已知点 $P(1, 1)$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, 椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设点 A, B 在椭圆 C 上, 直线 PA, PB 均与圆 $O: x^2 + y^2 = r^2 (0 < r < 1)$ 相切, 记直线 $PA,$

PB 的斜率分别为 k_1, k_2 .

(i) 证明: $k_1 k_2$ 为定值;

(ii) 证明: 直线 AB 过定点.

证 (1) 椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + \frac{2y^2}{3} = 1$;

(2)

(i) 设直线 PA 的方程为 $y = k_1 x - k_1 + 1$, 直线 PB 的方程为 $y = k_2 x - k_2 + 1$, 由题知

$$\frac{|1 - k_1|}{\sqrt{1 + k_1^2}} = r, \text{ 整理得}$$

$$(1 - r^2)k_1^2 - 2k_1 + 1 - r^2 = 0 \quad (3.190)$$

同理

$$(1 - r^2)k_2^2 - 2k_2 + 1 - r^2 = 0 \quad (3.191)$$

所以 k_1, k_2 是方程 $(1 - r^2)k^2 - 2k + 1 - r^2 = 0$ 的两根, 所以 $k_1 k_2 = 1$;

(ii) 采用齐次化方法 (见本书第 177 页) 即可知直线 AB 过定点 $(3, -3)$.

例 3.174 如图 3.70, P 是抛物线 $y^2 = 2x$ 上的动点, 点 B, C 在 y 轴上, 圆 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 内切于 $\triangle PBC$, 求 $\triangle PBC$ 面积的最小值.

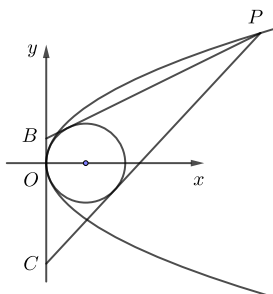


图 3.70

解 设 $P(x_0, y_0)$, $B(0, b)$, $C(0, c)$, 不妨设 $b > c$, 直线 PB 的方程: $y - b = \frac{y_0 - b}{x_0} x$, 化简得

$$(y_0 - b)x - x_0 y + x_0 b = 0 \quad (3.192)$$

又因为和圆相切

$$\frac{|y_0 - b + x_0 b|}{\sqrt{(y_0 - b)^2 + x_0^2}} = 1 \Rightarrow (y_0 - b)^2 + x_0^2 = (y_0 - b)^2 + 2x_0 b(y_0 - b) + x_0^2 b^2 \quad (3.193)$$

易知 $x_0 > 2$, 上式化简得

$$(x_0 - 2)b^2 + 2y_0 b - x_0 = 0 \quad (3.194)$$

同理

$$(x_0 - 2)c^2 + 2y_0c - x_0 = 0 \quad (3.195)$$

于是 b, c 是方程 $(x_0 - 2)x^2 + 2y_0x - x_0 = 0$ 的两根, 由韦达定理知 $\begin{cases} b + c = \frac{-2y_0}{x_0 - 2} \\ bc = \frac{-x_0}{x_0 - 2} \end{cases}$, 则

$$(b - c)^2 = \frac{4x_0^2 + 4y_0^2 - 8x_0}{(x_0 - 2)^2} \quad (3.196)$$

因为点 P 在抛物线上, 故 $y_0^2 = 2x_0$, 则 $b - c = \frac{2x_0}{x_0 - 2}$, 所以

$$\begin{aligned} S_{\triangle PBC} &= \frac{1}{2}(b - c) \cdot x_0 = \frac{x_0}{x_0 - 2} \cdot x_0 \\ &= (x_0 - 2) + \frac{4}{x_0 - 2} + 4 \geq 2\sqrt{4} + 4 = 8 \end{aligned}$$

此时, $x_0 = 4$, $y_0 = \pm 2\sqrt{2}$, 因此 $\triangle PBC$ 面积的最小值为 8.

例 3.175 过抛物线 $y = x^2$ 上的点 A 向圆 $G: x^2 + (y - 2)^2 = 1$ 引两条切线 AB, AC , 与抛物线分别交于点 B, C 两点, 连接 BC , 证明: 直线 BC 也是圆 G 的切线.

证 设 $A(a, a^2)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, 由两点式可求得直线 AB 的方程为

$$(x_1 + a)x - y - ax_1 = 0 \quad (3.197)$$

因直线 AB 与圆 G 相切, 则

$$\frac{|2 + ax_1|}{\sqrt{1 + (x_1 + a)^2}} = 1 \Rightarrow (a^2 - 1)x_1^2 + 2ax_1 + 3 - a^2 = 0 \Rightarrow (a^2 - 1)y_1 + 2ax_1 + 3 - a^2 = 0 \quad (3.198)$$

式 (3.198) 说明 $B(x_1, y_1)$ 在直线 $(a^2 - 1)y + 2ax + 3 - a^2 = 0$ 上,

同理 $C(x_2, y_2)$ 也在直线 $(a^2 - 1)y + 2ax + 3 - a^2 = 0$ 上,

故直线 BC 的方程为 $(a^2 - 1)y + 2ax + 3 - a^2 = 0$,

因圆心 G 到直线 BC 的距离

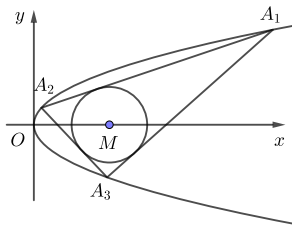
$$d = \frac{|2(a^2 - 1) + 3 - a^2|}{\sqrt{(2a)^2 + (a^2 - 1)^2}} = \frac{a^2 + 1}{a^2 + 1} = 1 \quad (3.199)$$

故直线 BC 也是圆 G 的切线.

例 3.176 【2021 甲卷】抛物线 C 的顶点为坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 直线 $l: x = 1$ 与 C 交于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$, 已知点 $M(2, 0)$, 且 $\odot M$ 与 l 相切.

(1) 求 C , $\odot M$ 的方程;

(2) 设 a_1, a_2, A_3 是 C 上的三个点, 直线 a_1a_2, a_1A_3 均与 $\odot M$ 相切, 判断直线 a_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系, 并说明理由.



解 (1) $C: y^2 = x$; $\odot M: (x-2)^2 + y^2 = 1$;

(2) 设 $a_1(x_1, y_1), a_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$, 当 a_1, a_2, A_3 中有一个为坐标原点, 另外两个点的横坐标均为 3 时, 满足条件, 此时直线 a_2A_3 与 $\odot M$ 相切.

当 x_1, x_2, x_3 互不相等时, 直线 a_1a_2 的方程为

$$x - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0 \quad (3.200)$$

则

$$\frac{|2 + y_1y_2|}{\sqrt{(y_1 + y_2)^2 + 1}} = 1 \Rightarrow (y_1^2 - 1)y_2^2 + 2y_1y_2 + 3 - y_1^2 = 0 \quad (3.201)$$

同理可得

$$(y_1^2 - 1)y_3^2 + 2y_1y_3 + 3 - y_1^2 = 0 \quad (3.202)$$

所以 y_2, y_3 是方程 $(y_1^2 - 1)y^2 + 2y_1y + 3 - y_1^2 = 0$ 的两个根, 则 $\begin{cases} y_2 + y_3 = \frac{-2y_1}{y_1^2 - 1} \\ y_2y_3 = \frac{3 - y_1^2}{y_1^2 - 1} \end{cases}$

设点 M 到直线 $a_2A_3: x - (y_2 + y_3)y + y_2y_3 = 0$ 的距离为 d , 则

$$d^2 = \frac{(2 + y_2y_3)^2}{1 + (y_2 + y_3)^2} = \frac{\left(2 + \frac{3 - y_1^2}{y_1^2 - 1}\right)^2}{1 + \left(\frac{-2y_1}{y_1^2 - 1}\right)^2} = 1$$

所以直线 a_2A_3 与 $\odot M$ 相切. 综上可得, 直线 a_2A_3 与 $\odot M$ 相切.

变式训练 EXERCISES

251. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ 上三点 $A(2, 2), B, C$, 直线 AB, AC 是圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线, 则直线 BC 的方程为 ()

$$(A) x + 2y + 1 = 0 \quad (B) 3x + 6y + 4 = 0 \quad (C) 2x + 6y + 3 = 0 \quad (D) x + 3y + 2 = 0$$

3.14 圆曲中的外接圆方程

例 3.177 过点 $P(-1, 2)$ 作抛物线 $y^2 = 2x$ 的两条切线, 分别交 y 轴于 M, N 两点, 求 $\triangle PMN$ 的外接圆方程.

解 设切线方程为 $y = k(x + 1) + 2$, 由
$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = k(x + 1) + 2 \end{cases} \quad \text{得到} \quad \frac{k}{2}y^2 - y + k + 2 = 0,$$

$$\Delta = 1 - 2k(k + 2) = 0 \Rightarrow 2k^2 + 4k - 1 = 0, \text{ 依题可得 } M(0, k_1 + 2), N(0, k_2 + 2), \text{ 其中 } \begin{cases} k_1 + k_2 = -2 \\ k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

设 $\triangle PMN$ 的外接圆方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 则有

$$\begin{cases} 1 + 4 - D + 2E + F = 0 \\ y^2 + Ey + F = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.203) \\ (3.204) \end{matrix}$$

其中 $k_1 + 2, k_2 + 2$ 是方程 (3.204) 的两根, 故

$$\begin{cases} k_1 + 2 + k_2 + 2 = -E \\ (k_1 + 2) \cdot (k_2 + 2) = F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = -2 \\ F = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.205)$$

由方程 (3.203)、(3.205) 可知 $\triangle PMN$ 的外接圆方程为 $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x - 2y - \frac{1}{2} = 0$.

例 3.178 过定点 $C(0, 2)$ 的直线与抛物线 $x^2 = 4y$ 交于 A, B 两点, 问是否存在垂直于 y 轴的直线 l , 使得 l 被以 AC 为直径的圆截得的弦长为定值? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

解 设存在直线 $l: y = a$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 以 AC 为直径的圆的方程为

$$(x - 0)(x - x_1) + (y - 2)(y - y_1) = 0 \quad (3.206)$$

设直线 l 与圆的交点为 $P(x_3, y_3), Q(x_4, y_4)$, 将 $y = a$ 代入 (3.206), 得

$$x^2 - x_1x + (a - 2)(a - y_1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = x_1 \\ x_3x_4 = (a - 2)(a - y_1) \end{cases} \quad (3.207)$$

则弦长

$$\begin{aligned}
 |PQ| &= |x_3 - x_4| = \sqrt{(x_3 + x_4)^2 - 4x_3x_4} \\
 &= \sqrt{x_1^2 - 4(a-2)(a-y_1)} = \sqrt{4y_1 - 4(a^2 - ay_1 - 2a + 2y_1)} \\
 &= \sqrt{4[(a-1)y_1 + a(2-a)]}
 \end{aligned}$$

令 $a-1=0$, 得 $a=1$, 此时 $|PQ|=2$ 为定值, 故满足条件的直线 l 存在, 其方程为 $y=1$.

变式训练 EXERCISES

- 252.** 过点 $P(-1, 2)$ 作双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 右支的两条切线, 分别交 y 轴于 M, N 两点, 求 $\triangle PMN$ 的外接圆方程.

第四章 立体几何

4.1 正方体中的截面问题

正方体的截面形状有如下几种情况：

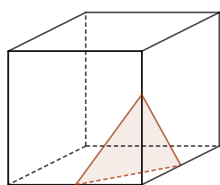


图 4.1 锐角三角形

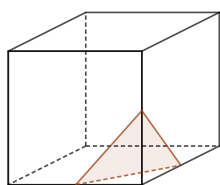


图 4.2 等腰三角形

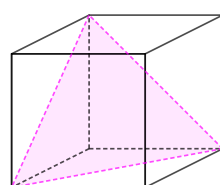


图 4.3 等边三角形

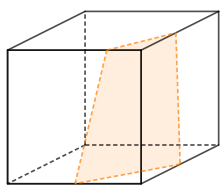


图 4.4 梯形

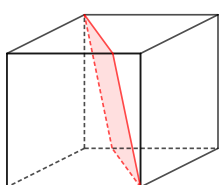


图 4.5 平行四边形

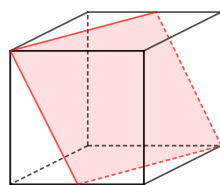


图 4.6 菱形

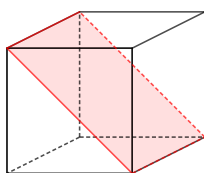


图 4.7 矩形

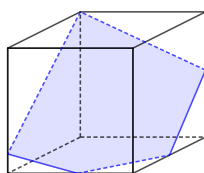


图 4.8 任意五边形

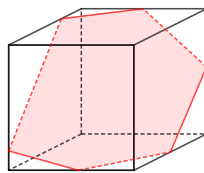


图 4.9 任意六边形

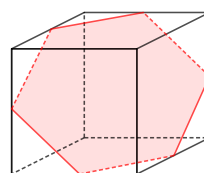


图 4.10 正六边形

正方体中的截面形状

正方体的截面只能三角形、四边形、五边形、六边形. 当截面是三角形时, 不可能是直角三角形和钝角三角形; 当截面是四边形时, 则四边形至少有一组对边平行, 不可能是直角梯形; 当截面是五边形时, 则必有两组分别平行的边, 不可能是正五边形; 当截面是六边形时, 则必有三组平行的边, 特别地, 可以是正六边形. 正方体截面面积最大时, 截面为体对角面 (矩形).

例 4.1 【多选】用一个平面去截正方体, 截面不可能是

()

(A) 菱形

(B) 直角三角形

(C) 正五边形

(D) 直角梯形

解 BCD.**与正方体体对角线垂直的截面**

1. 如图 4.11, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a , $DB_1 \perp$ 面 ACD_1 于点 H , 则 H 为 DB_1 的三等分点;
2. 正方体每条棱所在直线与截面所成的角 α 都相等, $\sin \alpha = \frac{DH}{DD_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
3. 当截面与正方体三个面相交时, 截面为等边三角形; 当截面与正方体六个面相交时, 截面为三组对边平行的六边形; 如图 4.12, 其中该六边形的周长为定值 $3\sqrt{2}a$, 和上面的等边三角形周长相等; 面积不是定值, 当六边形是正六边形时面积最大, 为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

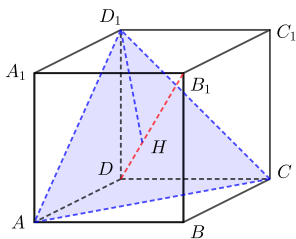


图 4.11

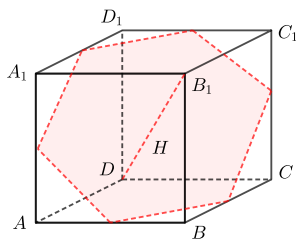


图 4.12

例 4.2 【联赛】 已知平面与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 12 条棱的夹角都等于 α , 则 $\sin \alpha = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例 4.3 【联赛】 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 任作平面 α 与对角线 AC_1 垂直, 使得 α 与每个面都有公共点, 这样得到的截面多边形的面积为 S , 周长为 l , 则 ()

(A) S 为定值, l 不为定值(B) S 与 l 均为定值(C) S 不为定值, l 为定值(D) S 与 l 均不为定值**解** C.

例 4.4 【2016 高考】 平面 α 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A , $\alpha \parallel$ 平面 CB_1D_1 , $\alpha \cap$ 平面 $ABCD = m$, $\alpha \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = n$, 则 m, n 所成角的正弦值为 ()

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

解 因为平面 $A_1B_1C_1D_1 \parallel$ 平面 $ABCD$, 平面 $CDD_1C_1 \parallel$ 平面 ABB_1A_1 , 故 $\angle CD_1B_1$ 即为所求角, 又 $\triangle CD_1B_1$ 为等边三角形, 故选 A.

例 4.5 【2018 高考】已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等, 则 α 与此正方体所得截面面积的最大值为 ()

- (A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解 如图 4.13, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 AB_1D_1 与 AA_1, AB, AD 所成的角都相等, 又正方体的其余棱与它们三个都平行, 故正方体的每条棱所在直线与平面 AB_1D_1 所成的角都相等, 则 α 最大时是图中的正六边形, 边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 面积为 $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

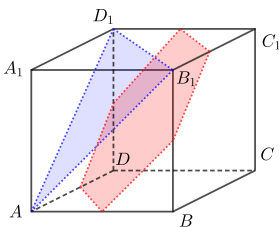


图 4.13

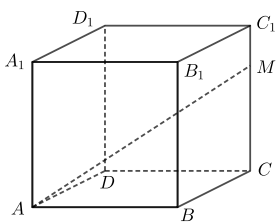


图 4.14

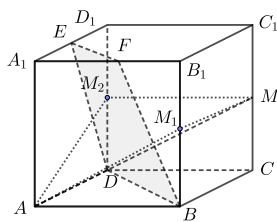


图 4.15

例 4.6 【多选】如图 4.14, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, M 为 CC_1 上的动点, $AM \perp$ 平面 α , 下面说法正确的是 ()

- (A) 直线 AB 与平面 α 所成角的正弦值的范围为 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
 (B) 点 M 与点 C_1 重合时, 平面 α 截正方体所得的截面, 其面积越大, 周长就越大
 (C) 点 M 为 CC_1 的中点时, 若平面 α 经过点 B , 则平面 α 截正方体所得截面图形是等腰梯形
 (D) 已知 N 为 DD_1 中点, 当 $AM + MN$ 的和最小时, M 为 CC_1 的中点

解 对于 A, 直线 AB 与平面 α 所成角的正弦值即为直线 AB 与直线 AM 所成角的余弦值, $\checkmark$;
 显然 B $\times$;

对于 C, 如图 4.15, 分别作出 AM 在外正方形和左正方形面上的投影 M_1, M_2 , 分别取 A_1D_1, A_1B_1 的中点 E, F , 由正方形十字架理论可知 $AM_1 \perp BF, AM_2 \perp BE$, 再由三垂线逆定理可知 $AM \perp BF, AM \perp BE$, 于是平面 α 截正方体所得截面图形是等腰梯形 $BDEF$, $\checkmark$;

对于 D, 将平面 ACC_1A_1 和平面 CDD_1C_1 展开, 连接 AN 与 CC_1 的交点是点 M , 显然 M 不是中点, $\times$.

故答案为 A, C.

变式训练 EXERCISES

253. 【多选】如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, P, N 分别为棱 $CC_1, CB,$

CD 上的动点, (点 P 不与 C, C_1 重合), 若 $CP = CM = CN$, 下列说法正确的是 ()

- (A) 存在点 P , 使得点 A_1 到平面 PMN 的距离为 $\frac{4}{3}$
 (B) 用过 M, P, D_1 三点的平面去截正方体, 得到的截面一定为梯形
 (C) $BD_1 \parallel$ 平面 PMN
 (D) 用平行于平面 PMN 的平面 α 去截正方体, 得到的截面为六边形时, 该六边形的周长一定为 $3\sqrt{2}$

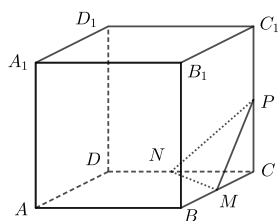


图 4.16

4.2 翻折问题的探究

翻折问题

翻折就是旋转, 旋转即对称, 对称即垂直. 从这一意义上说, 如图 4.17, 平面四边形 $ABCD$, 将 $\triangle ABC$ 沿 BC 翻折, 过点 A 作折痕 BC 的垂线 AH , 交 CD 于点 E , 则点 A' 在平面 BCD 上的投影必落在射线 AE 上.

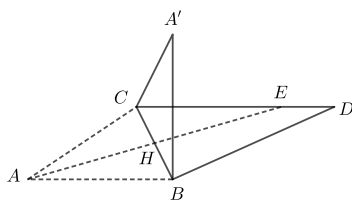


图 4.17

例 4.7 如图 4.18, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 3$, 沿对角线 BD 把 $\triangle BCD$ 折起使 C 点移到 C_1 点, 且 C_1 在平面 ABD 内的射影 O 恰好落在 AB 上, 求二面角 $C_1 - BD - A$ 的正切值.

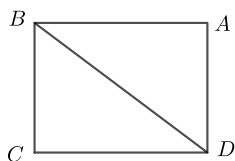


图 4.18

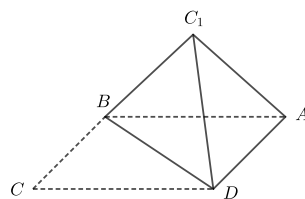


图 4.19

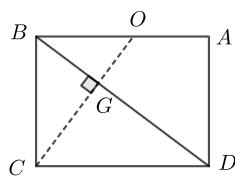


图 4.20

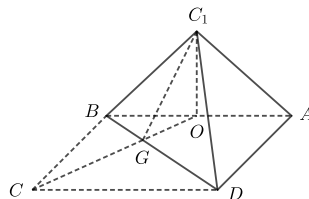


图 4.21

解 如图 4.20, 过点 C 作射线 $CO \perp BD$, 垂足为 G , 且交 BA 于点 O , 因为点 C_1 在平面 ABD 上的射影必落在射线 CG 上, 又依题知 C_1 在平面 ABD 内的射影 O 恰好落在 AB 上, 故 $C_1O \perp$ 平面 ABD , 如图 4.21, 由 $C_1G \perp BD$, $OG \perp BD$ 可知 $\angle C_1GO$ 即为面 C_1BD 与面 ABD 所成的角, 在图 4.20 中由等面积法可知 $CG = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 再由“8”字相似可得 $OG = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故

$$\tan \angle C_1GO = \frac{C_1O}{OG} = 2\sqrt{2}.$$

例 4.8 如图 4.22, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $BC = 4$, 沿对角线 BD 把 $\triangle ABD$ 折起, 使 A 在平面 BCD 内的射影落在 BC 上.

- (1) 求异面直线 AB 和 CD 所成的角;
- (2) 求异面直线 AB 和 CD 之间的距离.

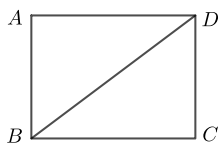


图 4.22

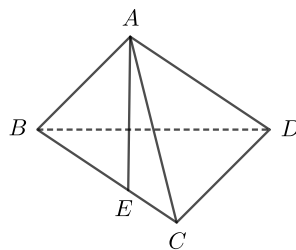


图 4.23

解

- (1) 因为直线 AB 在底面 ABC 的射影 BE 和 CD 垂直, 由三垂线定理可得 $AB \perp CD$.
- (2) 因为直线 AC 在底面 ABC 的射影 EE 和 CD 垂直, 由三垂线定理可得 $ABC \perp CD$,

$$\text{再} \begin{cases} AB \perp CD \\ AB \perp AD \\ AD \cap CD = D \end{cases} \quad \text{可得 } BA \perp \text{面 } ACD, \text{ 故 } AC \text{ 为异面直线 } AB \text{ 和 } CD \text{ 的公垂线, 所以 } AB$$

和 CD 之间的距离即为线段 AC 的长度.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $BC = 4$, $\therefore AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{7}$,

故异面直线 AB 和 CD 之间的距离为 $\sqrt{7}$.

例 4.9 【多选】 如图 4.24, 在长方形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$, 将 $\triangle ABC$ 沿 AC 向上翻折到 $\triangle B'AC$ 的位置, 设二面角 $B'-AC-D$ 的平面角为 θ , 若 $\cos \theta = \frac{1}{3}$, 则以下结论正确的是 ()

(A) $B'D = 2\sqrt{2}$

(B) 异面直线 AC 与 $B'D$ 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$

(C) 四面体 $AB'CD$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

(D) 四面体 $AB'CD$ 外接球的体积为 $\frac{32\pi}{3}$

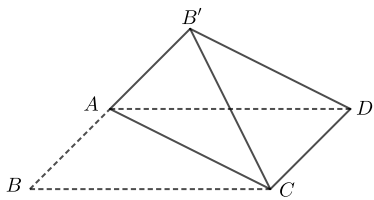


图 4.24

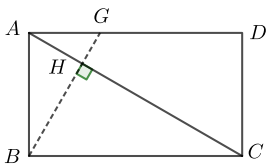


图 4.25

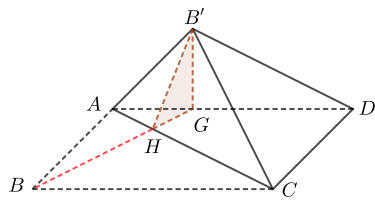


图 4.26

解 对于 A. 如图 4.25, 过点 B 作 AC 的垂线, 分别交 AC , AD 于点 H , G , 易知 $BH = \sqrt{3}$, $HG = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 如图 4.26, $\angle B'HG$ 即为二面角 $B'-AC-D$ 的平面角 θ , 又因为 $\cos \theta = \frac{1}{3}$, 所以

$B'G \perp$ 平面 ACD , 且 $B'G = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, 于是 $B'D = \sqrt{B'G^2 + GD^2} = 2\sqrt{2}$. ✓

对于 B. 由异面直线夹角公

式 $\cos \langle AC, B'D \rangle = \frac{|AB'^2 + CD^2 - AD^2 - B'C^2|}{2AC \cdot B'D} = \frac{|4 + 4 - 12 - 12|}{16\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故异面直线 AC 与 $B'D$

所成的角为 $\frac{\pi}{4}$. ✗

对于 C. 四面体 $AB'CD$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. ✗

对于 D. 易知 $\text{Rt}\triangle B'AC$ 的外心 (AC 中点) 到两平面交线 AC 的中点的距离 $m = 0$, $\text{Rt}\triangle DAC$ 的外心 (AC 中点) 到两平面交线 AC 的中点的距离 $n = 0$, 由公

式 $R^2 = \frac{AC^2}{4} + \frac{m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta}{\sin^2 \theta}$ 可得 $R^2 = 4 \Rightarrow R = 2$, 所以 $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3}$. ✓

本题答案为 AD.

例 4.10 【多选】 如图 4.27, 在长方形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $BC = 4$, E 为 BC 的中点, 将 $\triangle BAE$ 沿 AE 向上翻折到 $\triangle PAE$ 的位置, 连接 PC , PD , 在翻折的过程中, 以下结论正确的是 ()

(A) 四棱锥 $P-AECD$ 体积的最大值为 $2\sqrt{2}$

(B) PD 的中点 F 的轨迹长度为 $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

(C) EP , CD 与平面 PAD 所成的角相等

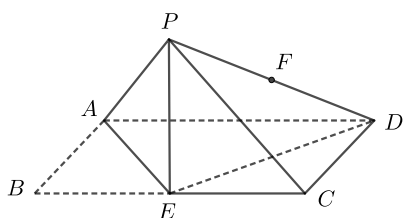


图 4.27

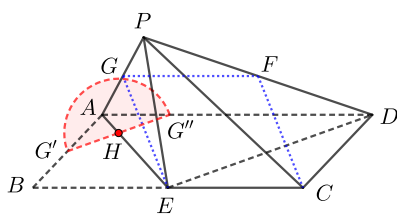


图 4.28

(D) 三棱锥 $P-AED$ 外接球的表面积有最小值 16π

解 对于 A. 易知当面 $PAE \perp$ 面 $AECD$ 时四棱锥 $P-AECD$ 体积最大, 易知 $\triangle APE$ 斜边 AE 上的高为 $\sqrt{2}$, 所以四棱锥 $P-AECD$ 体积最大值为 $\frac{1}{3} \times 6 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. ✓

对于 B. 如图 4.28, 取 PA 中点 G , 连接 GE, GF, FC , 易知四边形 $GFCE$ 为平行四边形, 所以点 F 的轨迹和点 G 的轨迹相同, 过 AB 的中点 G' 作 AE 的垂线, 分别交 AE, AD 于 H, G'' , 易知点 G 的轨迹为半圆 $\widehat{G'GG''}$, 其半径 $G'H = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 于是弧 $\widehat{G'GG''}$ 长 $= \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$. ✗

对于 C. 因为 $EC \parallel$ 面 PAD , 所以点 E , 点 C 到面 PAD 的距离相等, 又 $EP = CD$, 故 EP, CD 与平面 PAD 所成的角相等. ✓

对于 D. 易知等腰直角三角形 PAE 的外心 (AE 中点) 到两平面交线 AE 的中点的距离 $m = 0$, $\text{Rt}\triangle DEA$ 的外心 (AD 中点) 到两平面交线 AE 的中点的距离 $n = \sqrt{2}$, 设二面角 $P-AE-D = \theta$,

三棱锥 $P-AED$ 外接球的半径为 R , 由公式 $R^2 = \frac{AE^2}{4} + \frac{m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta}{\sin^2 \theta}$ 可得

$R^2 = 2 + \frac{2}{\sin^2 \theta} \geq 4$, 故三棱锥 $P-AED$ 外接球的表面积有最小值 $4\pi \cdot 4 = 16\pi$. ✓

本题答案为 ACD.

例 4.11 【浙江高考】如图 4.29, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2, BC = 1$, E 为 DC 的中点, F 为线段 EC (端点除外) 上一动点. 现将 $\triangle AFD$ 沿 AF 折起, 使平面 ABD 垂直平面 ABC . 在平面 ABD 内过点 D 作 $DK \perp AB$, K 为垂足. 设 $AK = t$, 则 t 的取值范围是 .

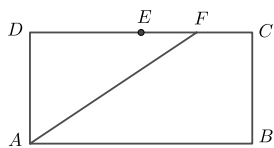


图 4.29

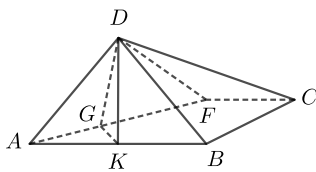


图 4.30

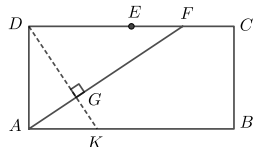


图 4.31

解 如图 4.31, 过点 D 作射线 $DG \perp AF$, 垂足为 G , 且交 AB 于点 K , 因为点 D 在平面 ABC 上的射影必落在射线 DG 上, 又依题翻折后平面 ABD 垂直平面 ABC ,

设 $DF = x$, 则 $1 < x < 2$, 在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 和 $\text{Rt}\triangle KAD$ 中 $\begin{cases} \angle ADK = \angle GAK = \angle AFD \\ \angle ADF = \angle KAD = 90^\circ \end{cases}$,

所以 $\triangle ADF \sim \triangle KAD \Rightarrow \frac{AD}{DF} = \frac{AK}{AD}$, 即 $xt = AD^2 = 1$, 故 $t = \frac{1}{x}$ ($1 < x < 2$), 所以 $\frac{1}{2} < t < 1$.

4.3 动点位置关系

4.3.1 平行关系

一定一动两点组成的线段与定平面平行

已知平面 α 外一定点 A , 动点 P , 满足 $AP \parallel$ 平面 α , 则动点 P 的轨迹为平面 β , 且 $AP \subset$ 平面 β , $\beta \parallel \alpha$. 如图 4.32.

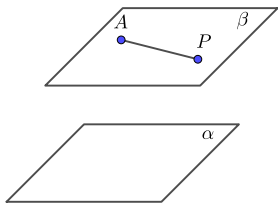


图 4.32

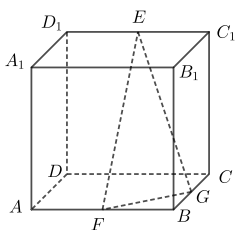


图 4.33

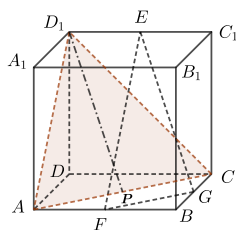


图 4.34

例 4.12 如图 4.33, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E, F, G 分别是 D_1C_1, AB, BC 的中点, P 是底面 $ABCD$ 内 (包括边界) 的动点, $D_1P \parallel$ 平面 EFG , 则 D_1P 的最小值为 .

解 如图 4.34, 易知点 P 的轨迹为平面 ACD_1 与底面 $ABCD$ 的交线 AC , 所以当 $D_1P \perp AC$ 时, D_1P 最小, 此时 $D_1P = \sqrt{6}$.

例 4.13 如图 4.35, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, P 是 BB_1 的中点, Q 是面 BB_1C_1C 内 (包括边界) 的动点, 若 $D_1Q \parallel$ 平面 A_1PD , 则点 Q 的轨迹是一条线段.

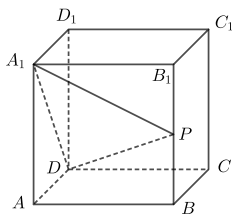


图 4.35

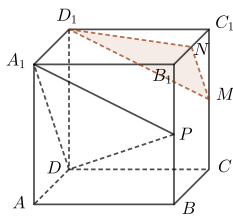


图 4.36

解 如图 4.36, 取 CC_1, B_1C_1 的中点 M, N , 易知点 Q 的轨迹为平面 D_1MN 与面 BB_1C_1C 的交线段 MN .

例 4.14 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = 1, AA_1 = 2$, P 是线段 BC_1 上的一动点, 则 $A_1P \parallel$ 平面 AD_1C .

解 利用面 $A_1BC_1 \parallel$ 面 AD_1C 即可.

例 4.15 如图 4.37, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F, G, H 分别是 CC_1, C_1D_1, DD_1, DC 的中点, N 是 BC 的中点, 点 M 在四边形 $EFGH$ 及其内部运动, 则 M 满足 ▲ 时, 有 $MN \parallel$ 平面 B_1BDD_1 .

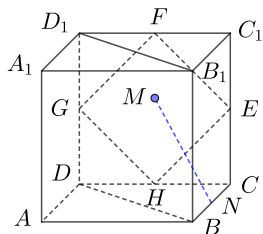


图 4.37

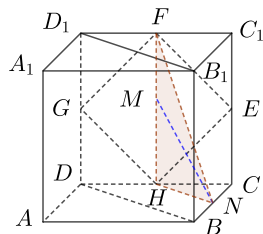


图 4.38

解 $\because HN \parallel DB, FH \parallel D_1D, \therefore$ 面 $FHN \parallel$ 面 $B_1BDD_1, \therefore$ 点 M 在四边形 $EFGH$ 及其内部运动, 故 $M \in FH$. 故答案为 M 在线段 FH 上.

例 4.16 如图 4.39, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E 是 DD_1 的中点, 点 F 在正方体的表面上运动, 若点 F 满足 $B_1F \parallel$ 平面 A_1BE , 则点 F 的轨迹长度为 ▲ .

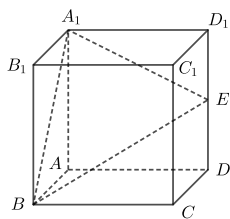


图 4.39

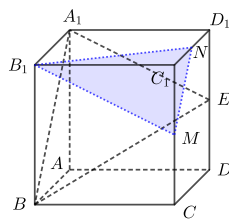


图 4.40

解 如图 4.40, 取 CC_1, C_1D_1 的中点 M, N , 易知点 F 的轨迹为 $\triangle B_1MN$, 其周长为 $2\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

4.3.2 垂直关系

定理 4.1: 三垂线定理

1. 文字表示: 平面内的一条直线, 如果与这个平面的一条斜线在面内的射影垂直, 那么它也和这条斜线垂直.
2. 符号表示: 如图 4.41 所示, $PO \perp$ 平面 $\alpha, PA \cap$ 平面 $\alpha = A$, 若直线 $l \in$ 平面 α 且 $l \perp OA$, 则 $l \perp PA$.

定理 4.2: 三垂线逆定理

1. 文字表示: 平面内的一条直线, 如果与这个平面的一条斜线垂直, 那么它也和这条斜线在平面内的射影垂直.
2. 符号表示: $PO \perp$ 平面 $\alpha, PA \cap$ 平面 $\alpha = A$, 若直线 $l \in$ 平面 α 且 $l \perp PA$, 则 $l \perp OA$.

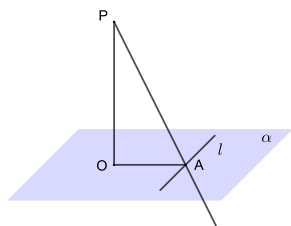


图 4.41

例 4.17 如图 4.42, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, M, N 分别为 AA_1, A_1D_1 的中点, 点 P 为棱 A_1B_1 上的动点, 则 $MN \perp CP$.

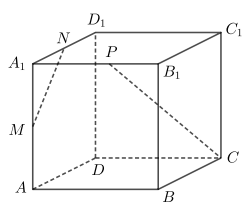


图 4.42

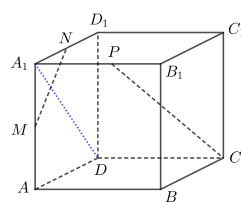
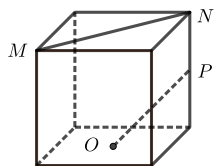


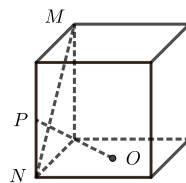
图 4.43

解 如图 4.43, 找到 CP 在平面 AA_1D_1D 内的射影 DA_1 , 易知 $MN \perp DA_1$, 所以 $MN \perp CP$.

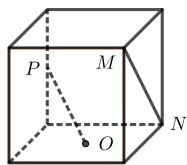
例 4.18 【2021 新高考二卷: 多选】如图, 下列各正方体中, O 为下底的中点, M, N 为顶点, P 为所在棱的中点, 则满足 $MN \perp OP$ 的是 ()



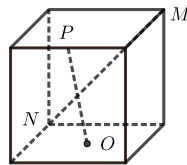
(A)



(B)



(C)



(D)

解 BC.

矩形十字架

如图 4.44, 端点分别在矩形四条边上的两条垂直线段长度之比等于矩形的长宽之比.

证 利用 $\triangle GHI \sim \triangle FEJ(AA)$, 得证.

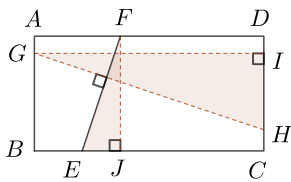


图 4.44

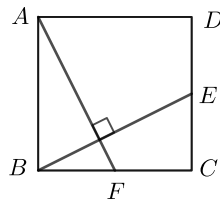


图 4.45

正方形弦图

如图 4.45, 已知正方形 $ABCD$ 中, 点 E 为 CD 上的动点 (不与 C, D 重合), 连接 BE , 过 A 作 $AF \perp BE$ 交 BC 于点 F , 则 $\triangle ABF \cong \triangle BCE$; 反之亦然.

例 4.19 【2021 新课标乙卷】如图 4.46, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $PD = DC = 1$, M 为 BC 的中点, 且 $PB \perp AM$.

(1) 求 BC ;

(2) 求二面角 $A-PM-B$ 的正弦值.

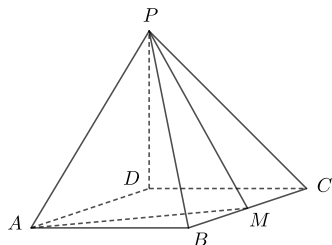


图 4.46

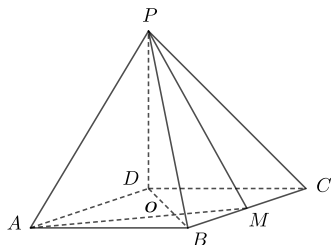


图 4.47

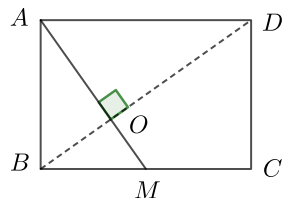


图 4.48

解 (1) 如图 4.47, 易知 $AM \perp$ 面 PBD , 所以 $AM \perp BD$, 如图 4.48, 由 $\triangle AOD \sim \triangle MOB$ 且相似比为 $2:1$, 可得

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{\frac{BC}{2}} \Rightarrow BC = \sqrt{2}$$

(2) 建系可求得二面角 $A-PM-B$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{70}}{14}$.

例 4.20 【2021 新课标甲卷】如图 4.49, 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB = BC = 2$, E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, D 为棱 A_1B_1 上的点, $BF \perp A_1B_1$.

(1) 证明: $BF \perp DE$;

(2) 当 B_1D 为何值时, 面 BB_1C_1C 与面 DEF 所成的二面角正弦值最小?

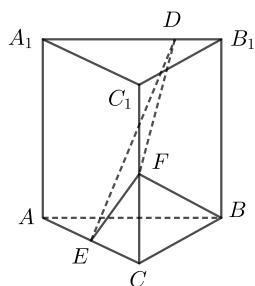


图 4.49

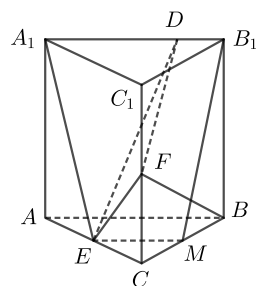


图 4.50

证 (1) 如图 4.50, 取 BC 中点 M , 连接 B_1M , ME , EA_1 , 由正方形弦图可知 $BF \perp B_1M$, 又 $BF \perp A_1B_1$, 所以 $BF \perp$ 面 A_1B_1ME , 于是可得 $BF \perp DE$.

(2) 建系可求得当 $B_1D = \frac{1}{2}$ 时, 面 BB_1C_1C 与面 DEF 所成的二面角正弦值最小.

例 4.21 如图 4.51, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 为 BC 棱中点, 若 N 在四边形 CDD_1C_1 内运动, 且总有 $MN \perp A_1C$, 则点 N 的轨迹为 ()

(A) 线段 (B) 圆的一部分 (C) 椭圆的一部分 (D) 双曲线的一部分

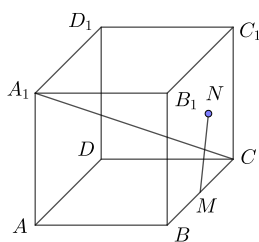


图 4.51

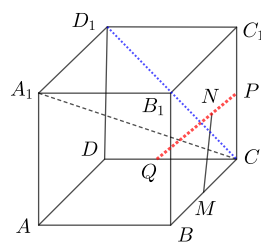


图 4.52

解 如图 4.52, 因为 A_1C 在平面 CC_1D_1D 内的射影为 D_1C , 分别取 CC_1 , CD 中点 P , Q , 则 $D_1C \perp PQ$, 故 $A_1C \perp PQ$, 即点 N 的轨迹为线段 PQ . 故选 A.

例 4.22 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 为 CD 棱中点, 点 O 是侧面 AA_1D_1D 的中心, 若点 P 在侧面 B_1C 及边界上运动, 且总保持 $OP \perp AM$, 则点 P 的轨迹为 ▲ .

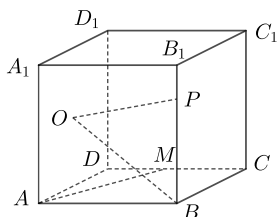


图 4.53

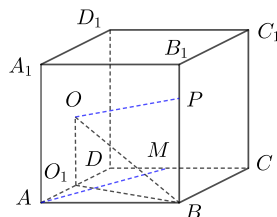


图 4.54

解 作 OP 在底面 $ABCD$ 上的投影 O_1P_1 , 因为 $AM \perp O_1B$, 所以 OP 的射影为 O_1B 时总保持

$OP \perp AM$, 故点 P 的轨迹为线段 BB_1 .

4.4 几何体的外接、内切球

简单多面体外接球问题是立体几何中的难点和重要的考点, 此类问题实质是解决球的半径长度或确定球心 O 的位置问题, 其中球心的确定是关键.

4.4.1 几何体外接球

有一个侧棱垂直于底面的几何体的外接球

若棱柱或棱锥的一个侧棱垂直于底面, 并且此棱的长度为 h .

1° 若底面为边长为 a 的等边三角形, 则外接球半径 $R^2 = d^2 + r^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3}$.

2° 若三角形的三个角分别为 30° , 30° , 120° 或者 30° , 60° , 90° 的三角形, 且 30° 所对的边长为 a , 则外接球半径 $R^2 = \frac{h^2}{4} + a^2$.

3° 若底面为直角边分别为 a , b 的直角三角形或者长和宽分别为 a , b 的矩形, 则外接球半径 $R^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{4}$.

4° 若底面为普通三角形, 先对底面用正弦定理求其外接圆半径 r , 则外接球半径 $R^2 = d^2 + r^2 = \frac{h^2}{4} + r^2$.

例 4.23 已知三棱锥 $P-ABC$ 的各顶点都在同一球面上, 且 $PA \perp$ 底面 ABC , $AB \perp BC$, $PA = AC = 2$, 则外接球的表面积为 ()

(A) 4π (B) 8π (C) 16π (D) 20π

解 易知 $R^2 = \frac{PA^2}{4} + \frac{BA^2 + BC^2}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2 \Rightarrow 4\pi R^2 = 8\pi$.

例 4.24 【2019 全国 I】已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA = PB = PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, E , F 分别为 PA , AB 的中点, $\angle CEF = 90^\circ$, 则球 O 的体积为 ()

(A) $8\sqrt{6}\pi$ (B) $4\sqrt{6}\pi$ (C) $2\sqrt{6}\pi$ (D) $\sqrt{6}\pi$

解 依题意 E , F 分别为 PA , AB 的中点, $\angle CEF = 90^\circ$, 可知 $PB \perp CE$, 又因为三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥, 所以易知 $PB \perp AC$, 所以 $PB \perp$ 面 PAC , 此即有一条棱垂直于底面的几何体, 又因为 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, $\therefore PA = PB = PC = \sqrt{2}$ 且两两垂直, 故

$$R^2 = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}{4} = \frac{3}{2}$$

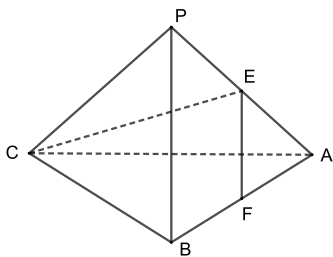


图 4.55

因此, $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \sqrt{6}\pi$, 故选 D.

例 4.25 已知 S, A, B, C 是球 O 表面上的点, $SA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $SA = AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, 则球 O 的表面积为 ▲ .

解 如图 4.56 所示, $R^2 = \frac{|BC|^2}{4} + \frac{|SA|^2}{2} = 1$.

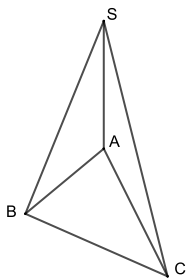


图 4.56

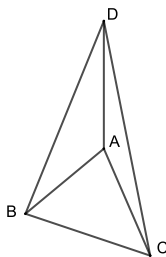


图 4.57

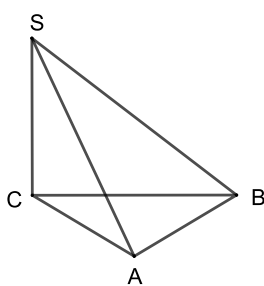


图 4.58

例 4.26 如图 4.57 所示, 三棱锥 $D-ABC$ 的各顶点都在同一球面上, 若 $DA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, 又 $DA = AB = BC = \sqrt{3}$, 则外接球的体积为 ▲ .

解 $R^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$.

例 4.27 已知三棱锥 $S-ABC$ 的各顶点都在同一球面上, $SC \perp$ 平面 ABC , 若 $SC = AB = AC = 1$, $\angle BAC = 120^\circ$, 则此球的表面积等于 ▲ .

解 如图 4.58 所示, $R^2 = \frac{|SC|^2}{4} + |AB|^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

例 4.28 已知四面体 $ABCD$ 的各顶点都在球 O 的球面上, $AD = AC = BD = 2$, $CD = 2\sqrt{2}$, $\angle BDC = 90^\circ$, 平面 $ADC \perp$ 平面 BDC , 则此球的体积等 ▲ .

解 如图 4.59 所示, 易知 $R^2 = \frac{|BD|^2}{4} + \frac{|AC|^2}{2} = 3$.

例 4.29 四面体 $A-BCD$ 的各顶点都在球面上, $\triangle BCD$ 是边长为 3 的正三角形, $AB \perp$ 平面 BDC , 若

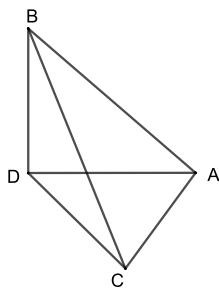


图 4.59

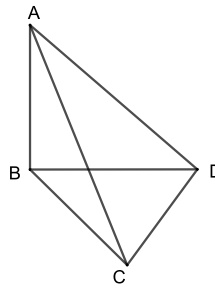


图 4.60

$AB = 2$, 则此球的表面积等于

()

(A) 4π (B) 12π (C) 16π (D) 32π

解 如图 4.60 所示, 易知 $R^2 = \frac{2^2}{4} + \frac{3^2}{3} = 4$.

例 4.30 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上, $PA \perp$ 平面 ABC , $\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形, 若球 O 的表面积为 20π , 则直线 PC 与平面 PAB 所成角的正切值为 ()

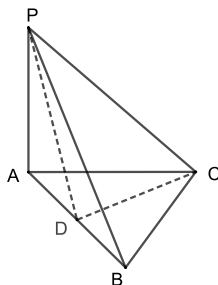
(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ (C) $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ (D) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 

图 4.61

解 取 AB 的中点 D , 连接 DP , DC , 因为 $PA \perp$ 平面 ABC , 所以球 O 的外接球半径满足

$$5 = R^2 = \frac{PA^2}{4} + \frac{(2\sqrt{3})^2}{3} \Rightarrow PA = 2, \text{ 又因为 } \left. \begin{array}{l} CD \perp AB \\ CD \perp PA \\ AB \cap PA = A \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp \text{平面 } PAB, \text{ 所以直线 } PC \text{ 与平}$$

面 PAB 所成角的正切值为 $\frac{CD}{PD} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

例 4.31 三棱锥 $S-ABC$ 中, 点 P 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AB 上一点, 给出下列四个命题:

① 若 $SA \perp$ 平面 ABC , 则三棱锥 $S-ABC$ 的四个面都是直角三角形;

- ② 若 $AC = 4$, $BC = 4$, $SC = 4$, $SC \perp$ 平面 ABC , 则三棱锥 $S - ABC$ 的外接球体积为 $32\sqrt{3}\pi$;
- ③ 若 $AC = 3$, $BC = 4$, $SC = \sqrt{3}$, S 在平面 ABC 上的射影是 $\triangle ABC$ 的内心, 则三棱锥 $S - ABC$ 的体积为 2;
- ④ 若 $AC = 3$, $BC = 4$, $SA = 3$, $SA \perp$ 平面 ABC , 则直线 PS 与平面 SBC 所成的最大角为 60° .

其中正确命题的序号是_____▲_____.

解 依题意①明显✓;

外接球半径满足 $R^2 = \frac{SC^2 + CA^2 + CB^2}{4} = 12$, $\therefore \frac{4}{3}\pi R^3 = 32\sqrt{3}\pi$, 故②✓;

设 $\triangle ABC$ 的内心为 O , 易知内切圆半径 $r = \frac{3+4-5}{2} = 1$, 所以 $OC = \sqrt{2}$, 于是

$$SO^2 = SC^2 - OC^2 = 3 - 2 = 1,$$

$\therefore$ 三棱锥 $S - ABC$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 1 = 2$, 故③✓;

直线 PS 与平面 SBC 所成的最大角时, P 点与 A 点重合, 在 $\text{Rt}\triangle SCA$ 中, $\tan \angle ASC = \frac{3}{3} = 1$,

$\therefore \angle ASC = 45^\circ$, 故④✗.

答案为①②③.

变式训练 EXERCISES

254. 四面体 $A - BCD$ 中, $AB \perp$ 底面 BCD , $AB = BD = \sqrt{2}$, $CB = CD = 1$, 则四面体 $A - BCD$ 的外接球的表面积为_____▲_____.

255. 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 内接于一个半径为 $\sqrt{3}$ 的球, 四边形 A_1ACC_1 与 B_1BCC_1 为两个全等的矩形, M 是 A_1B_1 的中点, 且 $C_1M = \frac{1}{2}A_1B_1$, 则三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 体积的最大值为()

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{6}$

(C) 4

(D) $\frac{4}{3}$

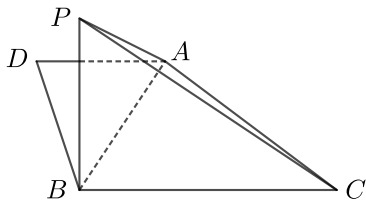


图 4.62

256. 如图, 平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 2$, $\triangle ABD$ 为等边三角形, 现将 $\triangle ABD$ 沿 AB 翻折, 使点 D 移动到点 P , 且 $PB \perp BC$, 则三棱锥 $P - ABC$ 的外接球的表面积为 ()

- (A) 8π (B) 6π (C) 4π (D) $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$

257. 已知三棱锥 $S-ABC$ 所有顶点都在球 O 的球面上, 且 $SC \perp$ 平面 ABC , 若 $SC = AB = AC = 1$, $\angle BAC = 120^\circ$, 则球 O 的表面积为 ()

- (A) $\frac{5\pi}{2}$ (B) $\frac{5\pi}{3}$ (C) 4π (D) 5π

258. 在矩形 $ABCD$ 中, $BC = 4$, M 为 BC 的中点, 将 $\triangle ABM$ 和 $\triangle DCM$ 分别沿 AM , DM 翻折, 使点 B 与 C 重合于点 F , 若 $\angle APD = 150^\circ$, 则三棱锥 $M-PAD$ 的外接球的表面积为 .

259. 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB = CD = 2$, $AD = BC = 1$, $AC = \sqrt{3}$, 且二面角 $B-AC-D$ 为 120° , 则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为 ()

- (A) 4π (B) 5π (C) 6π (D) 7π

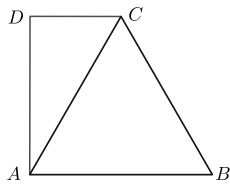


图 4.63

260. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AD \perp CD$, $\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形, 将该四边形沿对角线 AC 折成一个大小为 120° 的二面角 $D-AC-B$, 则四面体 $A-BCD$ 的外接球的表面积为 ()

- (A) 12π (B) 13π (C) 14π (D) 15π

261. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 底面 ABC 为正三角形, $PC \perp AC$, $PA = PB$, 且 $PC + AC = 4$. 若三棱锥 $P-ABC$ 的每个顶点都在球 O 的球面上, 则球 O 的半径的最小值为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (B) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ (C) $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ (D) $\frac{4\sqrt{7}}{7}$

定义 4.1: 弹三角板

1° 如图 4.64 所示, $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, $CH \perp AD$, 则四面体体积

$$V_{A-BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCH} \cdot AD.$$

2° 如图 4.65 所示, $AB \perp BD$, $AC \perp CD$, 则四面体 $ABCD$ 的外接球直径为 AD .

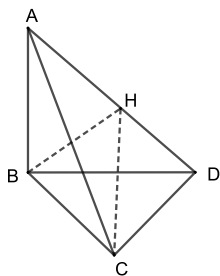


图 4.64

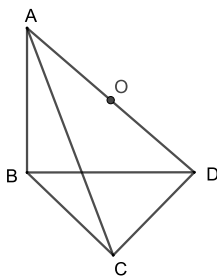


图 4.65

例 4.32 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB = CD = 6$, 其余各棱长均为 5, 则三棱锥 $A-BCD$ 内切球的表面积为 ▲ .

解 我们知道三棱锥内切球的半径 $R = \frac{3V_{A-BCD}}{S_{A-BCD}}$, 又由弹三角板模型知 $V_{A-BCD} = 6\sqrt{7}$, 且易知

$$S_{A-BCD} = 48, \text{ 故 } R = \frac{3V_{A-BCD}}{S_{A-BCD}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

例 4.33 【2021 甲卷】已知 A, B, C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点, 且 $AC \perp BC$, $AC = BC = 1$, 则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

解 A.

例 4.34 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心 O 满足 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \mathbf{0}$, 则二面角 $A-PB-C$ 的正弦值为 ()

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (C) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

解法一 如图 4.66 所示, 设 $\triangle ABC$ 边长为 2, 作 $AE \perp PB$, 连接 EC , 根据题意

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \mathbf{0} \Rightarrow OB = OP = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow PB = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

在 $\triangle PAB$ 中运用等面积法可知 $AE = \frac{\sqrt{10}}{2}$. 解三角形 EAC .

解法二 由等体积法

$$V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot OP = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle EAC} \cdot BP \Rightarrow S_{\triangle EAC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{又因为 } S_{\triangle EAC} = \frac{1}{2} \cdot AE^2 \cdot \sin \angle AEC \Rightarrow \sin \angle AEC = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

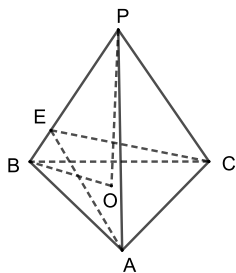


图 4.66

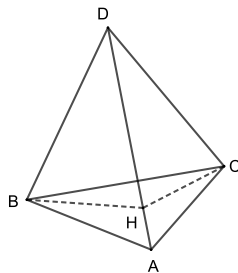


图 4.67

例 4.35 三棱锥 $A-BCD$ 中, 棱 AD 是其外接球 (多面体各顶点都在球面上) 的直径, $AB = AC = \frac{1}{2}AD = 2$, 平面 $ABD \perp$ 平面 ACD , 则该三棱锥的体积为 ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 3

解 如图 4.67 所示, 典型的弹三角板模型. 过点 B 作 $BH \perp AD$ 于 H , 连接 CH . 易知 $\triangle BCH$ 为等腰直角三角形且面积为 $\frac{3}{2}$, 所以 $V_{A-BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCH} \cdot AD = 2$, 选 C.

变式训练 EXERCISES

262. 【2017 全国 I】已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, SC 是球 O 的直径, 若平面 $SCA \perp$ 平面 SCB , $SA = AC$, $SB = BC$, 三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 9, 则球 O 的表面积为 ▲ .

263. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $AB \perp BC$, $AB = BC = 2$, $SA = SC = 2\sqrt{2}$, 二面角 $S-AC-B$ 的余弦值是 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则三棱锥 $S-ABC$ 的外接球表面积是 ()

- (A) 6π (B) 8π (C) 12π (D) 18π

264. 如图 4.68, 在平面四边形 $ABCD$ 中, 满足 $AB = BC$, $CD = AD$, 且 $AB + AD = 10$, $BD = 8$, 沿着 BD 把 ABD 折起, 使点 A 到达点 P 的位置, 且使 $PC = 2$, 则三棱锥 $P-BCD$ 体积的最大值为 ()

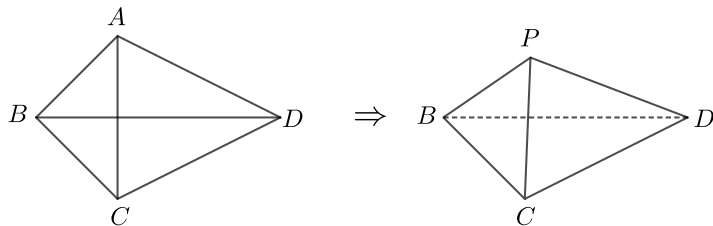


图 4.68

- (A) 12 (B) $12\sqrt{2}$ (C) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{16}{3}$

定义 4.2: 双半径单交线

若两平面相互垂直, 且在两平面内各自凸多边形的外接圆半径分别为 R_1, R_2 , 两平面外接圆公共弦长为 L , 则由两平面凸多边形顶点连接而成的凸多面体的外接球半径

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{L^2}{4}$$

例 4.36 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的顶点都在球 O 的表面上, 底面 $ABCD$ 是矩形, $AB = 2AD = 4$, 平面 PAD 垂直底面 $ABCD$, $\triangle PAD$ 为等边三角形, 则球 O 的表面积为 ()

- (A) $\frac{32\pi}{3}$ (B) 32π (C) 64π (D) $\frac{64\pi}{3}$

解 根据题意 $R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{4}{3} + 5 - \frac{4}{4} = \frac{16}{3}$. 选 D.

例 4.37 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle ABC, \triangle PBC$ 为等边三角形, 侧面 $PBC \perp$ 底面 ABC , $AB = 4\sqrt{3}$, 则该三棱锥外接球的表面积为 .

解 根据题意 $R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{L^2}{4} = 16 + 16 - \frac{48}{4} = 20$, 故答案为 80π .

例 4.38 已知直角梯形 $ABCD$, $AB \perp AD$, $CD \perp AD$, $AB = 2AD = 2CD = 2$, 沿 AC 折叠成三棱锥, 当三棱锥体积最大时, 此时三棱锥外接球的体积为 .

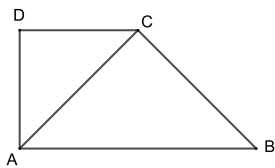


图 4.69

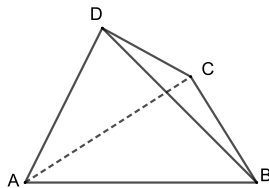


图 4.70

解 如图 4.70 所示, 折成直二面角时体积最大. 所以 $R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi$.

例 4.39 已知 $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的直角三角形, P 为平面 ABC 外一点, 且平面 $PBC \perp$ 平面 ABC , $BC = 3$, $PB = 2\sqrt{2}$, $PC = \sqrt{5}$, 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 .

解 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R_1 , $\triangle PBC$ 的外接圆半径为 R_2 , 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径 $R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{BC^2}{4} = \frac{9}{4} + \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{5}{2}$, 所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 10\pi$.

例 4.40 现有一副斜边长相等的直角三角板, 若将它们的斜边 AB 重合, 其中一个三角板沿斜边折起形成三棱锥 $A-BCD$, 如图 4.71 所示, 已知 $\angle DAB = \frac{\pi}{6}$, $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, 三棱锥的外接球的表面积为 4π , 则三棱锥的体积的最大值为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{24}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{48}$

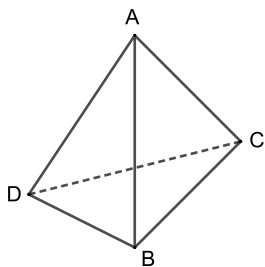


图 4.71

解 易知外接球的直径为 $AB = 2$, 由等体积法可知 $V_{A-BCD} = V_{C-ABD}$, 所以当点 C 到面 ABD 的距离最远时, 三棱锥的体积有最大值, 此时面 $CAB \perp$ 面 DAB , 故

$$V_{A-BCD} = V_{C-ABD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BD \cdot \frac{1}{2} AB = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{6}. \text{ 故选 B.}$$

变式训练 EXERCISES

265. 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 都是边长为 1 的正三角形, 则当三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大时, 其外接球的表面积为 .

266. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \perp AB$, $AB \parallel CD$, $AB = BC = 2$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, 将 $\triangle BCD$ 沿 BD 折起得到一个三棱锥 $C-ABD$, 且有面 $BCD \perp$ 面 ABD , 若该三棱锥的四个顶点均在同一球面上, 则此球的表面积为 ()

- (A) 12π (B) $\frac{28\pi}{3}$ (C) 14π (D) $\frac{20\pi}{3}$

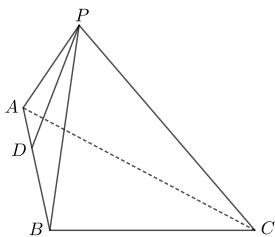


图 4.72

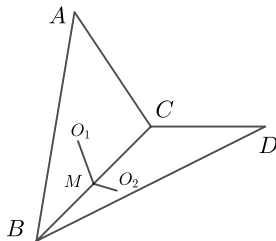


图 4.73

267. 如图 4.72 所示, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BC$, $AB = 3$, $BC = 2$, 点 P 在平面 ABC 内的投影 D 恰好落在 AB 上. 且 $AD = 1$, $PD = 2$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 ()

- (A) 9π (B) 10π (C) 12π (D) 14π

定理 4.3: 任意二面角引发外接球

记 $A-BC-D$ 二面角为 θ , O_1 为 $\triangle ABC$ 的外心, O_2 为 $\triangle DBC$ 的外心, M 为 BC 的中点, 记 $O_1M = m$, $O_2M = n$, $\angle O_1MO_2 = \theta$, $BC = l$, 则四面体 $ABCD$ 外接球半径满足

$$R^2 = \frac{l^2}{4} + \frac{m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (4.1)$$

例 4.41 如图 4.74, 已知二面角 $P-AB-C$ 的大小为 120° , 且 $\angle PAB = \angle ABC = 90^\circ$, $AB = AP$, $AB + BC = 6$, 若点 P, A, B, C 都在同一个球面上, 则该球的表面积的最小值为 ()

- (A) 45π (B) $\frac{288\pi}{7}$ (C) $\frac{14\pi}{7}$ (D) $\frac{72\pi}{7}$

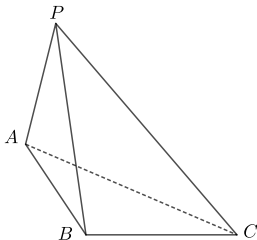


图 4.74

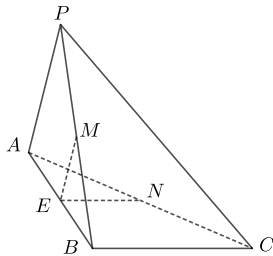


图 4.75

解 M, N, E 分别为各自线段的中点, 对照公式 (4.1), 则 $m = ME$, $n = EN$, $\angle MEN = \theta = 120^\circ$, 依题意

$$2m + 2n = 6 \Rightarrow m + n = 3 \quad (4.2)$$

所以

$$\begin{aligned}
 R^2 &= \frac{(2m)^2}{4} + \frac{m^2 + n^2 + mn}{\frac{3}{4}} \\
 &= m^2 + \frac{m^2 + (3-m)^2 + m(3-m)}{\frac{3}{4}} \\
 &= m^2 + \frac{4}{3}(m^2 - 3m + 9) \\
 &= \frac{7}{3}m^2 - 4m + 12
 \end{aligned}$$

故当 $m = \frac{6}{7}$ 时, R^2 有最小值 $\frac{22}{7}$, 该球的表面积的最小值为 $\frac{288\pi}{7}$. 选 B.

定义 4.3: 球心

如图 4.76 所示, 过球截面所得圆的圆心且与该面垂直的所有直线的交点即为球心. 【也就是说几何体的外接球球心即为过几何体任意两个面外接圆圆心的垂线的交点】.

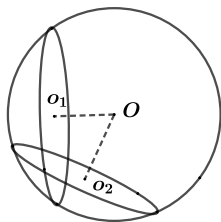


图 4.76

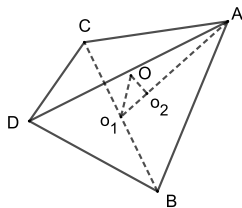


图 4.77

例 4.42 已知三棱锥 $A-BCD$ 中, $\triangle ABC$ 为等边三角形, $AB = 2\sqrt{3}$, $\angle BDC = 90^\circ$, 二面角 $A-BC-D$ 的大小为 150° , 则该三棱锥外接球的表面积为 ()

- (A) 7π (B) 12π (C) 16π (D) 28π

解 如图 4.77 所示, 设 O_1, O_2 分别为 $\triangle ABC, \triangle DBC$ 的外心, O 为外接球球心, 根据题意

$$\left. \begin{aligned} \angle O_1 O O_2 &= 30^\circ \\ O_1 O_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow O O_1 = \sqrt{3}, \text{ 在 Rt}\triangle O O_1 A \text{ 中, } R^2 = O A^2 = O O_1^2 + A O_1^2 = 3 + 4 = 7. \text{ 选 D.}$$

例 4.43 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, PAB 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形, $ABCD$ 为矩形, $AD = 2$, $PC = PD = \sqrt{22}$, 若四棱锥 $P-ABCD$ 的顶点均在球 O 的球面上, 则球 O 的表面积为 .

解 如图 4.78, 过矩形 $ABCD$ 对角线的交点 H 作矩形 $ABCD$ 所在面的垂线, 过正三角形 PAB 的重心 G 作三角形 PAB 所在面的垂线, 两线交于点 O , 此即球心, 连接 PG 并延长, 交 AB 于 E , 连接

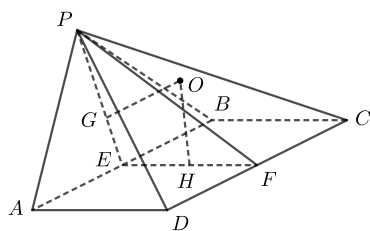


图 4.78

EH 并延长, 交 DC 于 F , 连接 PF , 易知点 E, F 分别为 AB, DC 的中点,

$\because PD = \sqrt{22}, DF = \sqrt{3}, \therefore PF = \sqrt{19}$, 在 $\triangle PEF$ 中, 由余弦定理可得

$$\cos \angle PEF = \frac{PE^2 + EF^2 - PF^2}{2PE \cdot EF} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle PEF = 120^\circ$$

所以 $GH = OH = OG = \sqrt{3}$, $\because AH = 2, \therefore R = OA = \sqrt{7}$, 于是 $S = 4\pi R^2 = 28\pi$.

答案为 28π .

两种特殊外接球

- 对棱相等的四面体的外接球其实就是一个长方体的外接球, 如图 4.79 所示. 其中 $AB = CD, AD = BC, AC = BD$.
- 正四面体外接球其实就是一个正方体的外接球, 如图 4.80 所示.

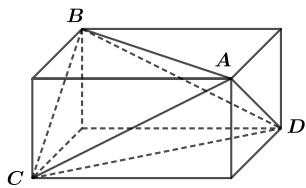


图 4.79

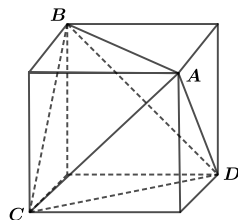


图 4.80

例 4.44 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 2\sqrt{2}, BC = 3$, 且 $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 以 BD 为折痕, 将 $\triangle BDC$ 折起, 使点 C 到达点 E 处, 且满足 $AE = AD$, 则三棱锥 $E-ABD$ 的外接球的表面积为 .

解 依题意, 此三棱锥可以补成长方体, 设长方体的长、宽、高分别为 a, b, c , 则

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 9 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 8 \end{cases} \quad (4.5)$$

则 $a^2 + b^2 + c^2 = 13$, 即 $2R = \sqrt{13}$, 所以 $R = \frac{\sqrt{13}}{2}$, 于是三棱锥 $E-ABD$ 的外接球的表面积为 13π .

锥体外接球

若锥体的母线长为 l , 高为 h , 则其外接球半径 $R = \frac{l^2}{2h}$.

4.4.2 过球内一点截面圆面积的最值

过球 O 内一点 E 的截面圆面积的最值: 当截面过球心 O 时面积最大, 这个很好理解, 当球心 O 与点 E 的连线与截面圆垂直且点 E 为截面圆圆心时, 截面圆面积最小, 如图 4.81.

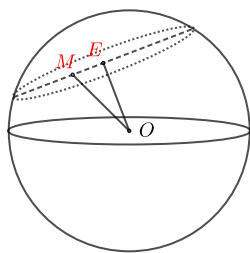


图 4.81

例 4.45 已知三棱锥 $A-BCD$, $AB = BC = BD = CD = AD = 4$, 二面角 $A-BD-C$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 点 E 在棱 AB 上, 且 $BE = 3AE$, 过 E 作三棱锥 $A-BCD$ 外接球的截面, 则所作截面面积的最小值为 ()

(A) $\frac{10\pi}{3}$

(B) 3π

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) π

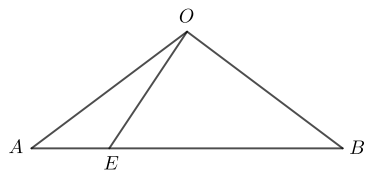


图 4.82

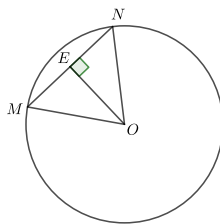


图 4.83

解 由二面角 $A-BD-C$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 可知该四面体为正四面体, 其外接球半径

$R = \frac{\sqrt{6}}{4} \times 4 = \sqrt{6}$, 设外接球球心为 O , 在 $\triangle OAB$ 中, 易知 $\cos B = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 再由余弦定理可知 $OE^2 = 3$, 所以在 $\text{Rt}\triangle OEN$ 中, $EN^2 = ON^2 - OE^2 = 6 - 3 = 3$, 故所作截面面积的最小值为 $S = \pi r^2 = 3\pi$. 选 B.

变式训练 EXERCISES

268. 已知正三棱锥 $A-BCD$, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 3$, 点 E 在棱 BD 上, 且 $BD = 3BE$, 过 E 作三棱锥 $A-BCD$ 外接球的截面, 则所作截面面积的最小值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

269. 正四面体 $ABCD$ 的棱长为 4, E 为棱 AB 的中点, 过点 E 作此正四面体的外接球的截面, 则截面面积的最小值是 $(\quad)$

(A) 4π (B) 8π (C) 12π (D) 16π

4.4.3 外接球估算

外接球估算

- 选项倒着算能求出外接球半径.
- 外接球直径一定大于等于几何体的任一棱、任一高.

例 4.46 直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $CD \perp AD$, $AB = 2AD = 2CD = 2$, 沿 AC 将此梯形折叠成三棱锥, 当三棱锥体积最大时, 此时三棱锥外接球的体积为 $(\quad)$

(A) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ (B) $\frac{4\pi}{3}$ (C) 3π (D) 4π

解 由选项 A 倒着计算, 可知 $2R = \sqrt{3}$, 由选项 B 倒着计算, 可知 $2R = 2$, 由选项 C, D 倒着计算, 无法得到半径, 又外接球的直径一定大于等于几何体的棱, 排除 A, 选 B.

例 4.47 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的各顶点都在同一球面上, 底面正方形的边长为 $\sqrt{2}$, 若该正四棱锥的体积为 2, 此时外接球的体积为 $(\quad)$

(A) $\frac{124\pi}{3}$ (B) $\frac{625\pi}{81}$ (C) $\frac{500\pi}{81}$ (D) $\frac{256\pi}{9}$

解 由选项 A, B, D 倒着计算, 无法得到半径, 故选 C.

例 4.48 三棱锥 $P-ABC$ 的各顶点都在同一球面上, $AB = BC = \sqrt{15}$, $AC = 6$, $PC \perp$ 平面 ABC , $PC = 2$, 此时外接球的表面积为 $(\quad)$

(A) $\frac{25\pi}{3}$ (B) $\frac{25\pi}{2}$ (C) $\frac{83\pi}{3}$ (D) $\frac{83\pi}{2}$

解 若以最长棱 AC 为直径, 此时外接球表面积为 36π , 而选项中大于等于 36π 的只有 D.

例 4.49 点 A, B, C, D 在同一球的球面上, $AB = BC = AC = \sqrt{3}$, 若四面体 $ABCD$ 体积的最大值为 $\sqrt{3}$, 则外接球的表面积为 $(\quad)$

- (A) $\frac{169\pi}{16}$ (B) $\frac{289\pi}{16}$ (C) $\frac{25\pi}{16}$ (D) 8π

解 四面体 $ABCD$ 体积的最大值为 $\sqrt{3}$, 则以 D 为顶点的三棱锥的高的最大值为 4, 因为几何体外接球表面积必大于以高为直径的外接球表面积 16π , 而选项中大于 16π 的只有 B.

例 4.50 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=BC=AC=PA=PB=2$, 且平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , 则三棱锥外接球的体积为 ()

- (A) $\frac{20\pi}{3}$ (B) $\frac{20\sqrt{15}\pi}{27}$ (C) $\frac{5\sqrt{15}\pi}{27}$ (D) $\frac{5\sqrt{15}\pi}{9}$

解 由选项 A, B, C, D 倒着计算, 得到 $R_A^3 = 5$, $R_B^3 = \frac{15\sqrt{15}}{27} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{15}}{3}$, $R_C^3 = \frac{15\sqrt{15}}{108}$, $R_D^3 = \frac{15\sqrt{15}}{36}$. 只有选项 B 能求出半径. 故选 B.

例 4.51 已知正三棱锥 $S-ABC$ 的侧棱长为 $4\sqrt{3}$, 底面边长为 6, 则该正三棱锥外接球的体积是 ()

- (A) 16π (B) $\frac{64}{3}\pi$ (C) 64π (D) $\frac{256}{3}\pi$

解 $\because$ 几何体外接球直径大于等于几何体的任意一条棱, $\therefore 2R \geq 4\sqrt{3}$, $\therefore R^3 \geq 24\sqrt{3}$, $\therefore \frac{4}{3}\pi R^3 \geq \frac{96\sqrt{3}}{3}\pi$, 排除 AB, 而对于选项 C, $\frac{4}{3}\pi R^3 = 64\pi \Rightarrow R^3 = 48$, 无法求出 R , 排除 C, 而对于选项 D, $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{256}{3}\pi \Rightarrow R^3 = 64 \Rightarrow R = 4$. 故选 D.

注 对于选项 A, $\frac{4}{3}\pi R^3 = 16\pi \Rightarrow R^3 = 12$, 无法求出 R , 排除 A,
对于选项 B, $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{64}{3}\pi \Rightarrow R^3 = 16$, 无法求出 R , 排除 B.

例 4.52 如图 4.84, 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面为等腰梯形, $AB \parallel CD$, $AD=CD=BC=1$, $AB=SA=2$, $SA \perp$ 平面 $ABCD$, 则四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球体积为 ()

- (A) 8π (B) $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$ (C) $8\sqrt{2}\pi$ (D) $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

解 通过球的体积公式对四个选项进行计算求出外接球半径 R , A、 $R^3 = 6$ B、 $R^3 = 2\sqrt{2}$, C、 $R^3 = 6\sqrt{2}$, D、 $R^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 只有选项 B 能解出 R , 故选 B.

例 4.53 三棱锥 $A-BCD$ 的顶点都在同一个球面上, 满足 BD 过球心 O , 且 $BD = 2\sqrt{2}$, 则三棱锥

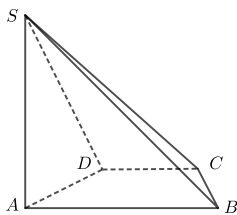


图 4.84

$A-BCD$ 体积的最大值为 ▲ ; 三棱锥 $A-BCD$ 体积最大时, 平面 ABC 截球所得的截面圆的面积为 ▲ .

解 易知 $AB^2 + AD^2 = 8$, 由基本不等式可知当 $AB = AD$ 时 $\text{Rt}\triangle ABD$ 面积有最大值 2, 由于 $\text{Rt}\triangle ABD$ 所在的面为大圆, 所以三棱锥 $C-ABD$ 的高 h 小于等于球半径 $\sqrt{2}$, 故

$$V_{\max} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot h \leq \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

易知当三棱锥 $A-BCD$ 体积最大时, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 其外接圆半径为

$$r = \frac{2}{2 \sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ 故 } S = \pi r^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

答案为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

例 4.54 已知三棱锥 $D-ABC$ 的外接球半径为 2, 且球心为线段 BD 的中点, 则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为 ()

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{4}{3}$

(C) $\frac{8}{3}$

(D) $\frac{16}{3}$

解 易知 $AB^2 + AC^2 = 16$, 由基本不等式可知当 $AB = AC$ 时 $\text{Rt}\triangle ABC$ 面积有最大值 4, 由于 $\text{Rt}\triangle ABC$ 所在的面为大圆, 所以三棱锥 $D-ABC$ 的高 h 小于等于球半径 2, 故

$$V_{\max} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h \leq \frac{8}{3}. \text{ 答案为 C.}$$

4.5 异面直线的夹角

定理 4.4: 异面直线夹角

- 平移, 构造三角形.
- 异面直线夹角公式或三余弦定理.
- 补型法: 把空间几何图形补成熟悉的几何体.

定理 4.5: 异面直线夹角公式

如图 4.85 所示, 空间四边形 $ABCD$ 的两条异面直线 AC 与 BD 夹角为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{|(AB|^2 + |CD|^2) - (|AD|^2 + |BC|^2)|}{2 \cdot |AC| \cdot |BD|}$$

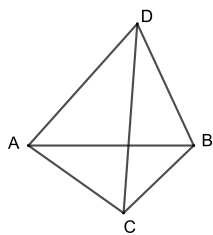


图 4.85

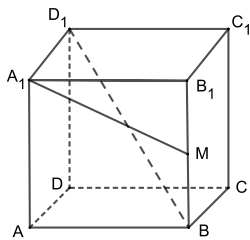


图 4.86

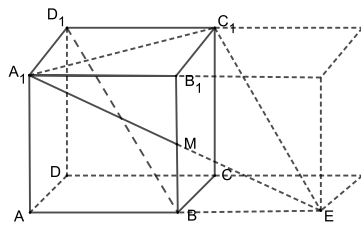


图 4.87

例 4.55 如图 4.86 所示, 在正方体中, M 为 BB_1 的中点, 则异面直线 A_1M 与 BD_1 所成角的余弦值为 .

解 如图 4.87 所示, 采用补型法, 给右边补一个正方形, 答案: $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

例 4.56 如图 4.88 所示, 在直三棱柱中, 求异面直线 AC 与 BD 所成角的余弦值.

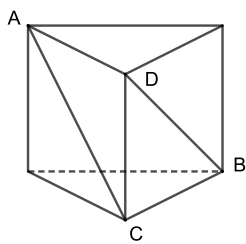


图 4.88

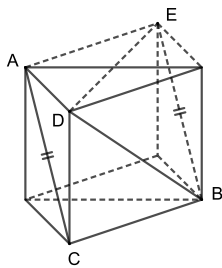


图 4.89

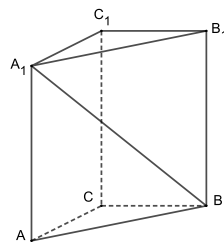


图 4.90

解 如图 4.89 所示, 采用补型法, 把直三棱柱补成直四棱柱.

例 4.57 如图 4.90 所示, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AA_1 = 2$, $AC = BC = 1$, 则异面直线 A_1B 与 AC 所成角的余弦值为 .

解 补型法或异面直线夹角公式可得答案为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

例 4.58 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 1$, $AD = 2$, $AA_1 = 3$, 则异面直线 A_1B_1 与 AC_1 所成角的余弦值为 ()

(A) $\frac{\sqrt{14}}{14}$

(B) $\frac{8\sqrt{3}}{14}$

(C) $\frac{\sqrt{13}}{13}$

(D) $\frac{1}{3}$

解 平移即可, 选 A.

例 4.59 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = 2$, $BC = CC_1 = 1$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 ()

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

(C) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解 如图 4.91 所示, 易知 $\begin{cases} BC_1 = \sqrt{2} \\ AB_1 = \sqrt{5} \\ AC_1 = \sqrt{8} \end{cases}$, 所以 $\cos \langle \overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{AB_1} \rangle = \frac{|(AB^2 + B_1C_1^2) - (AC_1^2 + BB_1^2)|}{2AB_1 \cdot BC_1}$

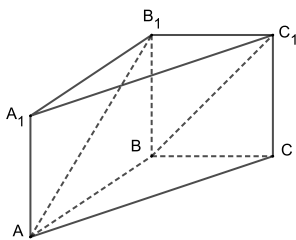
$$= \frac{|4 + 1 - 8 - 1|}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$


图 4.91

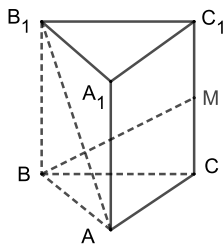


图 4.92

例 4.60 如图 4.92 所示, 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的各棱长都相等, M 是侧棱 CC_1 的中点, 则异面直线 AB_1 与 BM 所成角的大小为 .

解 设棱长为 1, 则 $\cos \theta = \frac{|(AB^2 + B_1M^2) - (AM^2 + BB_1^2)|}{2 \cdot AB_1 \cdot BM} = \frac{|1 + \frac{5}{4} - \frac{5}{4} - 1|}{2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2}} = 0.$

例 4.61 已知正四棱锥 $S - ABCD$ 的侧棱长与底面边长都相等, E 是 SB 的中点, 则异面直线 AE 与 SD 所成角的余弦值为 ()

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(D) $\frac{2}{3}$

解 利用异面直线夹角公式, 选 C.

例 4.62 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle ABP$ 是等边三角形, 底面 $ABCD$ 是矩形, 二面角 $P-AB-C$ 是直二面角, $AB = 2\sqrt{3}$, 若四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的表面积为 20π , 则异面直线 PA 与 BD 所成角的余弦值为 ()

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

(B) $-\frac{5}{8}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(D) $\frac{5}{8}$

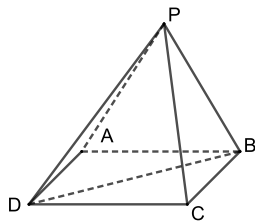


图 4.93

解 依题意, 如图 4.93 所示, 设矩形 $ABCD$ 的外接圆半径为 R_1 , 利用本书第 208 页定义双半径单交线可知 $5 = R_1^2 + 4 - \frac{12}{4} \Rightarrow R_1 = 2$,

所以 $BC = 2$, 再由二面角 $P-AB-C$ 是直二面角易知 $PD = 4$, 由异面直线夹角公式可知

$$\cos\langle PA, BD \rangle = \frac{|(PB^2 + AD^2) - (PD^2 + AB^2)|}{2 \cdot PA \cdot BD} = \frac{|12 + 4 - 16 - 12|}{2 \times 2\sqrt{3} \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

例 4.63 在正四面体 $A-BCD$ 中, P 是 AB 的中点, Q 是直线 BD 上的动点, 则直线 PQ 与 AC 所成角可能为 ()

(A) $\frac{\pi}{12}$

(B) $\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{5\pi}{12}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

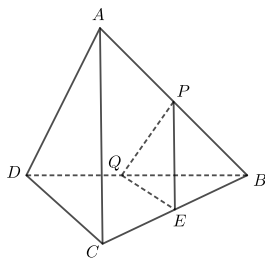


图 4.94

解 如图, 取 BC 中点 E , 连接 EQ , 又 $PE \parallel AC$, 则直线 PQ 与 AC 所成角即 $\angle EPQ$, 由最小角定理可知 $\angle EPQ$ 的最小值即 PE 与平面 ABD 的线面角, 即 AC 与平面 ABD 的线面角, 易知在正四面体中, AC 与平面 ABD 的线面角的余弦值为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 令线面角为 θ , 估值可知

$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}$, 又 $\angle EPQ \geq \theta$, 排除 A, B 选项;

又由 $QP = QE$, 知三角形 QPE 为等腰三角形, 于是 $\angle EPQ < \frac{\pi}{2}$, 排除 D 选项, 故选 C.

4.6 动态求解一组变式立体几何题

笛卡儿说过:“我们解决的每一个问题,都将成为一个范例,用于解决其他问题.”因此,在习题教学(特别是立体几何习题教学)中,教师要利用典型习题引导学生并亲身经历如何从一个问题演变成一类问题.一题多用、多题重组.引导学生运用运动变化的观点,“动态”分析处理,能唤起学生的好奇心和求知欲,激发学生思维源泉,使学生获得解题愉快、自由,在陶醉数学、享乐数学的同时.举一反三,触类旁通.

例 4.64 已知异面直线 a 与 b 所成的角是 50° , P 为空间的一点,则过 P 与 a, b 所成的角都是 30° 的直线有且仅有 ()

(A) 1 条

(B) 2 条

(C) 3 条

(D) 4 条

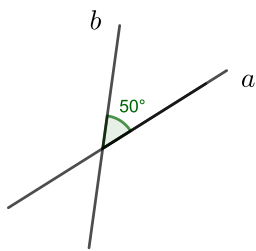


图 4.95

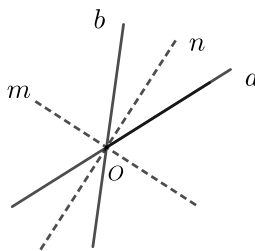


图 4.96

解 如图 4.96, 分别构造 a, b 夹角的角平分线 m, n , 把 m, n 分别绕点 O 上下旋转, 若点 P 在旋转中的 m 上, 则过 P 与 a, b 所成的等角范围是 $[65^\circ, 90^\circ]$, 故不存在 30° , 若点 P 在旋转中的 n 上, 过 P 与 a, b 所成的等角范围是 $[25^\circ, 90^\circ]$, 存在 30° , 故过 P 与 a, b 所成的角都是 30° 的直线有且仅有 2 条, 选 B.

例 4.65 直线 $l \subset$ 平面 α , 经过 α 外一点 A 与 l, α 都成 30° 角的直线有且仅有 ()

(A) 1 条

(B) 2 条

(C) 3 条

(D) 4 条

解 如图 4.97, 由线面成定角我们可以构造轴截面顶角为 120° 的等腰三角形的圆锥, 此时线即为圆锥母线, 过圆心 O 作 $BC \parallel l$, 交圆锥底面圆与 B, C 两点, AB, AC 即为所求的两条直线, 故选 B.

例 4.66 过正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A 作直线, 使与直线 AD_1 所成的角为 30° , 且与平面 C_1D_1C 所成的角为 60° , 则这样的直线的条数是 ()

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

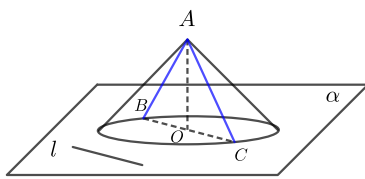


图 4.97

分析 利用圆锥.

解 B.

例 4.67 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A_1 作直线 l , 使 l 与平面 BB_1D_1D 和直线 BC_1 所成的角为 45° , 则这样的直线的条数是 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

解 A.

例 4.68 【多选】如图 4.98, 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 3, D, E, F, G 分别在棱 A_1B_1, A_1C_1, AB, AC 上, 且 $A_1D = A_1E = BF = CG$, H 是 BC 的中点, P 是 A_1H 的中点, 则 ()

(A) $DE \parallel$ 平面 PFH

(B) 若 M, N 分别是平面 A_1ABB_1 和 A_1ACC_1 内的动点, 则 $\triangle MNP$ 周长的最小值为 $\frac{9}{4}$

(C) 若 $BF = \frac{1}{3}AB$, 过 P, F, G 三点的平面截三棱柱所得截面的面积为 $\frac{3\sqrt{39}}{4}$

(D) 过点 A 且与直线 AA_1 和 BC 所成的角都为 45° 的直线有 2 条

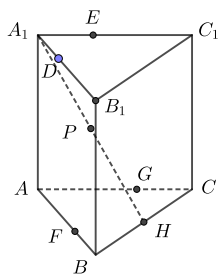


图 4.98

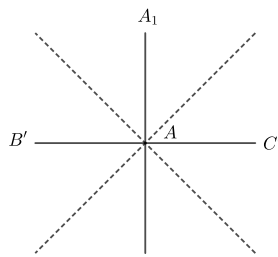


图 4.99

解 选项 A: 可知 DE 在平面 PFH 内, 故 **✗**;

选项 B: 平面 A_1ABB_1 和 A_1ACC_1 所成的锐二面角为 60° , 点 P 到平面 A_1ABB_1 和 A_1ACC_1 的距离均为 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$, 分别作点 P 关于平面 A_1ABB_1 和 A_1ACC_1 的对称点 M, N , 易证当 M, N 分别取直线 M_1N_1 与平面 A_1ABB_1 和 A_1ACC_1 的交点时, $\triangle MNP$ 周长最短, 且这个周长的最小值为 $\frac{9}{4}$. 故 $\checkmark$;

选项 C: 由 A 选项可知, D, E 在过 P, F, G 三点的平面中, 截面面积为 $\frac{3\sqrt{39}}{4}$. 故 $\checkmark$;

选项 D: 易知 $AA_1 \perp BC$, 平移直线 BC 过点 A , 记为直线 $B'C'$, 如图 4.99 所示, 可知直线有 2 条. 故 $\checkmark$.

故选 BCD.

4.7 三余弦、三正弦定理

定理 4.6: 三余弦定理

又叫最小角定理: 如图 4.100, 设 A 为平面 α 上一点, 过 A 的斜线 AO 在平面 α 上的射影为 AB , AC 为平面 α 上的一条直线, 那么 $\angle OAC, \angle BAC, \angle OAB$ 三角的余弦关系为: $\cos \angle OAC = \cos \angle BAC \cdot \cos \angle OAB$ 【 $\angle BAC$ 和 $\angle OAB$ 只能是锐角】.

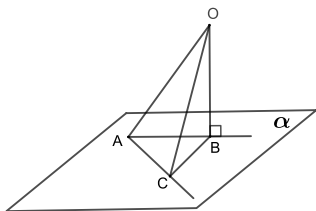


图 4.100

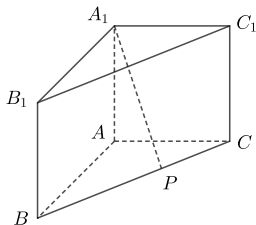


图 4.101

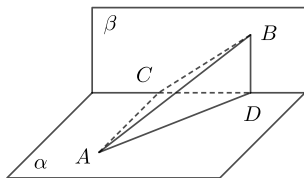


图 4.102

注 斜线与平面所成角是斜线与平面内所有直线所成角中最小的角.

例 4.69 如图 4.101, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, P 是棱 BC 上的动点, 记直线 A_1P 与平面 ABC 所成的角为 θ_1 , 与直线 BC 所成的角为 θ_2 , 则 θ_1, θ_2 的大小关系是 ()

- (A) $\theta_1 = \theta_2$ (B) $\theta_1 > \theta_2$ (C) $\theta_1 < \theta_2$ (D) 不能确定

解 因为 θ_1 是线面角, θ_2 是线线角, 由最小角定理知 $\theta_1 \leq \theta_2$, 又 BC 不是 A_1P 在底面的射影, 故 $\theta_1 < \theta_2$, 选 C.

例 4.70 如图 4.102, 已知直二面角 $\alpha-l-\beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, 设直线 AB 与 α, β 所成的角分别为 θ_1, θ_2 , 则 ()

- (A) $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$ (B) $\theta_1 + \theta_2 \geq 90^\circ$ (C) $\theta_1 + \theta_2 \leq 90^\circ$ (D) $\theta_1 + \theta_2 < 90^\circ$

解 过点 A, B 分别作交线 l 的垂线, 垂足为 C, D , 则 $\angle BAD = \theta_1$, $\angle ABC = \theta_2$, 由最小角定理知 $\theta_1 \leq \angle BAC$, 又 $\angle BAC + \theta_2 = 90^\circ$, 所以 $\theta_1 + \theta_2 \leq 90^\circ$, 选 C.

例 4.71 a, b 为空间中两条互相垂直的直线, 等腰直角 $\triangle ABC$ 的直角边 AC 所在的直线与 a, b 都垂直, 斜边 AB 以直角边 AC 为旋转轴旋转, 则下列结论正确的有 ▲ .

- ① 当直线 AB 与 a 成 60° 角时, AB 与 b 成 30° 角.
 ② 当直线 AB 与 a 成 60° 角时, AB 与 b 成 60° 角.
 ③ 直线 AB 与 a 所成角的最小值为 45° .
 ④ 直线 AB 与 a 所成角的最小值为 60° .

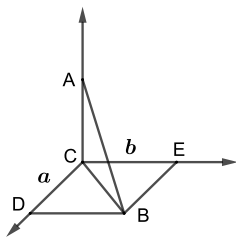


图 4.103

解 作 $BD \perp a$, $BE \perp b$, 若直线 AB 与 a 成 60° 角, 即 $\angle ABE = 60^\circ$. 由三余弦定理

$$\cos \angle ABE = \cos \angle ABC \cdot \cos \angle CBE \Rightarrow \cos \angle CBE = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle CBE = 45^\circ$$

同理可得 $\angle ABD = 60^\circ$, 所以 ② ✓.

又因为 $\cos \angle ABE = \cos \angle ABC \cdot \cos \angle CBE = \cos 45^\circ \cdot \cos \angle CBE \leq \cos 45^\circ$. 所以 $\angle ABE \geq 45^\circ$, 所以 ③ ✓.

定理 4.7: 三正弦定理

又叫最大角定理: 如图 4.104 所示, 设二面角 $M-AB-N$ 的度数为 α , 在平面 M 上有一条射线 AC , 它和棱 AB 所成角为 β , 和平面 N 所成的角为 γ , 则 $\sin \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta$. (二面角是线面角中最大的角.)

例 4.72 设二面角 $\alpha-CD-\beta$ 的大小为 45° , $A \in \alpha$, $B \in CD$, $\angle ABC = 45^\circ$, 则 AB 与平面 β 所成角的大小为 ▲ .

解 30° .

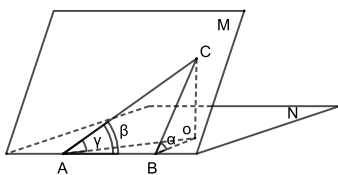


图 4.104

4.8 直棱柱截取后几何体体积

直三棱柱截取后几何体体积

如图 4.105, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 被一平面所截, 得截面 $\triangle A_2B_2C_2$, 且 $AA_2 = h_1$, $BB_2 = h_2$, $CC_2 = h_3$, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 则介于截面与下底面之间的几何体体积为

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot (h_1 + h_2 + h_3)$$

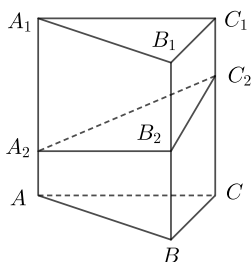


图 4.105

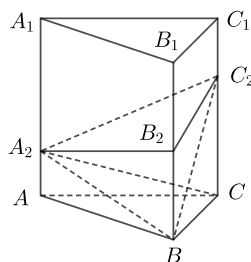


图 4.106

证 如图 4.106, 连接 A_2B , BC_2 , A_2C , 则 $V_{A_2-ABC} = \frac{1}{3}Sh_1$, 由等体积变换知

$$V_{A_2-B_2BC_2} = V_{A-B_2BC_2} = V_{A-B_2BC} = V_{B_2-ABC} = \frac{1}{3}Sh_2$$

同理

$$V_{A_2-BCC_2} = V_{A-BCC_2} = V_{C_2-ABC} = \frac{1}{3}Sh_3$$

故

$$V_{A_2B_2C_2-ABC} = \frac{1}{3}Sh_1 + \frac{1}{3}Sh_2 + \frac{1}{3}Sh_3 = \frac{1}{3} \cdot S \cdot (h_1 + h_2 + h_3)$$

推论 4.1. 直 n 棱柱截体的体积为 $V = \frac{S}{n} \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_n)$, 其中 h_i 是所求几何体的侧棱长.

例 4.73 如图 4.107, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形, $EF \parallel AB$ 且 $EF = \frac{3}{2}$, EF 与面 AC 的距离是 2, 则多面体体积为 ()

- (A) $\frac{9}{2}$ (B) 5 (C) 6 (D) $\frac{15}{2}$

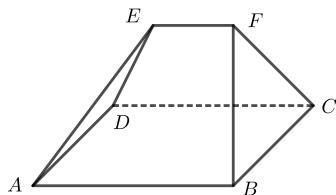


图 4.107

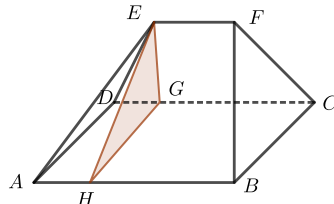


图 4.108

解法一 如图 4.108, 作垂直于底面的平面 EGH , 易知 $\triangle EGH$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$, 则多面体体积为

$$V = \frac{1}{3} \times 3 \times \left(3 + 3 + \frac{3}{2} \right) = \frac{15}{2}$$

故选 D.

解法二 易知四棱锥 $E-ABCD$ 的体积为 $V_{E-ABCD} = 6$, 而多面体体积一定大于 6, 故选 D.

变式训练 EXERCISES

270. 如图 4.109, 在多面体 $ABC-DEF$ 中, 已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形且 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BCF$ 均为正三角形, $EF \parallel AB$, $EF = 2$, 则该多面体体积为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$

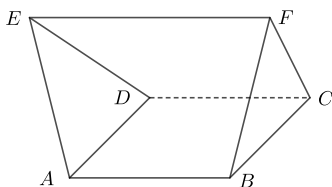


图 4.109

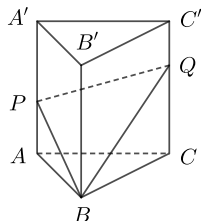


图 4.110

271. 如图 4.110, 直三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的体积为 V , P , Q 分别是侧棱 AA' , CC' 上的点, 且 $AP = C'Q$, 则四棱锥 $B-APQC$ 的体积为 ()

(A) $\frac{V}{2}$

(B) $\frac{V}{3}$

(C) $\frac{V}{4}$

(D) $\frac{V}{5}$

4.9 共面向量定理处理截面

定理 4.8: 共面向量定理

如果两个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不共线, 则向量 $\vec{p}$ 与向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共面的充要条件是存在唯一有序实数对 (x, y) , 使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

例 4.74 如图 4.111, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 AB 的中点, F 是 CC_1 的中点, 则过 D_1, E, F 三点的截面图形的周长为 ()

(A) $\frac{1}{12}(25 + 2\sqrt{13} + 9\sqrt{5})$

(B) $\frac{1}{12}(15 + 4\sqrt{13} + 9\sqrt{5})$

(C) $\frac{1}{12}(25 + 2\sqrt{13} + 6\sqrt{5})$

(D) $\frac{1}{12}(15 + 4\sqrt{13} + 6\sqrt{5})$

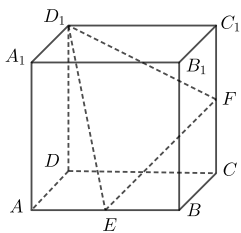


图 4.111

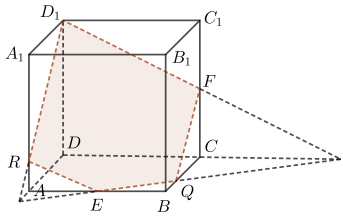


图 4.112

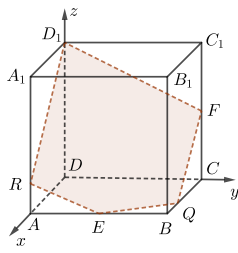


图 4.113

解 建立如图 4.113 所示坐标系 $D-xyz$, 设平面 D_1EF 与直线 BC 的交点为 $Q(q, 1, 0)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{D_1E} = (1, \frac{1}{2}, -1) \\ \overrightarrow{D_1F} = (0, 1, -\frac{1}{2}) \\ \overrightarrow{D_1Q} = (q, 1, -1) \end{cases}, \text{ 由于 } \overrightarrow{D_1Q}, \overrightarrow{D_1E}, \overrightarrow{D_1F} \text{ 共面, 由共面定理可知, 存在唯一的实数 } \lambda, \mu,$$

使得

$$\overrightarrow{D_1Q} = \lambda \overrightarrow{D_1E} + \mu \overrightarrow{D_1F}$$

$$\text{代入坐标有 } \begin{cases} q = \lambda \\ 1 = \frac{1}{2}\lambda + \mu \\ -1 = -\lambda - \frac{1}{2}\mu \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = q = \frac{2}{3}. \text{ 所以 } Q \text{ 点坐标为 } (\frac{2}{3}, 1, 0).$$

类似地, 可以求得平面 D_1EF 与直线 AA_1 的交点为 $R(1, 0, \frac{1}{4})$, 经计算可知选 A.

例 4.75 如图 4.114, 在正四面体 $ABCD$ 中, P 是线段 AB 上靠近 A 的三等分点, Q 是线段 AD 上靠近 D 的三等分点, R 是线段 CD 的中点, 作截面 PQR , 交线段 BC 于点 S , 则 $BS = \underline{\quad\triangle\quad} BC$.

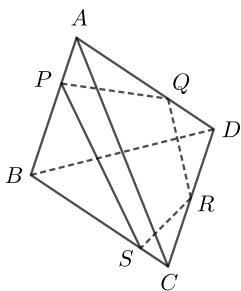


图 4.114

$$\text{解 令 } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} \\ \overrightarrow{AC} = \mathbf{c} \\ \overrightarrow{AD} = \mathbf{d} \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{d} \\ \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{QD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\mathbf{c} - \frac{1}{6}\mathbf{d} \end{cases}$$

由于 $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ 共面, 由共面定理可知, 存在唯一的实数 λ, μ , 使得

$$\overrightarrow{PS} = \lambda \overrightarrow{PQ} + \mu \overrightarrow{QR} = -\frac{1}{3}\lambda \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mu \mathbf{c} + \left(\frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{6}\mu\right) \mathbf{d} \quad (4.6)$$

记 $\overrightarrow{BS} = x\overrightarrow{BC}$, 则

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{PB} + x(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \left(\frac{2}{3} - x\right) \mathbf{b} + x\mathbf{c} \quad (4.7)$$

$$\text{由 (4.6), (4.7) 知 } \begin{cases} \frac{2}{3} - x = -\frac{1}{3}\lambda \\ x = \frac{1}{2}\mu \\ 0 = \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{6}\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2}{5} \\ \mu = \frac{8}{5} \\ x = \frac{4}{5} \end{cases}. \text{ 于是 } BS = \frac{4}{5}BC.$$

第五章 三角函数

三角函数题型有选择填空和解答题,难度上相对容易,一般位于中档题,只要大家掌握好三角函数公式,利用公式化简解析式并求性质,三角函数类问题就能解决.

三角函数高考题型虽然不难,但内容却比较丰富,如包含三角函数的图象与性质、三角函数恒等变化、诱导公式等等.因此,我们学习三角函数,一定要特别注意对它的化简、计算以及证明的恒等变形的方法的积累与应用.

5.1 万能公式

定理 5.1: 万能公式

$$(1) \sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}, \quad (2) \cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}, \quad (3) \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}.$$

证 (1) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \xrightarrow{\text{分子分母同除以 } \cos^2 \theta} \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta};$

$$(2) \cos 2\theta = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \xrightarrow{\text{分子分母同除以 } \cos^2 \theta} \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta};$$

$$(3) \tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}.$$

例 5.1 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $2 \sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1$, 则 $\sin \alpha =$ ()

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解法一 原式可化为 $4 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha \Rightarrow 2 \sin \alpha = \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 故选 B.

解法二 利用万能公式 $\begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 故选 B.

变式训练 EXERCISES

272. 已知 $\frac{\tan \alpha}{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{2}{3}$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\hspace{1cm}}$.

273. 若 $\tan \alpha = 2$, 则 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) =$ ()

- (A) $\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ 或 $-\frac{4}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

274. 已知 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -3$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

- (A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $-\frac{4}{5}$ (D) $-\frac{4\sqrt{5}}{5}$

275. 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$, 且 α 是第一象限角, 则 $\tan \frac{\alpha}{2} =$ ()

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$ (D) 2 或 3

276. 已知 $\frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha - 2 \cos \alpha} = 5$, 则 $\cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha =$ ()

- (A) $-\frac{2}{5}$ (B) 3 (C) -3 (D) $\frac{2}{5}$

277. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos 2\alpha = 2 \sin 2\alpha - 1$, 则 $\sin \alpha =$ ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

278. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, $2 \sin \alpha + \cos \alpha = 1$, 则 $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} =$ ()

- (A) $-\frac{24}{25}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) -7 (D) $-\frac{1}{7}$

5.2 和差化积公式

$$\begin{cases} \sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \sin \theta - \sin \varphi = 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} \cos \theta + \cos \varphi = 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2} \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} \cos \varphi - \cos \theta = -2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2} \end{cases} \quad (5.4)$$

证 我们只证前两个：引入两角和与差公式

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & (5.5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta & (5.6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & (5.7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta & (5.8) \end{cases}$$

(5.5) + (5.6) 得

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad (5.9)$$

(5.5) - (5.6) 得

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \quad (5.10)$$

换元，令 $\alpha + \beta = \theta$, $\alpha - \beta = \varphi$, 得到 $\alpha = \frac{\theta + \varphi}{2}$, $\beta = \frac{\theta - \varphi}{2}$, 于是 (5.5), (5.6) 转化为

$$\sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}, \quad \sin \theta - \sin \varphi = 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}$$

平方形式的和差化积公式

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) & (5.11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = -\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) & (5.12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) & (5.13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha - \cos^2 \beta = -\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) & (5.14) \end{cases}$$

证 证式子 (5.11), $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = (\sin \alpha + \sin \beta)(\sin \alpha - \sin \beta)$, 由和差化积公式可得

$$\begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} & (5.15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} & (5.16) \end{cases}$$

(5.15) × (5.16) 得证.

例 5.2 【2022 乙卷】在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\sin C \sin(A - B) = \sin B \sin(C - A)$, 求证: $2a^2 = b^2 + c^2$.

证 由 $\sin C \sin(A - B) = \sin B \sin(C - A)$ 可得，若 $\sin(A + B) \sin(A - B) = \sin(C + A) \sin(C - A)$, 由正弦平方差公式可得 $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 C - \sin^2 A$, 即 $2 \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$, 即 $2a^2 = b^2 + c^2$.

5.3 换元求值

例 5.3 已知 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) =$ ()

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (D) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解 令 $X = \alpha + \frac{\pi}{6}$, $Y = 2\alpha - \frac{\pi}{6}$, 则 $2X - Y = \frac{\pi}{2}$, 于是

$$\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin Y = \sin\left(2X - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2X = 1 - 2\cos^2 X = \frac{1}{3}. \text{ 选 A.}$$

变式训练 EXERCISES

279. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{4}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

- (A) $-\frac{7}{25}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{7}{25}$

280. 已知 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \underline{\quad\blacktriangle\quad}$.

281. 已知 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{5}$, 则 $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) =$ ()

- (A) $-\frac{2}{25}$ (B) $-\frac{23}{25}$ (C) $\frac{2}{25}$ (D) $\frac{23}{25}$

5.4 活用导数解三角函数

例 5.4 【2013 全国乙卷理科】 设当 $x = \theta$ 时, 函数 $f(x) = \sin x - 2\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos \theta = \underline{\quad\blacktriangle\quad}$.

解 令 $f'(x) = \cos x + 2\sin x$, 依题设得 $f'(\theta) = 0$, 即 $\cos \theta + 2\sin \theta = 0$, 又 $\sin \theta - 2\cos \theta = \sqrt{5}$, 于是 $\cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

例 5.5 已知 $2\sin \alpha + \cos \alpha = -\sqrt{5}$, 则 $\tan \alpha = \underline{\quad\blacktriangle\quad}$.

解 令 $f(x) = 2\sin x + \cos x = \sqrt{5}\sin(x + \varphi)$, 由 $2\sin \alpha + \cos \alpha = -\sqrt{5}$, 知 $f(x)$ 在 $x = \alpha$ 处取得最小值, 于是 $f'(\alpha) = 2\cos \alpha - \sin \alpha = 0$, 从而 $\tan \alpha = 2$.

例 5.6 如果函数 $y = \sin 2x + a\cos 2x$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 对称, 则 $a = \underline{\quad\blacktriangle\quad}$.

解 求导得 $y' = 2\cos 2x - 2a\sin 2x$, 于是 $y'\big|_{x=-\frac{\pi}{8}} = 2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2a\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow a = -1$.

例 5.7 已知函数 $f(x) = \sin 2x$, 若 $f(x+t)$ 为偶函数, 则 t 的取值集合为 $\underline{\quad\blacktriangle\quad}$.

解 $\left\{t \mid t = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

例 5.8 已知函数 $f(x) = \sin(x + \theta) + \sqrt{3} \cos(x - \theta)$ ($\theta \in [0, \pi]$) 为偶函数, 则 $\theta = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 因 $f(x)$ 是偶函数, 其图象关于 y 轴对称, 即直线 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的对称轴, 于是对 $f(x)$ 求导, 得 $f'(x) = \cos(x + \theta) - \sqrt{3} \sin(x - \theta)$, 从而 $f'(0) = 0$, 即

$$\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \xrightarrow{\theta \in [0, \pi]} \theta = \frac{5\pi}{6}$$

例 5.9 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$, 若 $f(x) \leq \left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(\pi)$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间是 ()

(A) $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$

(B) $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$

(C) $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$

(D) $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$

解 由 $f(x) \leq \left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 可知 $\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 为函数的最大值, 结合函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ 的图形特征, 易知 $x = \frac{\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 的极值点, 即

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z}) \quad (5.17)$$

又

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(\pi) \Rightarrow \sin(\pi + \varphi) > \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi < 0 \quad (5.18)$$

由以上两式可得 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{6}$, 其中 k 为奇数,

所以 $f(x) = \sin\left(2x + k\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 当 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,

即 $k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f(x)$ 单调递增, 故选 C.

例 5.10 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x)$ ($\omega > 0$) 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 则 $\omega =$ ()

(A) 3

(B) 2

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\frac{2}{3}$

解 依题意 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \omega \cos \frac{\pi\omega}{3} = 0 \Rightarrow \frac{\pi\omega}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{3}{2} + 3k (k \in \mathbf{Z})$, 故选 C.

变式训练 EXERCISES

282. 已知 $\frac{3}{5} \sin \theta + \frac{4}{5} \cos \theta = 1$, 则 $\tan \theta = \underline{\hspace{1cm}}$.

5.5 简单的平移

例 5.11 要得到函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只要将函数 $y = \sin 2x$ 的图象 ()

(A) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度(B) 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度(C) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度(D) 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

解 令两个函数都等于 1, 解出各自的 x .
$$\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{12} \end{cases}, \frac{\pi}{4} \mapsto \frac{\pi}{12} \text{ 相当于往左}$$

平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度.

例 5.12 要得到函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 只要将函数 $y = \cos 2x$ 的图象 ()

(A) 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度(B) 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度(C) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度(D) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

解 令两个函数都等于 1, 解出各自的 x .
$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases}, 0 \mapsto \frac{\pi}{3} \text{ 相当于向右平}$$

移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度.

变式训练 EXERCISES

283. 为了得到函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象, 只要将函数 $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$ 的图象 ()

(A) 向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度(B) 向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度(C) 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度(D) 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

284. 为了得到函数 $y = -2\cos 2x$ 的图象, 只需把函数 $y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$ 的图象 ()

(A) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度(B) 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度(C) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度(D) 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

285. 已知直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 是 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 图象的一条对称轴, 为了得到函数 $y = f(x)$ 的图象, 只需把函数 $y = \sin 2x$ 的图象 ()

(A) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度(B) 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度(C) 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度(D) 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

286. 要得到函数 $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y = 2 \cos 2x$ 的图象 ()

- (A) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度 (B) 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
(C) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 (D) 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

5.6 单调性与 ω 的关系

周期内单调

若函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T , 且 $f(x)$ 在 $[-\theta_1, \theta_2]$ ($\theta_1, \theta_2 > 0$) 上单调递增, 则 $\frac{T}{4} \geq \max\{\theta_1, \theta_2\}$.

例 5.13 已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = 2 \sin \omega x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数, 则 ω 的取值范围是 .

解 依题意, $\frac{2\pi}{4\omega} \geq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega \leq \frac{3}{2}$, 又 $\omega > 0$, 于是答案为 $0 < \omega \leq \frac{3}{2}$.

例 5.14 【2012 新课标 I 卷】已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, 则 ω 的取值范围为 ()

- (A) $[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$ (B) $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ (C) $(0, \frac{1}{2}]$ (D) $(0, 2]$

解法一 依题意, 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} < \omega x + \frac{\pi}{4} < \pi\omega + \frac{\pi}{4}$, 又函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, 则 $\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, 解得 $0 < \omega \leq 2$, 从而 $\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4}$, $\pi\omega + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4}$, 进而可得 $\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{2}$ 且 $\pi\omega + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$, 解得 $\frac{1}{2} \leq \omega \leq \frac{5}{4}$. 选 A.

解法二 依题意, 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} < \omega x + \frac{\pi}{4} < \pi\omega + \frac{\pi}{4}$, 又函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, 则 $\begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \geq \pi\omega + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \omega \geq 4k + \frac{1}{2} \\ \omega \leq 2k + \frac{5}{4} \end{cases}$, 所以 $4k + \frac{1}{2} < 2k + \frac{5}{4}$, 解得 $k < \frac{3}{8}$, 又 $\omega > 0$, 所以 $k = 0$, 于是 $\frac{1}{2} \leq \omega \leq \frac{5}{4}$. 选 A.

例 5.15 【2016 天津文】已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2}$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围为 ()

- (A) $(0, \frac{1}{8}]$ (B) $(0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{5}{8}, 1)$ (C) $(0, \frac{5}{8}]$ (D) $(0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]$

解法一 依题意, 化简 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\omega x - \frac{\pi}{4})$, 当 $x \in (\pi, 2\pi)$ 时, $\omega\pi - \frac{\pi}{4} < \omega x - \frac{\pi}{4} < 2\omega\pi - \frac{\pi}{4}$, 又

函数 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 $2\pi - \pi < \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, 解得 $0 < \omega < 1$, 从而 $\omega\pi - \frac{\pi}{4} > -\frac{\pi}{4}$,

$$2\omega\pi - \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4}, \text{ 进而可得 } \begin{cases} \omega\pi - \frac{\pi}{4} > -\frac{\pi}{4} \\ 2\omega\pi - \frac{\pi}{4} \leq 0 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} \omega\pi - \frac{\pi}{4} > 0 \\ 2\omega\pi - \frac{\pi}{4} \leq \pi \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} \omega\pi - \frac{\pi}{4} \geq \pi \\ 2\omega\pi - \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4} \end{cases}, \text{ 解得}$$

$$\omega \in (0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}], \text{ 选 D.}$$

解法二 依题意, 化简 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\omega x - \frac{\pi}{4})$, 当 $x \in (\pi, 2\pi)$ 时, $\omega\pi - \frac{\pi}{4} < \omega x - \frac{\pi}{4} < 2\omega\pi - \frac{\pi}{4}$, 又

$$\text{函数 } f(x) \text{ 在区间 } (\pi, 2\pi) \text{ 内没有零点, 则 } \begin{cases} \omega\pi - \frac{\pi}{4} \geq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2\omega\pi - \frac{\pi}{4} \leq k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \omega \geq k + \frac{1}{4} \\ \omega \leq \frac{k}{2} + \frac{5}{8} \end{cases}, \text{ 所以}$$

$$k + \frac{1}{4} < \frac{k}{2} + \frac{5}{8}, \text{ 解得 } k < \frac{3}{4}, \text{ 又 } \omega > 0, \text{ 所以 } k = 0 \text{ 或 } k = -1,$$

当 $k = 0$ 时, $\omega \in [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]$, 当 $k = -1$ 时, $\omega \in (0, \frac{1}{8}]$, 综上得 $\omega \in (0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]$, 选 D.

推论 5.1. (1) 正余弦函数的任意两个零点之差或任意两个最值点之差为 $\frac{kT}{2}$;

(2) 正余弦函数的任意两个最小值点之差或任意两个最大值点之差为 kT ;

(3) 正余弦函数的任意最小值点与最大值点之差为 $\frac{T}{2} + kT = \frac{(2k+1)T}{2}$;

(4) 正余弦函数的任意一个零点与最值点之差为 $\frac{T}{4} + \frac{kT}{2} = \frac{(2k+1)T}{4}$.

例 5.16 【2016 新课标 I 卷】函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$), $x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点,

$x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y = f(x)$ 图象的对称轴, 且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 单调, 则 ω 的最大值为 ()

(A) 11

(B) 9

(C) 7

(D) 5

解 依题意知: $\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = (2k+1) \cdot \frac{T}{4}$, 解得 $\omega = 2k+1$, 又 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 单调, 所以

$$\frac{5\pi}{36} - \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{12} \leq \frac{T}{2}, \text{ 所以 } T \geq \frac{\pi}{6}, \text{ 从而可得 } \omega \leq 12.$$

当 $\omega = 11$ 时, $T = \frac{2\pi}{11}$, 由于 $\frac{\pi}{4} - T = \frac{3\pi}{44} \in (\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$, 故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 不单调,

当 $\omega = 9$ 时, $T = \frac{2\pi}{9}$, 由于 $\frac{\pi}{4} - T = \frac{\pi}{36} \notin (\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$, 故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 单调, 故选 B.

5.7 线性正余弦函数

推论 5.2. 对于函数 $f(x) = a|\sin x| + b|\cos x|$, 其中 a, b 为非零实数.

- (1) 若 $a = b$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$;
- (2) 若 $a \neq b$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 π .

变式训练 EXERCISES

287. 函数 $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$ 的最小正周期为 ▲ .

288. 函数 $f(x) = |\sin x| + 2|\cos x|$ 的最小正周期为 ▲ .

第六章 解三角形

解三角形是近几年高考的重点考查内容,而且经常以大题的形式出现,有时候也会在选择题和填空题中考查.

6.1 三角形解的个数

1. 已知三角形的任意两个角与一边,用正弦定理,只有一解;
2. 已知三角形的任意两边与其中一边的对角 (SSA).
 - 当角 A 为锐角时,画出钟摆图;
 - ① $a = b \sin A$, 一解;
 - ② $b \sin A < a < b$, 两解;
 - ③ $a \geq b$, 一解;
 - 当角 A 为直角或钝角时,满足大角对大边,一解;不满足就无解.
3. 已知三边,用余弦定理,有解时,只有一解;
4. 已知两边及夹角,用余弦定理,必有一解;

6.2 常考性质

充要条件

- 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A > \sin B \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow a > b$.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos 2A < \cos 2B \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow a > b$.

例 6.1 $\triangle ABC$ 中, “ $A > B$ ” 是 “ $\cos 2B > \cos 2A$ ” 的 ()

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

解 $\cos 2B > \cos 2A \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 B > 1 - 2\sin^2 A \Leftrightarrow \sin A > \sin B \Leftrightarrow A > B$, 故选 C.

锐角三角形不等式

- $\sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C$.
- $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C > \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.
- $\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C > 1$.
- 其中一个角的 $\sin$ 一定大于另一个角的 $\cos$.

例 6.2 已知奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上单调递减, α, β 为锐角三角形两内角, 则 ()

- (A) $f(\cos \alpha) > f(\cos \beta)$ (B) $f(\sin \alpha) > f(\sin \beta)$ (C) $f(\sin \alpha) > f(\cos \beta)$ (D) $f(\sin \alpha) < f(\cos \beta)$

解 $\because$ 在锐角三角形中, $\sin \alpha > \cos \beta$, $\therefore$ 由单调性可知 $f(\sin \alpha) < f(\cos \beta)$, 选 D.

变式训练 EXERCISES

289. 在 $\triangle ABC$ 中, $p: \triangle ABC$ 是锐角三角形, $q: \sin A > \cos C$, 则 p 是 q 的 ()

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 及不充分也不必要条件

定理 6.1: 射影定理

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 则有如下结论:

- $a \cos B + b \cos A = c$;
- $a \cos C + c \cos A = b$;
- $c \cos B + b \cos C = a$.

例 6.3 【2008 全国】 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a \cos B - b \cos A = \frac{3}{5}c$, 则 $\frac{\tan A}{\tan B} = \underline{\quad \Delta \quad}$.

解 由题及射影定理 $\begin{cases} a \cos B - b \cos A = \frac{3}{5}c \\ a \cos B + b \cos A = c \end{cases} \therefore a \cos B = \frac{4}{5}c, b \cos A = \frac{1}{5}c$, 即

$$\begin{cases} 2R \sin A \cos B = \frac{4}{5}c \\ 2R \sin B \cos A = \frac{1}{5}c \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} 2R \sin A \cos B = \frac{4}{5}c \\ 2R \sin B \cos A = \frac{1}{5}c \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\frac{(6.1)}{(6.2)} \text{ 得 } \frac{\tan A}{\tan B} = 4.$$

推论 6.1. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = c \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 且 $C = 90^\circ$.

例 6.4 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $2c \cos B = 2a + b$, 则 $C = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 由射影定理 $2c \cos B = 2a + b \Leftrightarrow 2c \cos B = 2c \cos B + 2b \cos C + b \Leftrightarrow \cos C = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{2\pi}{3}$.

例 6.5 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\sin 2C = \sqrt{3} \cos 2C + \sqrt{3}$, $c \cos B + b \cos C = 2\sqrt{2}$, 则 $\triangle ABC$ 面积的取值范围为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

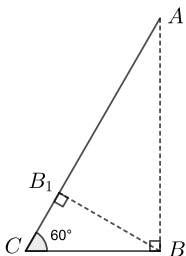


图 6.1

解 由射影定理知 $a = 2\sqrt{2}$, 再由辅助角公式可知角 $C = \frac{\pi}{3}$, 如图所示, 当 $\triangle ABC$ 底为 BC 时, 高的最大值为 $AB = 2\sqrt{6}$, 此时 $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$; 当 $\triangle ABC$ 斜边为 BC 时, $\triangle ABC$ 的面积最小为 $\sqrt{3}$, 故 $\triangle ABC$ 面积的取值范围为 $(\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$.

变式训练 EXERCISES

- 290.** 三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $3b \cos C = c(1 - 3 \cos B)$, 则 $\sin C : \sin A =$ ()
- (A) 2 : 3 (B) 4 : 3 (C) 3 : 1 (D) 3 : 2

- 291.** 三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $a \sin B \cos C + c \sin B \cos A = \frac{1}{2}b$ 且 $a > b$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $b = 1$, BC 边上的中线 AM 的长为 $\frac{1}{2}a$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

6.3 面积周长最值

定理 6.2: 定边定角面积最大值

已知在 $\triangle ABC$ 中, 设 $\angle ABC = \alpha$, 边 $AC = m$, 则 $\triangle ABC$ 面积最大值为 $\frac{m^2}{4} \cdot \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}}$.

证 如图 6.2 所示, 已知三角形的一条边 AC 的长度及其对角 $\angle ABC$ 的大小, 则三角形的面积的最大值求法我们借助其外接圆 O , 由图易知只有当 B 点在线段 AC 的中垂线上时三角形的高最大, 因此面积也最大, (计算时利用正弦定理求出外接圆半径).

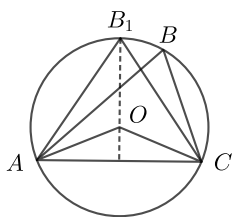


图 6.2

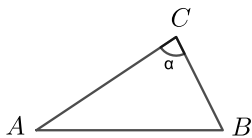


图 6.3

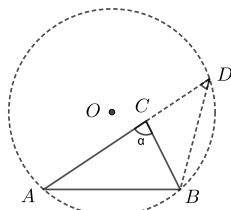


图 6.4

定理 6.3: 定边定角周长最大值

已知 $\triangle ABC$ 的角 $\angle ACB = \alpha$, $AB = m$, 则 $\triangle ABC$ 周长最大值为 $\frac{m}{\sin \frac{\alpha}{2}} + m$.

解 在 AC 的延长线上截取 $CD = CB$, 则 $CA + CB = AD$, 连接 BD , 则 $\angle D = \frac{1}{2}\alpha$, 作 $\triangle ABD$ 的外接圆 $\odot O$, 设半径为 R , 可知 $\frac{AB}{\sin \angle D} = 2R \Rightarrow \frac{m}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2R$, $\therefore AD \leq 2R$, $\therefore AD \leq \frac{m}{\sin \frac{\alpha}{2}}$,
 $\therefore CA + CB + AB \leq \frac{m}{\sin \frac{\alpha}{2}} + m$.

例 6.6 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 且 $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$.

(1) 求角 C 的值;

(2) 若 $c = 2$, 求 $a + b$ 的取值范围.

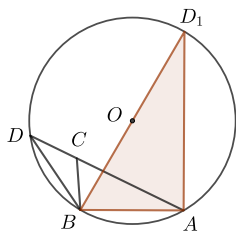


图 6.5

解 依题意由余弦定理易知

$$(1) C = \frac{\pi}{3};$$

(2) 如图 6.5, 延长 AC 至 D , 使得 $CD = CB$, 即 $a + b = AD$, 连接 DB , 则 $\angle D = \frac{\pi}{6}$, 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理可知 $\frac{c}{\sin \angle D} = 2r$, 其中 r 为 $\triangle ABD$ 的外接圆半径, 所以 AD 的最大值为 $2r = 4$, 再由三角形两边之和大于第三边可知 $a + b > c = 2$, 故 $a + b$ 的取值范围为 $(2, 4]$.

注 如图 6.3 所示, 已知三角形的一条边 AB 的长度及其对角 $\angle C$ 的大小, 则三角形三条边的线性组合的最值利用正弦定理以及辅助角公式解决.

定理 6.4: 邻边定角面积取值范围

由正弦定理以及正切取值范围可得.

例 6.7 在锐角 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 且 $4 \sin A \cos^2 A - \sqrt{3} \cos(B+C) = \sin 3A + \sqrt{3}$.

- (1) 求角 A 的大小;
- (2) 若 $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

解法一

(1) 依题意

$$\begin{cases} \cos(B+C) = -\cos A & (6.3) \\ \sin 3A = \sin(2A+A) = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A & (6.4) \\ \sin 2A = 2 \sin A \cos A & (6.5) \end{cases}$$

将以上三式代入已知等式, 得

$$2 \sin 2A \cos A + 3 \cos A = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A + \sqrt{3}$$

$$\text{整理得 } \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 易知 $B \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得

$$\frac{2}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{2 \sin C}{\sin B} = \frac{2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\tan B} + 1$$

$$\therefore c \in (1, 4), \text{ 于是 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} c \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3}\right).$$

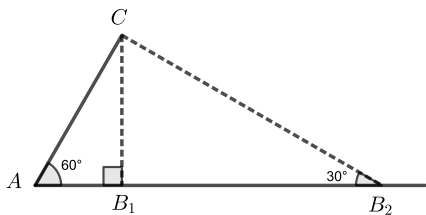


图 6.6

解法二

(1) 同上;

(2) 直角三角形是临界点, 如图 6.6, 于是当 A 和 b 固定时, $\triangle AB_1C$ 的面积最小, 为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\triangle AB_2C$ 的面积最大, 为 $2\sqrt{3}$, 故 $S_{\triangle ABC} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3}\right)$.

变式训练 EXERCISES

292. 已知函数 $f(x) = 4 \sin x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, 在锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $f(A) = 2\sqrt{3}$.

(1) 求 A 的大小;

(2) 若 $a = 2\sqrt{3}$, 求三角形 ABC 面积的最大值.

293. 三角形 ABC 中 $B = 60^\circ$, $b = \sqrt{3}$, 求 $2a + c$ 的最大值.

294. 锐三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = \sqrt{3}$, $A = 60^\circ$, 则三角形 ABC 周长的取值范围是 ()

- (A) $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ (B) $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$ (C) $(3 - \sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ (D) $(3 + \sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$

295. 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $\sqrt{3}a = \sqrt{3}b \cos C - c \sin B$.

(1) 求 B 的大小;

(2) 若 $b = 2\sqrt{3}$, AD 为 BC 边上的中线, 当 $\triangle ABC$ 的面积取得最大值时, 求 AD 的长.

296. 已知 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 $R = 2$, 且 $2\sqrt{3} \cos^2 \frac{A}{2} = \sin A$, 则 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 ()

- (A) $(2\sqrt{3}, 4]$ (B) $(4, 4\sqrt{3}]$ (C) $(4\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}]$ (D) $(4 + 2\sqrt{3}, 6\sqrt{3}]$

6.4 线段比中构造相似

例 6.8 如图 6.7, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 且 $DC = 2BD$, $AB : AD : AC = 3 : k : 1$, 则实数 k 的取值范围为 .

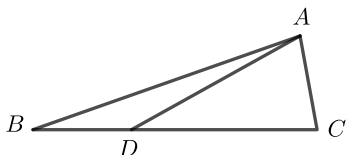


图 6.7

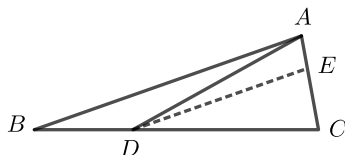


图 6.8

解 如图 6.8, 过 D 作 AB 的平行线交 CA 于 E , 则 $DE = 2$, $AE = \frac{1}{3}$, 在三角形中任意两边之和大于第三边, 两边之差的绝对值小于第三边得

$$2 - \frac{1}{3} < |AD| < 2 + \frac{1}{3} \Rightarrow k \in \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3} \right]$$

例 6.9 如图 6.9, 点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 上, 且 $CD = 3AD$, $BD = \sqrt{2}$, $\cos \frac{\angle ABC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$, 则 $3AB + BC$ 的最大值为 .

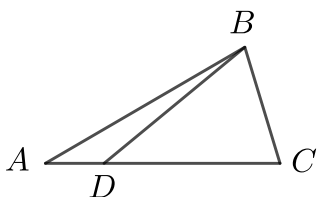


图 6.9

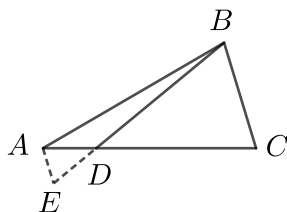


图 6.10

解 如图 6.10, 过 A 作 BC 的平行线交 BD 的延长线于 E , 则 $\triangle BDC \sim \triangle EDA$, 且相似比为 $3 : 1$, 所以问题转化为求 $3AB + BC = 3(AB + AE)$ 的最大值.

依题意 $\cos \frac{\angle ABC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4} \Rightarrow \cos \angle ABC = \frac{1}{4}$, 由三角形相似可知 $\cos \angle BAE = -\frac{1}{4}$,

在 $\triangle BAE$ 中由余弦定理可知

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2 \cdot AB \cdot AE \cos \angle BAE \Rightarrow \frac{32}{9} = AB^2 + AE^2 + \frac{1}{2} AB \cdot AE$$

从而

$$\frac{32}{9} = AB^2 + AE^2 + \frac{1}{2}AB \cdot AE = (AB + AE)^2 - \frac{3}{2}AB \cdot AE \geq (AB + AE)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{AB + AE}{2}\right)^2$$

$$\text{即 } \frac{32}{9} \geq \frac{5}{8}(AB + AE)^2$$

$$\therefore 3AB + BC = 3(AB + AE) \leq \frac{16\sqrt{5}}{5}.$$

当且仅当 $BC = 3AB$ 时, $3AB + BC$ 的最大值为 $\frac{16\sqrt{5}}{5}$.

例 6.10 如图 6.11, 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos \angle BAC = \frac{1}{4}$, 点 D 在线段 BC 上且 $BD = 3DC$, $AD = \frac{\sqrt{15}}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 ()

(A) $3\sqrt{2}$

(B) 4

(C) $\sqrt{15}$

(D) $2\sqrt{3}$

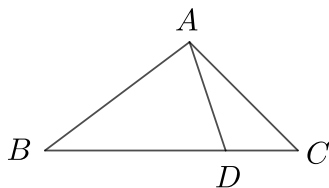


图 6.11

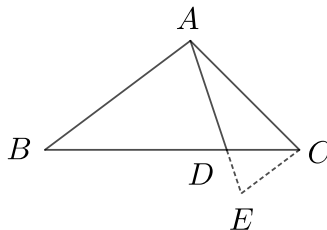


图 6.12

解 如图 6.12, 延长 AD 到 E , 使得 $AD = 3DE$, 则 $\triangle ABD \sim \triangle ECD$. 则 $\cos \angle ACE = -\frac{1}{4}$, $AB = 3CE$, 设 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 在 $\triangle ACE$ 中运用余弦定理

$$AE^2 = CA^2 + CE^2 - 2 \times CA \cdot CE \cdot \cos \angle ACE \iff 120 = 18b^2 + 2c^2 + 3bc$$

运用基本不等式 $120 \geq 15bc$, 当且仅当 $c = 3b$ 时等号成立.

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A \leq \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \sqrt{15}. \text{ 选 C.}$$

变式训练 EXERCISES

297. 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $\cos 2A + \cos 2B + 2 \sin A \sin B = 1 + \cos 2C$.

(1) 求角 C ;

(2) 若 D 为 AB 边的中点, $\triangle ABC$ 的面积为 2, 求 CD^2 的最小值.

298. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB}$, $AM = 1$, 则 $AC + 2AB$ 的最大值是 .

6.5 三角形中的二倍角

三角形中的二倍角

$\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $B = 2A$, 则:

- $\cos A = \frac{b}{2a}$;
- $b^2 = a(a + c)$.

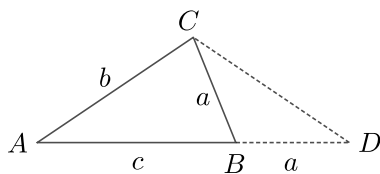


图 6.13

证 依题意

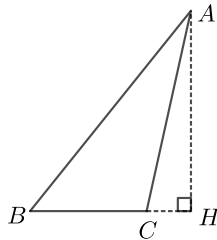
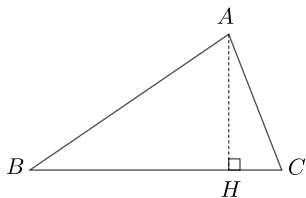
- $B = 2A \Rightarrow \sin B = \sin 2A = 2 \sin A \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\sin B}{2 \sin A} = \frac{b}{2a}$;
- 辅助线如图 6.13, 易知 $\angle A = \angle D \Rightarrow CD = CA$, 且 $\triangle DBC \sim \triangle DCA$ (即“子母型”) 可得 $DC^2 = DB \cdot DA \Leftrightarrow b^2 = a(a + c)$.

例 6.11 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $a = 4, C = 2B$.

- (1) 若 $b = 2$, 求 c ;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 求 $\tan B$.

解 依题意

- (1) 若 $a = 4, C = 2B, b = 2$, 则 $c^2 = b(b + a) \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$;



- (2) ① 若 C 为锐角, 过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H , 设 BC 边上的高为 h , 易知 $h = \sqrt{3}$, 设 $BH = x$, $HC = 4 - x$, 则 $\tan B = \frac{h}{x}, \tan C = \frac{h}{4 - x}$, 又 $\tan C = \tan 2B = \frac{2 \tan B}{1 - \tan^2 B}$, 即
$$\frac{h}{4 - x} = \frac{2 \cdot \frac{h}{x}}{1 - \left(\frac{h}{x}\right)^2}, \text{ 解得 } x = 3, \text{ 故 } \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

② 若 C 为钝角, 过 A 作 $AH \perp BC$ 的延长线于 H , 设 $CH = x$, $AH = h = \sqrt{3}$, 则

$$\tan B = \frac{h}{4+x}, \quad \tan(\pi - C) = \frac{h}{x} = -\tan C, \quad \text{依题可得 } -\frac{h}{x} = \frac{2 \cdot \frac{h}{4+x}}{1 - \left(\frac{h}{4+x}\right)^2}, \quad \text{化简得}$$

$$1 + \frac{2x}{4+x} - \frac{3}{(4+x)^2} = 0, \quad \text{而 } x > 0, \therefore x \text{ 无解.}$$

$$\text{综上所述, } \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 6.12 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 边上一点, $AB = AD = 4$, $AC = 6$, 若 $\triangle ABC$ 的外心 O 恰好在线段 BD 上, 则 $BC = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

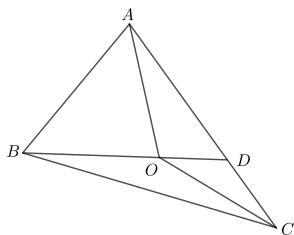


图 6.14

解 由三角形外心性质及外角定理可得

$$\begin{aligned} \angle ACB &= \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} (\angle ADB + \angle DAO) \\ &= \frac{1}{2} (\angle ABD + \angle DAO) = \frac{1}{2} (\angle BAO + \angle DAO) \\ &= \frac{1}{2} \angle BAC \end{aligned}$$

即 $A = 2C$, 故 $a^2 = c(c+b) = 40$, 于是 $BC = a = 2\sqrt{10}$.

变式训练 EXERCISES

299. 锐角三角形 ABC 中, $B = 2A$, 则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是 ()

- (A) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ (C) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ (D) $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

300. 锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $A = 2C$, $c = 1$, 则 $\triangle ABC$ 的周长取值范围是 ()

- (A) $(0, 2 + \sqrt{2})$ (B) $(0, 3 + \sqrt{3})$ (C) $(2 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{3})$ (D) $(2 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{3}]$

301. 三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $2\sin^2 A + \cos B = 1$, 则 $\frac{c}{b-a}$ 的取值范围是 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

302. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 a, b, c 互不相等, 并满足 $b \cos C = (2b - c) \cos B$.

(1) 求证 $A = 2B$;

(2) 若 $c = \sqrt{2}a$, 求 $\cos B$.

6.6 三角形中的等差等比

推论 6.2. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,

(1) A, B, C 成等差数列, 则 $B = \frac{\pi}{3}$;

(2) A, B, C 成等比数列, 则 $B \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$.

证 (2) A, C 可看作方程 $x^2 - (\pi - B)x + B^2 = 0$ 的两个正根, 得 $0 < B \leq \frac{\pi}{3}$.

推论 6.3. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 a, b, c 成等差数列, 则我们有

$$(1) \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}, \quad (2) B \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$$

证 依题意 $a + c = 2b$ 边角互化我们可得 $\sin A + \sin C = 2 \sin B = 2 \sin(A + C)$, 利用和差化积, 得

$$\sin A + \sin C = 2 \sin \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{A-C}{2} \quad (6.6)$$

利用二倍角公式得

$$\sin(A+C) = 2 \sin \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{A+C}{2} \quad (6.7)$$

两式合并并化简得 $\cos \frac{A-C}{2} = 2 \cos \frac{A+C}{2}$, 两边展开整理可得

$$\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$$

又

$$\tan \frac{B}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+C}{2} \right) = \frac{1}{\tan \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right)} = \frac{1 - \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2}}$$

利用基本不等式可得

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq 2 \sqrt{\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

所以 $\left(\tan \frac{B}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}$. 当且仅当 $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ 时, 等号成立. 所以 $B \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$.

例 6.13 【2016 山东】在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知

$$2(\tan A + \tan B) = \frac{\tan A}{\cos B} + \frac{\tan B}{\cos A}.$$

(1) 证明: $a + b = 2c$;

(2) 求 $\cos C$ 的最小值 ($\cos C \geq \frac{1}{2}$).

6.7 三角形著名定理

定理 6.5: 阿波罗尼斯定理

设三角形的三边长分别为 a, b, c , 中线长分别为 m_a, m_b, m_c , 则:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2m_a^2 \end{cases} \quad (6.8)$$

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = \frac{1}{2}b^2 + 2m_b^2 \end{cases} \quad (6.9)$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2m_c^2 \end{cases} \quad (6.10)$$

例 6.14 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\tan A \tan C + \tan C \tan B = 2 \tan A \tan B$.

(1) 求 $\frac{c^2}{a^2 + b^2}$ 的值;

(2) 若 $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

解

$$(1) \frac{c^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2};$$

(2) 作 $\triangle ABC$ 的中线 CD , 于是

$$CA^2 + CB^2 = 2CD^2 + 2AD^2$$

联系 (1) 可得 $CD = \sqrt{3}$, 所以点 C 在以点 D 为圆心, $\sqrt{3}$ 为半径的圆上, 故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $S_{\max} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

定理 6.6: 张角定理

如图 6.15 所示, 三角形 ABC 中, D 是 BC 上的一点, 连接 AD , 那么

$$\frac{\sin \angle CAD}{AB} + \frac{\sin \angle BAD}{AC} = \frac{\sin \angle BAC}{AD}$$

注 证明利用等面积法 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD}$.

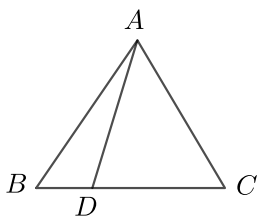


图 6.15

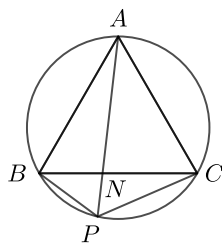


图 6.16

例 6.15 三角形 ABC 为圆内接正三角形, P 为 $\widehat{BC}$ 上任意一点, N 为 PA , BC 的交点, 求证:

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PN}.$$

证 利用张角定理

$$\frac{\sin 60^\circ}{PB} + \frac{\sin 60^\circ}{PC} = \frac{\sin 120^\circ}{PN} \Rightarrow \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PN}$$

例 6.16 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , $\angle ABC = \frac{5\pi}{6}$, D 是 AC 上的点, $\angle DBC = \frac{\pi}{6}$, 若 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, 当 BD 取到最大值时, $AC = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

解 由张角定理易知 $AC = \frac{ac}{\sqrt{3}c + a}$, 接下来运用基本不等式可知当 $a = \sqrt{3}c$ 时 BD 取到最大值. 再运用余弦定理可知答案为 $2\sqrt{7}$.

引理 6.1. 如图 6.17 所示, 三角形 ABC 中, AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线, 那么

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2 \cos \angle BAD}{AD}$$

注 利用等面积法证明.

证 依题意 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$, 即

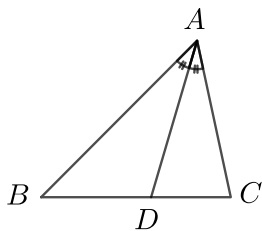


图 6.17

$AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD + AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD$. 由二倍角公式可得

$$AB \cdot AC \cdot 2 \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot AD + AC \cdot AD \quad (6.11)$$

等式两边同除以 $AB \cdot AC \cdot AD$, 得

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2 \cos \angle BAD}{AD} \quad (6.12)$$

例 6.17 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $A = \frac{\pi}{3}$, $b^2 + c^2 = 4$, $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R = 1$.

- (1) 求三角形 ABC 的面积;
- (2) 角 A 的平分线 AD 交 BC 于 D 点, 求 AD 长.

解

(1) $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R = 1$, 有 $a = 2R \sin A = \sqrt{3}$, 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 及

$$A = \frac{\pi}{3}, \quad b^2 + c^2 = 4, \quad \text{有 } bc = 1, \text{ 故三角形 } ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4};$$

(2) 由引理 6.1 知 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{AD}$, 于是 $\frac{b+c}{bc} = \frac{1}{AD} \Rightarrow b+c = \frac{1}{AD}$, 两边同时平方并整理,

$$b^2 + c^2 - 2ab = \left(\frac{1}{AD}\right)^2, \text{ 解得 } AD = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 6.18 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , 且 $BD = 1$, 则 $4a + c$ 的最小值为 .

解 由引理 6.1 知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$, 再由基本不等式知

$$4a + c = (4a + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) = 5 + \frac{c}{a} + \frac{4a}{c} \geq 9$$

例 6.19 三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC

于点 D , $BD = 2$, 则三角形 ABC 面积的最小值为 ()

- (A) $3\sqrt{3}$ (B) $4\sqrt{3}$ (C) $5\sqrt{3}$ (D) $6\sqrt{3}$

解 由引理 6.1 可知

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

所以

$$ac = 2(a + c) \geq 4\sqrt{ac} \Rightarrow ac \geq 16 \quad (6.13)$$

故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin \angle ABC \geq 4\sqrt{3}$, 故选 B.

变式训练 EXERCISES

303. 如图 6.15 所示, 三角形 ABC 中, $BD \cdot \sin B = CD \cdot \sin C$, $BD = 2DC = 2\sqrt{2}$, $AD = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 ()

- (A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) $3\sqrt{7}$

304. 过等腰三角形 ABC 底边 BC 的中点 D 任作一直线与 AB 交于 M , 与 AC 的延长线交于 N , 求证: $\frac{1}{AM}$, $\frac{1}{AB}$, $\frac{1}{AN}$ 成等差数列.

305. $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , 且 $BD = 1$, 则 $4a + c$ 的最小值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

306. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D , $AB = AD = 1$, $AC = 2$, 则 $BC = \underline{\hspace{1cm}}$; 若 O 为 $\triangle ABD$ 的外心, 则 $BO = \underline{\hspace{1cm}}$.

307. $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 已知 $4c = b + 4a \cos B$.

(1) 求 $\sin A$;

(2) 若 $c = 6$, $\angle BAC$ 的角平分线 AD 交 BC 于 D 点, 且 $AD = \sqrt{10}$, 求 b .

定理 6.7: 斯库顿定理

如图 6.18 所示, 三角形 ABC 中, AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线, 那么

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

记忆口诀: 中方 = 上积 - 下积

例 6.20 如图 6.19 所示, $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , $\cos A = \frac{1}{8}$, $c = 4$, $b = 2$, 则角平分线 $AD = \underline{\hspace{1cm}}$.

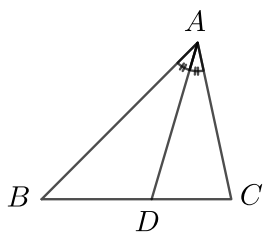


图 6.18

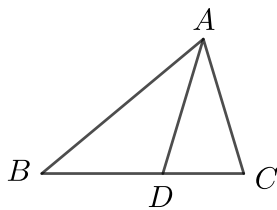


图 6.19

解 由余弦定理知 $a^2 = 18$, 再由角平分线对应成比例知 $BD = 2CD$, 设 $CD = t \Rightarrow BD \cdot CD = 2t^2$.
又 $a = BC = 3t \Rightarrow a^2 = 9t^2 \Rightarrow t^2 = 2$, 所以 $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD = 8 - 4 = 4 \Rightarrow AD = 2$.

变式训练 EXERCISES

308. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\angle BAD = \angle CAD = 30^\circ$, $2c = 3b$, 则角平分线 $AD = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

6.8 奔驰形状找正弦

例 6.21 在 ① $\sqrt{3} \sin C + \cos C = \frac{b+c}{a}$, ② $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$,

③ $2 \cos A(c \cos B + b \cos C) = a$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并作答.

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\underline{\hspace{2cm}}$

(1) 求角 A ;

(2) 若 O 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle AOC = 150^\circ$, $b = 1$, $c = 3$, 求 $\tan \angle ABO$.

解 选 ③, 研究第二问

(1) $A = 60^\circ$;

(2) $\because \angle OAC + \angle OAB = 60^\circ$, $\angle OAB + \angle ABO = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $\therefore \angle OAC = \angle ABO$,

在 $\triangle ABO$ 中, $\frac{AO}{\sin \angle ABO} = \frac{3}{\sin 120^\circ}$, $\therefore AO = 2\sqrt{3} \sin \angle ABO$.

在 $\triangle ACO$ 中, $\frac{1}{\sin 150^\circ} = \frac{AO}{\sin \angle ACO} = \frac{AO}{\sin(30^\circ - \angle ABO)}$, $\therefore AO = 2 \sin(30^\circ - \angle ABO)$.

$\therefore 2 \sin(30^\circ - \angle ABO) = 2\sqrt{3} \sin \angle ABO$, 整理得 $\cos \angle ABO = 3\sqrt{3} \sin \angle ABO$,

$\therefore \tan \angle ABO = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

例 6.22 如图 6.20, 等边三角形 ABC 中, M 为三角形 ABC 内一动点, $\angle BMC = 120^\circ$, 则 $\frac{MA}{MC}$ 的最小值是 $(\quad)$

- (A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

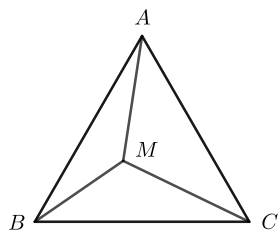


图 6.20

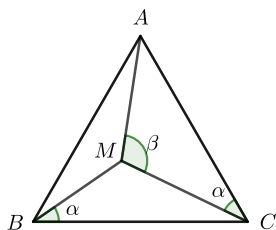


图 6.21

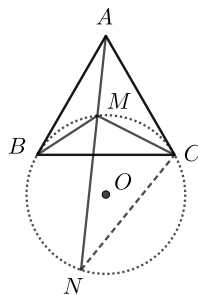


图 6.22

解法一 如图 6.21, 易知 $\angle ACM = \angle CBM$, 记作 α , $\angle AMC$ 记作 β , 设等边三角形 ABC 边长为 a , 分别在 $\triangle AMC$ 和 $\triangle BMC$ 中运用正弦定理

$$\begin{cases} \frac{MA}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta} \\ \frac{MC}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin 120^\circ} \end{cases} \quad (6.14)$$

$$\frac{MA}{MC} = \frac{\sin \beta}{\sin 120^\circ} \quad (6.15)$$

(6.14) 得 $\frac{MA}{MC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin \beta} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

解法二 设等边三角形 ABC 边长为 a , 由定边对定角易知点 M 的轨迹是一段圆弧, 且该圆直径为 $2R = \frac{a}{\sin 120^\circ} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$, 如图 6.22, 延长 AM 交圆 O 于 N 连接 CN ,

由题可得 AC 为圆 O 的切线, 所以 $\angle ACM = \angle N$, 于是 $\triangle ACM \sim \triangle ANC$ (AA), 故 $\frac{MA}{MC} = \frac{CA}{CN}$,

显然当 CN 最大时, $\frac{MA}{MC}$ 最小, 此时 $CN = 2R = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$, 从而 $\frac{MA}{MC} = \frac{a}{\frac{2\sqrt{3}a}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

变式训练 EXERCISES

309. 等腰直角三角形 ABC 中, BC 为斜边, M 为三角形 ABC 内一动点, $\angle BMC = 135^\circ$, 则 $\frac{MA}{MC}$ 的最小值是 .

6.9 边长比值

例 6.23 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , AD 为 BC 边上的高, 且 $AD = BC$, 求 $\frac{b}{c} + \frac{c}{b}$ 的最大值.

解 设 $P = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$, 则

$$P = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{b^2 + c^2}{bc} \xrightarrow{\text{余弦定理}} \frac{a^2 + 2bc \cos A}{bc} = \frac{a^2}{bc} + 2 \cos A \quad (6.16)$$

因为 $AD = BC = a$, 所以

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{a^2}{bc} \quad (6.17)$$

由式 (6.16), (6.17) 得

$$P = \sin A + 2 \cos A = \sqrt{5} \sin(A + \theta) \leq \sqrt{5} \quad (6.18)$$

故 $\frac{b}{c} + \frac{c}{b}$ 的最大值为 $\sqrt{5}$.

变式训练 EXERCISES

310. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{4}c^2$.

(1) 记 $\vec{m} = (2c, 1)$, $\vec{n} = (2a - \sqrt{2}b, \cos B)$, 若 $\vec{m} \parallel \vec{n}$.

(i) 求 C ;

(ii) 求 $\frac{a}{b}$ 的值.

(2) 求 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

6.10 四边形的四边确定, 求面积最值

例 6.24 已知平面四边形 $ABCD$ 为凸四边形, $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 5$, $DA = 3$, 则平面四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 ▲ .

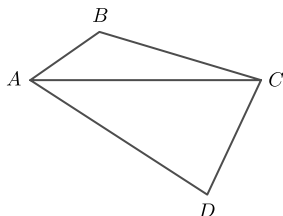


图 6.23

解 设 $AC = x$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理有:

$$x^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \cos B = 20 - 16 \cos B$$

在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理有：

$$x^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \cos D = 34 - 30 \cos D$$

于是可得

$$15 \cos D - 8 \cos B = 7 \quad (6.19)$$

又平面四边形 $ABCD$ 的面积为

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \sin B + \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \sin D = \frac{1}{2}(8 \sin B + 15 \sin D)$$

即

$$8 \sin B + 15 \sin D = 2S \quad (6.20)$$

$(6.19)^2 + (6.20)^2$ 得 $S^2 = 60 - 60 \cos(B + D)$.

所以，当 $B + D = \pi$ 时， S 取得最大值 $2\sqrt{30}$.

第七章 函数

函数是高考数学的一大重点,也是一大难点,在高考试卷中,一般以选择填空的形式考察函数的性质、函数与方程、基本初等函数等.以解答题的形式,与导数交汇在一起考查.其中函数与方程思想、数形结合思想、化归思想等都是考查的热点.

7.1 函数的基本性质

7.1.1 奇偶性

一些特殊的奇偶函数

1. $\sin x$ 是奇函数; $\cos x$ 是偶函数; $\tan x$ 是奇函数;
2. $a^x - a^{-x}$ 是奇函数; $a^x + a^{-x}$ 是偶函数 ($a > 0, a \neq 1$);
3. $\frac{a^x - 1}{a^x + 1} = 1 - \frac{2}{a^x + 1}$, $\frac{a^x + 1}{a^x - 1} = 1 + \frac{2}{a^x - 1}$ 是奇函数 ($a > 0, a \neq 1$);
4. $\log_a \left(\frac{b + cx}{b - cx} \right)$ 是奇函数 ($a > 0, a \neq 1$);
5. $\log_a (a^{bx} + 1) - \frac{b}{2}x$ 是偶函数 ($a > 0, a \neq 1$);
6. $\log_a \left(\sqrt{b^2 x^2 + 1} \pm bx \right)$ 是奇函数 ($a > 0, a \neq 1$).

注 复合函数的奇偶性: 内偶则偶, 内奇同外. 例如

1. $f(x) = \sin |x|$, 内偶则偶, 则 $f(x)$ 是偶函数.
2. $f(x) = \cos x^3$, 内奇同外, 则 $f(x)$ 是偶函数.

例 7.1 已知 $f(x) = e^x + e^{ax}$, 为偶函数, 则 $f(x)$ 的最小值为 .

解 易知 $a = -1$, 所以 $f(x)_{\min} = f(0) = 1 + 1 = 2$.

例 7.2 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - e^{1-x} + x$, 则不等式 $f(x) + f(3-2x) \leq 2$ 的解集是是 ()

- (A) $[1, +\infty)$ (B) $[0, +\infty)$ (C) $(-\infty, 0]$ (D) $(-\infty, 1]$

解 易知 $g(x) = f(x) - 1 = e^{x-1} - e^{1-x} + x - 1$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 中心对称且单调递增, 不等式 $f(x) + f(3-2x) \leq 2$ 即 $g(x) + g(3-2x) \leq 0$,

因为 $g(x) + g(2-x) = 0$, 故只需 $g(3-2x) \leq g(2-x)$, 等价于 $3-2x \leq 2-x$, 解得 $x \geq 1$, 故选 A.

例 7.3 已知函数 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x \cos x - \sin x + \frac{1}{3}x^3$, 则满足不等式 $f(\log_2 m) + f\left(\log_{\frac{1}{2}} m\right) < 2f(1)$ 的实数 m 的取值范围为 ()

- (A) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ (B) $(0, 2)$ (C) $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$ (D) $(2, +\infty)$

解 A

例 7.4 关于函数 $f(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{2}{e^x - 1}\right)$, 有下列结论: ① 图象关于 y 轴对称; ② 图象关于原点对称; ③ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增; ④ $f(x)$ 恒大于 0. 其中正确结论的编号是 ()

- (A) ① ③ (B) ② ④ (C) ③ ④ (D) ① ③ ④

解 $\because$ 奇 $\times$ 奇 = 偶, $\therefore$ ① $\checkmark$; ② $\times$; $\because$ 减 $\times$ 减 = 增, $\therefore$ ③ $\checkmark$; $\because$ 当 $x < 0$ 时, 负 $\times$ 负 = 正, 当 $x > 0$ 时, 正 $\times$ 正 = 正 $\therefore$ ④ $\checkmark$. 如图 7.1. 故选 D.

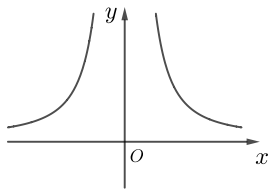


图 7.1

例 7.5 设函数 $f(x) = x(e^x + ae^{-x})$ 的导函数为 $f'(x)$, 若 $f'(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的斜率为 ()

- (A) $-2e$ (B) $-\frac{1}{e}$ (C) 2 (D) $2e$

解 奇函数易知 $a = -1$, 于是 $f(x) = x(e^x - e^{-x})$, 所以 $f'(x) = (e^x - e^{-x}) + x(e^x + e^{-x})$, 则 $f'(1) = 2e$, 选 D.

例 7.6 【2020 全国二卷】设函数 $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$, 则 $f(x)$ ()

- (A) 是偶函数, 且在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 单调递增 (B) 是奇函数, 且在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 单调递减

(C) 是偶函数, 且在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 单调递增

(D) 是奇函数, 且在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 单调递减

解 利用特殊数字, $f(1) = \ln 3$, $f(-1) = -\ln 3$, 排除 A, C, 取 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $f(0) = 0 < f(\frac{1}{4}) = \ln 3$, 排除 B, 选 D.

变式训练 EXERCISES

311. 【2021 新高考一卷】已知函数 $f(x) = x^3(a2^x - 2^{-x})$ 是偶函数, 则 $a =$.

312. 已知点 (a, b) 在函数 $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^x + 1}$ 的图象上, 则下列四点中也在图象上的是 ()
 (A) $(-a, 1+b)$ (B) $(-a, -b)$ (C) $(-a, 1-b)$ (D) $(-a, b)$

313. 已知函数 $f(x) = x[\log_2(2^x + 1) + ax]$ 为奇函数, 则实数 a 的值是 .

314. 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} + a$, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则不等式 $f(x) > 1$ 的解集为 ()
 (A) $(0, 1)$ (B) $(-\infty, \ln 3)$ (C) $(0, \ln 3)$ (D) $(0, 2)$

315. 已知 $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且有 $f(x^2 + 2x + 2) + f(2y^2 + 8y + 3) = 0$, 则 $x+y$ 的最大值是 .

316. 已知函数 $f(x) = \lg(\sqrt{1+4x^2} + ax)$ 的图象关于原点对称, 则实数 a 的值是 .

317. “ $a = \sqrt{2}$ ” 是函数 “ $f(x) = \lg(\sqrt{1+2x^2} - ax)$ ” 为奇函数的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

318. 已知函数 $f(x) = \log_a(a^{-x} + 1) + bx$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 为偶函数, 则 ()
 (A) $b = \frac{1}{2}$ 且 $f(a) > f(\frac{1}{a})$ (B) $b = -\frac{1}{2}$ 且 $f(a) < f(\frac{1}{a})$
 (C) $b = \frac{1}{2}$ 且 $f(a + \frac{1}{a}) > f(\frac{1}{b})$ (D) $b = -\frac{1}{2}$ 且 $f(a + \frac{1}{a}) < f(\frac{1}{b})$

319. 下列函数既是奇函数, 又在 $[-1, 1]$ 上单调递增的是 ()
 (A) $f(x) = |\sin x|$ (B) $f(x) = \ln \frac{e-x}{e+x}$
 (C) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (D) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

320. 已知函数 $f(x) = x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}$, $a = f\left(-\frac{1}{\pi}\right)$, $b = f\left(\frac{1}{e}\right)$, $c = f\left(\frac{1}{4}\right)$, 则以下关系成立的是 ()
- (A) $c < a < b$ (B) $c < b < a$ (C) $a < b < c$ (D) $a < c < b$

321. 已知函数 $f(x+2)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立, 若 $a = f(\log_3 18)$, $b = f\left(\ln \frac{e^2}{\sqrt{2}}\right)$, $c = f\left(e^{\frac{\ln 10}{2}}\right)$, 则以下关系成立的是 ()
- (A) $b < a < c$ (B) $a < c < b$ (C) $c < b < a$ (D) $b < c < a$

322. 已知函数 $f(x) = x(e^x - e^{-x})$, 则使 $f(x) > f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围为 .

323. 已知函数 $f(x) = x^2 \cdot \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$, 则不等式 $f(3 \log_2 x) + f(1 - \log_2 x) < 0$ 的解集是 ()
- (A) $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ (C) $(0, \sqrt{2})$ (D) $(\sqrt{2}, +\infty)$

324. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} + e^{1-x}$, 则满足 $f(x-1) < e + e^{-1}$ 成立的 x 的取值范围为 .

325. 已知函数 $f(x) = e^x - ae^{-x}$ 为奇函数, 则满足 $f(x-1) > \frac{1}{e^2} - e^2$ 成立的 x 的取值范围为 ()
- (A) $(-2, +\infty)$ (B) $(-1, +\infty)$ (C) $(2, +\infty)$ (D) $(3, +\infty)$

326. 设函数 $f(x) = 2^x + \frac{a}{2^x}$ 是奇函数, $g(x) = bx - \log_2(4^x + 1)$ 为偶函数, 则 $f(ab) =$ ()
- (A) $\frac{17}{4}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $-\frac{15}{4}$ (D) $-\frac{3}{2}$

327. 已知偶函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(-1, 2)$, 且当 $0 < a \leq b$ 时, 不等式 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$ 恒成立, 则使得 $f(x-1) < 2$ 成立的 x 的取值范围是 ()
- (A) $(0, 2)$ (B) $(-2, 0)$
(C) $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ (D) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

328. 设函数 $f(x) = 2017^x + \log_{2017}(\sqrt{x^2 + 1} + x) - 2017^{-x} + 3$, 则关于 x 的不等式 $f(1-2x) + f(x) > 6$ 的解集为 ()
- (A) $(-\infty, 1)$ (B) $(1, +\infty)$ (C) $(-\infty, 2)$ (D) $(2, +\infty)$

329. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{2}$, 则 $f(x)$ ()

- (A) 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数 (B) 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
(C) 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数 (D) 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

330. 已知函数 $f(x) = x^3 - 2x + e^x - \frac{1}{e^x}$, 若 $f(a-1) + f(2a^2) \leq 0$, 则实数 a 的取值范围是 .

331. 已知函数 $f(\log_3 x + 1) = 9x^2 - 1$, 函数 $g(x) = \log_9(f(x) + 2) + kx$ 是偶函数, 则 $k =$.

332. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 令 $g(x) = f(|x|) - |f(x)|$, 有以下 6 个论断: ① $f(x)$ 是奇函数时, $g(x)$ 是奇函数; ② $f(x)$ 是偶函数时, $g(x)$ 是奇函数; ③ $f(x)$ 是偶函数时, $g(x)$ 是偶函数; ④ $f(x)$ 是奇函数时, $g(x)$ 是偶函数; ⑤ $g(x)$ 是偶函数; ⑥ 对任意的实数 x , $g(x) \leq 0$. 则正确结论的编号是 ()

- (A) ③ ④ (B) ① ② ⑥ (C) ③ ④ ⑥ (D) ③ ④ ⑤

333. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其导函数为 $f'(x)$, 若 $x > 0$ 时, $f'(x) < 2x$, 则不等式 $f(2x) - f(x-1) > 3x^2 + 2x - 1$ 的解集为 .

334. 若函数 $f(x) = x^2 + 2x - m \cos(x+1) + m^2 + 3m - 7$ 有且仅有一个零点, 则 $m =$.

335. 【2021 新高考二卷】写出一个同时具备下列性质 ① ② ③ 的函数 $f(x)$.

- ① $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$; ② 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; ③ $f'(x)$ 为奇函数.

定理 7.1: 复合函数的对称

内轴对称则整个轴对称, 并且对称轴不变.

例 7.7 设函数 $f(x) = \ln|x-1|$, 设 $a = f\left(\frac{7}{5}\right)$, $b = f(4)$, $c = f\left(\frac{3}{2}\right)$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- (A) $a > b > c$ (B) $c > a > b$ (C) $b > c > a$ (D) $c > b > a$

解 易知函数 $f(x)$ 图象为轴对称图形, 对称轴为 $x=1$, 且在 $(1, +\infty)$ 内单调递增, 即开口向上的轴对称图形, 故自变量离对称轴越远函数值就越大, $\left|\frac{7}{5} - 1\right| = \frac{2}{5}$, $|4-1|=3$, $\left|\frac{3}{2} - 1\right| = \frac{1}{2}$, 故选 C.

例 7.8 已知函数 $f(x) = x^2 - x \sin x$, 若 $a = f(\log_{0.2} 3)$, $b = f(\log_3 0.2)$, $c = f(0.2^3)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- (A) $a > b > c$ (B) $b > a > c$ (C) $c > b > a$ (D) $c > a > b$

解 易知函数 $f(x)$ 为偶函数且开口向上, 接下来我们比较 $|\log_{0.2} 3|$, $|\log_3 0.2|$, $|0.2^3|$ 的大小,

$|\log_{0.2} 3| = \log_5 3 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $|\log_3 0.2| = \log_3 5 > 1$, 所以 $b > a$, 排除 A, D, 而 $|0.2^3| = 0.2^3 < \frac{1}{2}$, 所以 $a > c$, 排除 C, 选 B.

推论 7.1. 函数 $F(x) = f(x) + C$, 其中 $f(x)$ 为在 0 处有定义的奇函数, C 为常数, 则

$$F(m) + F(-m) = 2F(0) = 2C$$

注 说白了就是函数对称中心平移.

例 7.9 已知函数 $f(x) = \lg(\sqrt{x^2 + 1} + x) + \frac{1}{2}$, 则 $f(\ln 5) + f\left(\ln \frac{1}{5}\right) =$ ()

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

解 易知函数 $f(x) = \lg(\sqrt{x^2 + 1} + x) + \frac{1}{2}$ 是以 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 为对称中心的中心对称函数, 所以

$$f(\ln 5) + f\left(\ln \frac{1}{5}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1, \text{ 选 C.}$$

例 7.10 已知函数 $g(x)$ 为一次函数, 若 $\forall m, n \in \mathbf{R}$, 有 $g(m+n) = g(m) + g(n) - 3$, 当 $x \in [-2, 2]$ 时, 函数 $f(x) = \log_2(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) + g(x)$ 的最大值与最小值之和为 ()

- (A) 10 (B) 8 (C) 7 (D) 6

解 特殊化令 $g(x) = x + 3$, 又易知函数 $h(x) = \log_2(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$ 为奇函数, 所以函数 $f(x) = h(x) + x + 3$ 为对称中心是 $(0, 3)$ 的中心对称函数, $\therefore f(x)_{\max} + f(x)_{\min} = 2 \times 3 = 6$. 选 D.

变式训练 EXERCISES

336. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1$, $f(a) = 4$, 则 $f(-a) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

337. 函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1}$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M + m = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

338. 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 且对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 均有 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2018$ 成立, 若函数 $g(x) = f(x) + 2018x^{2019}$ 有最大值 M 和最小值 m , 则 $M + m = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

339. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + x + 1$, 且 $f(a) + f(a+1) > 2$, 则 a 的取值范围是 ()

- (A) $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (B) $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ (C) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ (D) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

340. 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) + f(y) - f(x+y) = 3$, 函数 $g(x) = \frac{x}{x^2+1} + f(x)$, 则 $g(2) + g(-2) = (\quad)$
 (A) 0 (B) 4 (C) 6 (D) 9

341. 已知函数 $f(x) = \sin 2^x - \sin 2^{-x} + 3$, 则 $f[\lg(\log_3 4)] + f[\lg(\log_4 3)] = (\quad)$
 (A) 0 (B) 3 (C) 6 (D) 9

常规对称

已知函数 $f(x)$ 的表达式 (经过化简、换元后可变形为一个奇函数加常数), 其中 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, 则 $f(m) + f(-m) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

变式训练 EXERCISES

342. 已知函数 $f(x) = (x^2 - 2x)\sin(x-1) + x + 1$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M + m = (\quad)$
 (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 0
343. 已知函数 $f(x) = (x-1)\cos(x-1) + e^{x-1} - e^{1-x} + 1$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M + m = (\quad)$
 (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 0
344. 函数 $f(x) = 1 + \frac{2^{x+1}}{2^x+1} + \sin x$ 在区间 $[-k, k] (k > 0)$ 上的值域为 $[m, n]$, 则 $m + n = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

7.1.2 周期性与对称性

定理 7.2: 函数周期

1. 若 $f(x+a) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 的周期为 $T = 2|a|$.
2. 若 $f(x+a) = \pm \frac{1}{f(x)}$, 则 $f(x)$ 的周期为 $T = 2|a|$.
3. 若 $f(x+a) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$, 则 $f(x)$ 的周期为 $T = 2|a|$.
4. 若 $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, 则 $f(x)$ 的周期为 $T = 4|a|$.
5. 若 $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则 $f(x)$ 的周期为 $T = 2|a|$.
6. 若 $f(x+a) = -\frac{1}{f(x) \pm 1}$, 则 $f(x)$ 的周期为 $T = 3|a|$.

7. 若 $f(x) = f(x+a) + f(x-a)$, 则 $f(x)$ 的周期为 $T = 6|a|$.

例 7.11 已知函数 $f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, 满足 $f(x+2) = f(-x)$, $f(x+1) = f(x) \cdot f(x+2)$, 且 $f(x) > 0$, 若 $f(1) = 4$, 则 $f(2019) + f(2020) =$ ()

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 4

解 依题意

$$f(x+1) = f(x) \cdot f(x+2) \quad (7.1)$$

得

$$f(x+2) = f(x+1) \cdot f(x+3) \quad (7.2)$$

$\frac{(7.2)}{(7.1)}$ 得 $f(x+3) = \frac{1}{f(x)}$, $\therefore f(x)$ 的最小正周期为 6, $\therefore f(2019) + f(2020) = f(3) + f(4)$,

而 $f(4) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{4}$.

再由 $f(x+2) = f(-x)$ 知 $f(x)$ 的对称轴为 $x = 1$, 故 $f(2) = f(0)$,

由 $f(x+1) = f(x) \cdot f(x+2)$ 知 $f(0+1) = f(0) \cdot f(2) \Rightarrow f(0) = 2$, $\therefore f(3) = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{2}$.

于是 $f(3) + f(4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. 故选 A.

变式训练 EXERCISES

345. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 满足 $f(x+2) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$, 且 $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{4}$, 则 $f(2018) =$

- ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{3}{5}$

346. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x+1) - f(x)$, 且 $f(1) = \lg 3 - \lg 2$, $f(2) = \lg 3 + \lg 5$ 成立, 则 $f(2010) =$ ()

- (A) 1 (B) -2 (C) -3 (D) -1

很多学生对给定的一个关于函数性质的式子, 无法判定是对称性还是周期性? 我给学生总结了一个口诀: 和定是对称, 差定是周期.

和定是对称, 差定是周期

1. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = f(b-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{(x+a) + (b-x)}{2} = \frac{a+b}{2}$ 轴对称;
2. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = -f(b-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ 中心对称;
3. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = f(x+b)$, 则函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = |(x+b) - (x+a)| = |b-a|$;
4. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = -f(x+b)$, 则函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = 2|(x+b) - (x+a)| = 2|b-a|$;
5. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = \frac{c}{f(x+b)}$, 则函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = 2|(x+b) - (x+a)| = 2|b-a|$.

例 7.12 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + 2$, 若有 $f(a) + f(a-2) > 4$, 则 a 的取值范围是 ▲ .

解 如图 7.2, 易知函数 $f(x)$ 的对称中心为 $(0, 2)$, 且在定义域内单调递增, 由中心对称的性质可知 $f(a) + f(-a) = 4$, 所以 $f(a) + f(a-2) > f(a) + f(-a) \Rightarrow f(a-2) > f(-a)$, 故 $a-2 > -a \Rightarrow a > 1$. 答案为 $(1, +\infty)$.

例 7.13 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 1)$ 对称, 则 $f(6) =$ ()
 (A) 9 (B) 7 (C) 5 (D) 3

解 根据题意 $f(x) + f(4-x) = 2 \Rightarrow f(6) + f(4-6) = 2 \Rightarrow f(6) + f(-2) = 2$. 又 $f(x) + f(4-x) = 2 \Rightarrow f(2) + f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 1$, 因此 $f(6) = 3$.

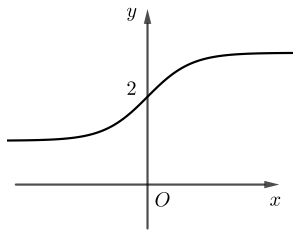


图 7.2

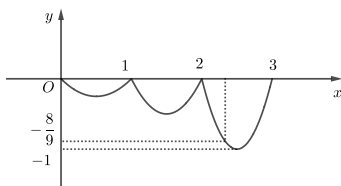


图 7.3

例 7.14 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x(x-1)$, 若对任

意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$, 则 m 的取值范围是 ()

- (A) $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$ (B) $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right]$ (C) $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ (D) $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$

解 依题意 $f(x+1) = 2f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}f(x+1)$, 即把 $f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位长度再把纵坐标压缩为原来的 $\frac{1}{2}$, 向右情况恰好相反. 如图 7.3 所示. 易知当 $x \in (2, 3]$ 时, $f(x) = 4(x-2)(x-3)$, 当 $x = 2.5$ 时, $f(x) = -1$, 故要使 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$ 恒成立, x 必须小于 2.5, 故选 B.

变式训练 EXERCISES

347. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则不等式 $f(x) > f(2x+1)$ 的解为 ()

- (A) $(-\infty, -1)$ (B) $(-1, +\infty)$ (C) $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ (D) $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$

348. 已知函数 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$, 则 $\sum_{k=1}^{2016} f\left(\frac{k}{2017}\right)$ 的值为 ()

(A) 0 (B) 504 (C) 1008 (D) 2016

349. 已知函数 $f(x) = \frac{2-2x}{2x-1}$, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = f\left(\frac{n}{2017}\right)$, 则此数列前 2017 项的和为 .

350. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x-2}{2^x+2}$, $g(x) = k(x-1)^3$, 若 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象有 n 个不同的交点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$, 则 $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n) =$ ()

(A) n (B) $2n$ (C) $n+2$ (D) $\frac{n}{2}$

351. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2a-x) = 2b - f(x)$, $h(x+a) = \frac{bx^4 + x^2 \sin x + 8b}{x^4 + 8}$, 设 $y = f(x)$ 与 $y = h(x)$ 的图象的交点坐标为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_{2m}, y_{2m})$, 若 $\sum_{i=1}^{2m} (x_i + y_i) = 4m$, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 .

352. 已知函数 $f(x) = \frac{4x-2}{4x^2-4x+5} - (2x-1)^3 + \frac{1}{2}$, 则 $\sum_{k=1}^{2018} f\left(\frac{k}{2019}\right) =$ ()

(A) 0 (B) 1009 (C) 2018 (D) 2019

353. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 当 $x \in [-1, 0]$ 时, $f(x) = -x$, 则函数 $F(x) = f(x) + \frac{x+4}{1-2x}$ 在区间 $[-9, 10]$ 上的零点个数为 ()
- (A) 10 (B) 12 (C) 18 (D) 20

奇偶平移

1. 若函数 $f(kx+b)$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 图象关于直线 $x=b$ 对称.
2. 若函数 $f(kx+b)$ 为奇函数, 则 $f(b)=0$, 且 $f(x)$ 图象关于点 $(b,0)$ 对称.

证 代数方法

1. 若函数 $f(kx+b)$ 为偶函数, 则 $f(-kx+b) = f(kx+b)$, 故 $f(x)$ 图象关于直线 $x=b$ 对称.
2. 若函数 $f(kx+b)$ 为奇函数, 则 $f(-kx+b) = -f(kx+b)$, 故 $f(b)=0$, 且 $f(x)$ 图象关于点 $(b,0)$ 对称.

- 例 7.15** 已知函数 $f(x)$ 及其导数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 记 $g(x) = f'(x)$, 若 $f(\frac{3}{2}-2x)$ 为偶函数, $g(\frac{1}{2}+x)$ 为奇函数, 则 ()
- (A) $f(\frac{3}{2}) = 0$ (B) $g(\frac{1}{2}) = 0$ (C) $g(1) + g(2) = 0$ (D) $g(-\frac{1}{2}) + g(\frac{7}{2}) = 0$

解 因为 $f(\frac{3}{2}-2x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)$ 关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 轴对称, 故 A ✗;

因为 $g(\frac{1}{2}+x)$ 为奇函数, 故 B ✓;

依题 $f(x)$ 关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 轴对称, 所以 $g(x)$ 关于点 $(\frac{3}{2}, 0)$ 中心对称, 故 C ✓, D ✓;

答案为 BCD.

- 例 7.16** 已知奇函数 $f(x)$ 及其导数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 记 $g(x) = f'(x)$, 若 $h(x) = f(x-4) + x$, 则 ()

- (A) 函数 $g(x-2)$ 的图象关于直线 $x = -2$ 对称
 (B) $g'(0) = 0$
 (C) 函数 $h(x)$ 的图象关于点 $(4, 4)$ 中心对称
 (D) 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 若 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} = 44$, 则 $h(a_1) + h(a_2) + \cdots + h(a_{11}) = 44$

解 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $g(x)$ 关于 y 轴对称, 故 B ✓; 函数 $g(x-2)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 故 A ✗;

依题 $h(4-x) + h(4+x) = f(-x) + 4 - x + f(x) + 4 + x = 8$, 故 C ✓,

由第 8 页中心对称函数与等差数列的结论可知 D ✓;

答案为 BCD.

变式训练 EXERCISES

354. 【2021 新高考二卷】 设函数 $f(x)$ 为定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+2)$ 为偶函数, $f(2x+1)$ 为奇函数, 则 ()

- (A) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ (B) $f(-1) = 0$ (C) $f(2) = 0$ (D) $f(4) = 0$

例 7.17 【2013 全国乙卷】 若函数 $f(x) = (1-x^2)(x^2+ax+b)$ 的图像关于直线 $x=-2$ 对称, 则 $f(x)$ 的最大值为 .

解 由题设 $f(1)=0$, $f(-1)=0$, 又函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-2$ 对称, 所以 $f(-3)=f(-5)=0$, 从而有 $f(x) = -(x+5)(x+3)(x+1)(x-1)$, 即 $f(x) = -[(x+2)^2-5]^2+16$, 所以 $f(x)$ 的最大值为 16.

定理 7.3: 相同的两倍, 不同的四倍

- 若 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 和直线 $x=b$ 对称, 则 $f(x)$ 的周期为 $T=2|a-b|$.
- 若 $f(x)$ 关于点 $(a,0)$ 和点 $(b,0)$ 对称, 则 $f(x)$ 的周期为 $T=2|a-b|$.
- 若 $f(x)$ 关于点 $(a,0)$ 和直线 $x=b$ 对称, 则 $f(x)$ 的周期为 $T=4|a-b|$.

注 定理 7.3 可根据正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的图象与性质来记忆.

例 7.18 【2021 新课标乙卷】 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $f(1+x)=f(-x)$, 若 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$, 则 $f\left(\frac{5}{3}\right)=$ ()

- (A) $-\frac{5}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$

解 由 $f(1+x)=f(-x)$ 可知函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{1}{2}$, 又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 故它的最小正周期为 $4 \times \left|\frac{1}{2}-0\right|=2$, 于是 $f\left(\frac{5}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$, 故选 C.

例 7.19 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其图象关于点 $(1,0)$ 对称, 以下关于 $f(x)$ 的结论 ① $f(x)$ 是周期函数; ② $f(x)$ 满足 $f(x)=f(4-x)$; ③ $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减; ④ $f(x)=\cos \frac{\pi x}{2}$ 是满足条件的一个函数. 其中正确结论的个数是 ()

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

解 根据相同的两倍, 不同的四倍可知 ①✓; ②✓; ③✗; ④✓. 选 B.

例 7.20 【多选】 已知函数 $f(x)$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 满足 $f(x)=-f(6-x)$, $f(x+1)=f(-x+1)$, 若 $f(a)=-f(2020)$, $a \in [5,9]$, 且 $f(x)$ 在 $[5,9]$ 上为单调函数, 则下列结论正确的是 ()

- (A) $f(3)=0$ (B) $a=8$

(C) $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数(D) $y = f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称**解** 由 $f(x) = -f(6-x)$, 代入 $x = 3$, 可得 $f(3) = 0$, 故 A $\checkmark$;由 $f(x) = -f(6-x)$ 可知 $f(x)$ 关于点 $(3, 0)$ 中心对称, 由 $f(x+1) = f(-x+1)$ 可知 $f(x)$ 关于线 $x = 1$ 轴对称, 于是 $f(x)$ 的最小正周期为 8, 故 C $\times$;因为 $f(x)$ 的最小正周期为 8, 故 $f(2020) = f(4)$, 所以

$$f(a) = -f(2020) = -f(4) \quad (7.3)$$

由 $f(x+1) = f(-x+1)$, 代入 $x = 3$, 可得

$$f(4) = f(-2) \quad (7.4)$$

由 (7.3), (7.4) 两式可得 $f(a) = -f(2)$, 代入 $f(x) = -f(6-x)$ 可知 $a = 8$, 故 B $\checkmark$;D 明显 $\times$.

答案为 A, B.

例 7.21 【2021 甲卷】设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$, 若 $f(0) + f(3) = 6$, 则 $f\left(\frac{9}{2}\right) =$ ()

(A) $-\frac{9}{4}$

(B) $-\frac{3}{2}$

(C) $\frac{7}{4}$

(D) $\frac{5}{2}$

解 D.

变式训练 EXERCISES

355. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 若 $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 都是奇函数, 则 ()

(A) $f(x)$ 是偶函数(B) $f(x)$ 是奇函数(C) $f(x) = f(x+2)$ (D) $f(x+3)$ 是奇函数

356. 已知函数 $f(x)$ 为定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, $f(x-1)$ 为奇函数, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 1 - x^3$, 则

$$f\left(\frac{29}{2}\right) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}.$$

周期性奇函数求和规律

奇函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = t$, 若 $f(1) = a$, 则 $\sum_{i=1}^n f(i)$ 的值有如下情形:

- 若 n 除以最小正周期 t 的余数为 $t-2$, 则 $\sum_{i=1}^n f(i) = f(1) = a$.

- 若 n 除以最小正周期 t 的余数为 0 或 $t-1$, 则 $\sum_{i=1}^n f(i) = 0$.

例 7.22 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + \cdots + f(50) =$ ()
 (A) -50 (B) 0 (C) 2 (D) 50

解 易知 $f(x)$ 的最小正周期为 4, 因为 $50 \div 4 = 12 \cdots 2$, 而 $2 = 4 - 2$, 所以 $f(1) + f(2) + \cdots + f(50) = f(1) = 2$.

例 7.23 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(-3-x) + f(x-3) = 0$, 若 $f(1) = 1, f(2) = -2$, 则 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2020) =$ ()
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

解 依题意, 奇函数 $f(x)$ 满足 $f(-3-x) + f(x-3) = 0$, 得 $f(-3-x) = f(3-x)$, 所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 6, 于是 $2020 \div 6 = 336 \cdots 4$, 又 $4 = 6 - 2$, 故 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2020) = f(1) = 1$, 选 C.

变式训练 EXERCISES

357. 已知 $f(x)$ 是定义域在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 若 $f(1) = 1$, 则 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2019) =$ ()
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2019

358. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 且 $f(x+2)$ 为偶函数, 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + \cdots + f(55) =$ ()
 (A) -110 (B) 0 (C) 4 (D) 110

359. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3) = -f(x)$, 当 $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$ 时, $f(x) = x^2 - 6x + 8$, 则 $f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2020) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

7.1.3 抽象函数找原型

例 7.24 【2015 新课标甲卷】设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()
 (A) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ (B) $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ (C) $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ (D) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

解 设 $f(x)$ 是多项式函数, 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以它只含奇次项; 又 $f(1) = -f(-1) = 0$, 所以 $f(x)$ 能被 $x^2 - 1$ 整除, 因此可取 $f(x) = x - x^3$, 检验知 $f(x)$ 满足所有题设条件, 解不等式 $f(x) > 0$, 得到 $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, 选 A.

抽象函数找原型

满足 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ 的原型函数为 ① 双曲余弦函数 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; ② 余弦函数 $f(x) = \cos x$.

7.2 比较大小

例 7.25 设 x, y, z 为正数, 且 $2^x = 3^y = 5^z$, 则 ()

- (A) $2x < 3y < 5z$ (B) $5z < 2x < 3y$ (C) $3y < 5z < 2x$ (D) $3y < 2x < 5z$

解 依题 $x \ln 2 = y \ln 3 = z \ln 5 = k > 0$, 则 $2x = k \cdot \frac{2}{\ln 2} = k \cdot \frac{4}{\ln 4}$, $3y = k \cdot \frac{3}{\ln 3}$, $5z = k \cdot \frac{5}{\ln 5}$, 而函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ 在 $(e, +\infty)$ 单调递增, 故选 D.

例 7.26 比较 2021^{2022} 与 2022^{2021} 的大小.

解 构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 易知其在 $[e, +\infty)$ 上是减函数, 因此, 当 $n \geq 3$ 时, $\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1} \Leftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n$, 故 $2021^{2022} > 2022^{2021}$.

例 7.27 比较 $\log_{2021} 2022$ 与 $\log_{2022} 2023$ 的大小.

解 转化为 $\log_n(n+1)$ 与 $\log_{n+1}(n+2)$ 的大小.

$$\begin{aligned} \log_n(n+1) - \log_{n+1}(n+2) &= \frac{\lg(n+1)}{\lg n} - \frac{\lg(n+2)}{\lg(n+1)} \\ &= \frac{\lg^2(n+1) - \lg n \lg(n+2)}{\lg n \lg(n+1)} \end{aligned}$$

由均值不等式可知

$$\lg n \lg(n+2) < \left[\frac{\lg n + \lg(n+2)}{2} \right]^2 = \left[\frac{\lg(n^2 + 2n)}{2} \right]^2 < \left[\frac{\lg(n^2 + 2n + 1)}{2} \right]^2 = \lg^2(n+1)$$

$\therefore \log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$, 故 $\log_{2021} 2022 > \log_{2022} 2023$.

例 7.28 比较 $\left(1 + \frac{1}{2021}\right)^{2021}$ 与 $\left(1 + \frac{1}{2022}\right)^{2022}$ 的大小.

解 转化为 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 与 $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ 的大小.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) \times 1 < \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}\right]^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\text{故 } \left(1 + \frac{1}{2021}\right)^{2021} < \left(1 + \frac{1}{2022}\right)^{2022}.$$

推论 7.2. 记数列 $\{F_n\}$ 为斐波那契数列, 其中 $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*)$, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$, 则

$$\frac{n-1}{n} < \log_{F_{n+2}} F_{n+1} < \frac{n}{n+1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$$

例 7.29 设 $a = \log_3 2$, $b = \log_5 3$, $c = \frac{2}{3}$, 则 ()

- (A) $a < c < b$ (B) $a < b < c$ (C) $b < c < a$ (D) $c < a < b$

解 A.

例 7.30 设 $a = \log_5 3$, $b = \log_8 5$, $c = \log_{13} 8$, 则 ()

- (A) $a < b < c$ (B) $b < a < c$ (C) $b < c < a$ (D) $c < a < b$

解 A.

注 通过这两道例题我们发现不等式链

$$\log_3 2 < \frac{2}{3} < \log_5 3 < \frac{3}{4} < \log_8 5 < \frac{4}{5} < \log_{13} 8$$

7.3 热点函数图象

7.3.1 一比一型函数图象

一比一型函数图象

“ $\frac{1}{1}$ ”型函数图象是反比例函数图象平移之后的产物, 也就是说“ $\frac{1}{1}$ ”型函数是中心对称函数. 如何快速地画出“ $\frac{1}{1}$ ”型函数的图象呢? 我们给出如下方法:

1. 找对称中心: 分母为零时的 x 为横坐标, 分子分母 x 系数之比为纵坐标. $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

2. 上下系数照着写, 交叉相乘捺减撇: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

3. 如果上一步的得数为正, 代表递增, 那么函数图象在新的“二四象限”(反比例函数的双支); 如果上一步的得数为负, 代表递减, 那么函数图象在新的“一三象限”.

例 7.31 【2021 新课标乙卷】设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是 ()

- (A) $f(x-1)-1$ (B) $f(x-1)+1$ (C) $f(x+1)-1$ (D) $f(x+1)+1$

解 易知函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 的对称中心为 $(-1, -1)$, 故需向右平移 1 个单位, 再向上平移 1 个单位即可得到奇函数, 故选 B.

例 7.32 画出函数 $f(x) = \frac{4x+3}{2x+1}$ 的图象.

解 如图 7.4 所示.

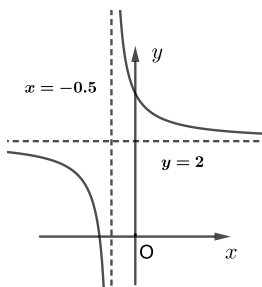


图 7.4

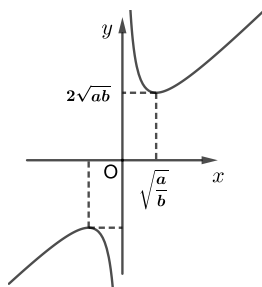


图 7.5

7.3.2 对勾函数图象

普通对勾函数 $f(x) = bx + \frac{a}{x}$ ($a > 0, b > 0$), 如图 7.5 所示:

例 7.33 【2021 新课标乙卷】下列函数中最小值为 4 的是 ()

- (A) $y = x^2 + 2x + 4$ (B) $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$ (C) $y = 2^x + 2^{2-x}$ (D) $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$

解 由基本不等式取等条件知选 C.

例 7.34 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 直线 l 经过点 $C(0, 2)$, 且与椭圆交于 A, B 两点, 求 $\triangle OAB$ 面积的最小值.

解 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由题意知直线的斜率存在, 设直线方程为 $y = kx + 2$. 易知

$$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OCB} - S_{\triangle OCA} = \frac{1}{2} \cdot |OC| \cdot |x_2 - x_1| = \frac{4\sqrt{4k^2 - 3}}{4k^2 + 1}$$

令 $t = \sqrt{4k^2 - 3} (t \geq 0) \Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{4t}{t^2 + 4} = \frac{4t}{t^2 + 4} = \frac{4}{t + \frac{4}{t}} \geq 1$, 当且仅当 $t = 2$ 时最值成立.

此时 $S_{\triangle OAB} = 1$ 为最小值.

7.3.3 一些超越函数的图象

1. 飘带函数 $f(x) = x - \frac{a}{x} (a > 0)$. 见图 7.6;

2. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x), g(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$. 见图 7.7;

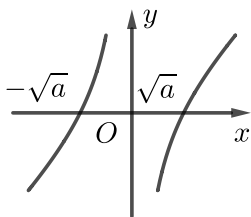


图 7.6

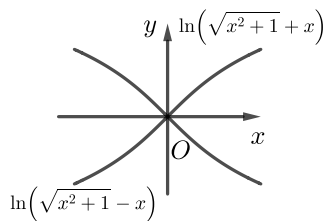


图 7.7

3. 函数 $f(x) = \frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2}$. 见图 7.8, 函数 $f(x) = \frac{1}{2^x + 1} - \frac{1}{2}$. 见图 7.9.

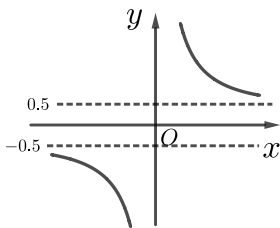


图 7.8

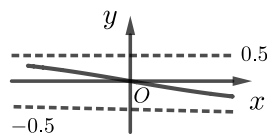


图 7.9

4. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$. 见图 7.10, $f(x) = \frac{e^x}{x}$. 见图 7.11;

5. $f(x) = x \cdot \ln x$. 见图 7.12, 函数 $f(x) = xe^x$. 见图 7.13,

6. $f(x) = \frac{x}{e^x}$. 见图 7.14; 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. 见图 7.15;

7. 类双曲正弦函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$. 类双曲余弦函数 $g(x) = e^x - e^{-x}$. 见图 7.16, 图 7.17

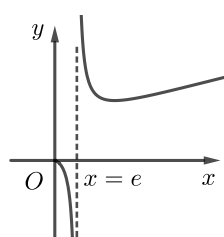


图 7.10

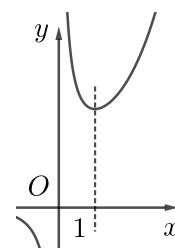


图 7.11

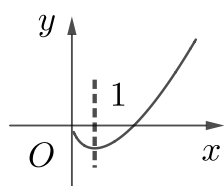


图 7.12

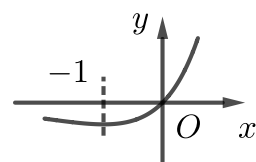


图 7.13

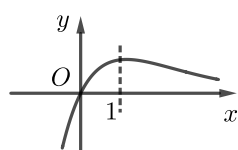


图 7.14

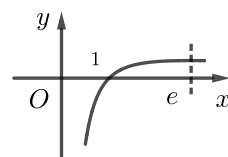


图 7.15

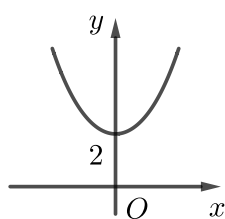


图 7.16

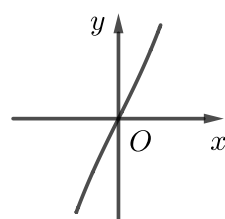


图 7.17

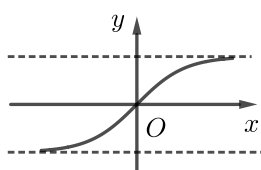


图 7.18

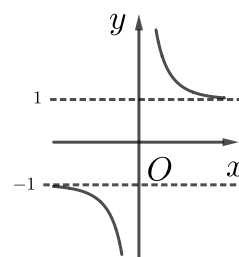


图 7.19

8. 双曲正切函数 $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. 见图 7.18, 函数 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. 见图 7.19,.

例 7.35 设 $f(x) = e^x$, $f(x) = g(x) - h(x)$, 且 $g(x)$ 为偶函数, $h(x)$ 为奇函数, 若存在实数 m , 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 不等式 $mg(x) + h(x) \geq 0$ 成立, 则 m 的最小值为 ()

- (A) $\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$ (B) $\frac{2}{e^2 + 1}$ (C) $\frac{e^2 + 1}{e^2 - 1}$ (D) $\frac{1 - e^2}{1 + e^2}$

解 依题意可得 $g(x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2}$, $h(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$, 则 $mg(x) + h(x) \geq 0 \Rightarrow m \geq \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ↗. 因此 $m \geq \frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}} = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$, 故选 A.

例 7.36 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - t \left(\ln x + x + \frac{2}{x} \right)$ 恰有两个极值点, 则实数 t 的取值范围为 ()

- (A) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ (B) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
(C) $\left(\frac{1}{2}, \frac{e}{3}\right) \cup \left(\frac{e}{3}, +\infty\right)$ (D) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{e}{3}, +\infty\right)$

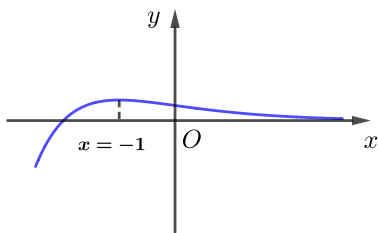


图 7.20

解 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{(x-1)[e^x - t(x+2)]}{x^2} = \frac{(x-1)(x+2)\left(\frac{e^x}{x+2} - t\right)}{x^2}$,

$\therefore \frac{e^x}{x+2} - t = 0$ 有且只有一个不为 1 的正解. 即 $\frac{1}{t} = \frac{x+2}{e^x} \Rightarrow \frac{1}{te^2} = \frac{x+2}{e^{x+2}} \stackrel{\text{记作}}{=} g(x)$,

我们易知 $g(x)$ 的图象如图 7.20, 所以 $0 < \frac{1}{te^2} < g(0) = \frac{2}{e^2} \Rightarrow t > \frac{1}{2}$,

又 $\frac{1}{te^2} \neq g(1) = \frac{3}{e^3} \Rightarrow t \neq \frac{e}{3}$, 故选 C.

例 7.37 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - t \left(\ln x + x + \frac{2}{x} \right)$ 恰有一个极值点为 1, 则实数 t 的取值范围为 ()

- (A) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{e}{3}\right\}$ (B) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ (C) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{e}{3}\right\}$ (D) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

解 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{(x-1)[e^x - t(x+2)]}{x^2} = \frac{(x-1)(x+2)\left(\frac{e^x}{x+2} - t\right)}{x^2}$,

$\therefore \frac{e^x}{x+2} - t = 0$ 无正数解. 即 $\frac{1}{t} = \frac{x+2}{e^x} \Rightarrow \frac{1}{te^2} = \frac{x+2}{e^{x+2}} \xrightarrow{\text{记作}} g(x)$,

我们易知 $g(x)$ 的图象如图 7.20, 所以 $\frac{1}{te^2} \geq g(0) = \frac{2}{e^2} \Rightarrow 0 < t \leq \frac{1}{2}$,

或 $\frac{1}{te^2} < 0 \Rightarrow t < 0$,

当 $t = 0$ 时也满足题意, 故选 D.

例 7.38 函数 $f(x) = ae^x$ 与 $g(x) = -x - 1$ 的图象上存在关于 x 轴的对称点, 则实数 a 的取值范围为 ▲ .

解 题目转化为 $f(x) + g(x) = 0$ 有解, 即 $ae^x - x - 1 = 0$ 有解, 分离变量

$a = \frac{x+1}{e^x} \Rightarrow \frac{a}{e} = \frac{x+1}{e^{x+1}} \xrightarrow{\text{记作}} h(x)$, 易知 $h(x)$ 是函数 $\frac{x}{e^x}$ 向左平移一个单位得到, 所以

$h(x) \leq h(0) = \frac{1}{e}$, 于是 $\frac{a}{e} \leq \frac{1}{e}$, 解得 $a \leq 1$. 答案为 $a \leq 1$.

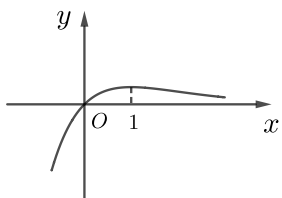


图 7.21 $f(x) = \frac{x}{e^x}$ 的图象

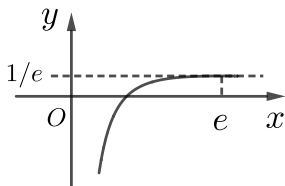


图 7.22

例 7.39 若函数 $f(x) = x \ln x - 2ax^2 - x$ 有两个不同的极值点, 则实数 a 的取值范围为 ▲ .

解 依题意 $f'(x) = \ln x + 1 - 4ax - 1 = \ln x - 4ax$, 函数 $f(x) = x \ln x - 2ax^2 - x$ 有两个不同的极值点, 则函数 $y = 4a$ 和函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的图象有两个交点, 如图 7.22, 所以 $0 < 4a < \frac{1}{e} \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{4e}$.

例 7.40 【2021 新课标乙卷】已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$.

(1) 若 $a = 2$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.

解 (1)
$$\begin{cases} f(x) \nearrow, & x \in (-\infty, 0), \left(\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right) \\ f(x) \searrow, & x \in \left(0, \frac{2}{\ln 2}\right) \end{cases} \quad (2) a \in (1, e) \cup (e, +\infty).$$

7.4 三次函数

三次函数在高考中占据着非常重要的位置, 其一般形式为 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$. 为了简洁, 我只给出 $a > 0$ 的情况. 令 $\Delta' = b^2 - 3ac$ 为该三次函数的判别式.

7.4.1 三次函数的单调性

三次函数图象

如图 7.23 所示

- 当 $\Delta' \leq 0$ 时, $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数.
- 当 $\Delta' > 0$ 时, $f(x)$ 会在中间一段单调递减, 形成三个单调区间以及两个极值.
- 当 $\Delta' > 0$ 时, 三次函数 $f(x)$ 的两个极值点分别为

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

其中 x_1 为极大值点, x_2 为极小值点.

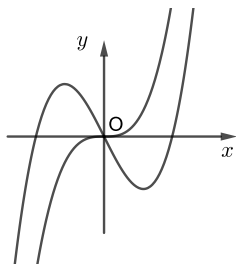


图 7.23

例 7.41 函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a < \frac{2}{3}b$) 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增函数, 则 $\frac{c}{2b-3a}$ 的最小值是 ()

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

解 若函数在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增函数, 则
$$\left. \begin{array}{l} a > 0 \\ b^2 \leq 3ac \end{array} \right\} \Rightarrow c \geq \frac{b^2}{3a}. \text{ 故}$$

$$\frac{c}{2b-3a} \geq \frac{\frac{b^2}{3a}}{2b-3a} = \frac{b^2}{3a(2b-3a)} \geq \frac{b^2}{\left(\frac{3a+2b-3a}{2}\right)^2} = 1, \text{ 故选 A.}$$

例 7.42 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 - (3+2a)x + 1$, 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 那么实数 a 的取值范围为 .

解 若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点; 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点. 依题意 $\because f''(x) = 6x + 2a, \therefore f''(1) = 6 + 2a < 0 \Rightarrow a < -3$. 所以答案为 $(-\infty, -3)$.

例 7.43 “ $a \geq 3$ ” 是 “ $x = 1$ 为函数 $f(x) = -x^3 + \frac{1}{2}(a+3)x^2 - ax - 1$ 的极小值点” 的 ()

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

解 依题意 $f'(x) = -3x^2 + (a+3)x - a = (-3x+a)(x-1)$, 所以 $\frac{a}{3} > 1 \Rightarrow a > 3$, 选 B.

例 7.44 【2021 新课标乙卷】 设 $a \neq 0$, 若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则 ()

- (A) $a < b$ (B) $a > b$ (C) $ab < a^2$ (D) $ab > a^2$

解 $x = a$ 既是函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 又是零点, 对 a 分正负讨论可知选 D.

变式训练 EXERCISES

360. 设随机变量 η 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, 若 $P(\eta < -1) = 0.2$, 则函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \eta^2x$ 没有极值点的概率是 ()

- (A) 0.2 (B) 0.3 (C) 0.7 (D) 0.8

361. 已知函数 $f(x) = x^3 + mx^2 + (m+6)x + 1$ 既存在极大值, 又存在极小值, 则 m 的取值范围是 ▲ .

7.4.2 三次函数的切线

三次函数的切线求法

对任意的三次函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$, 当点 $P(x_1, y_1)$ 在曲线 $y = f(x)$ 上时, 则过点 P 的切线有两种情况:

- 若 $x_1 = -\frac{b}{3a}$, 则切线只有一条, 且以点 P 本身为切点;
- 若 $x_1 \neq -\frac{b}{3a}$, 则切线必有两条, 一是以点 P 本身为切点; 二是切线以曲线 $y = f(x)$ 上另一点 $Q\left(-\frac{x_1}{2} - \frac{b}{2a}, f\left(-\frac{x_1}{2} - \frac{b}{2a}\right)\right)$ 为切点, 但切线恰好过点 P .

例 7.45 求曲线 $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + x$ 过点 $P(-1, 3)$ 的切线方程.

解 易知 $f(x)$ 的中心点为点 P , $\therefore$ 所求切线必定只有一条, 通过求导易得切线方程为 $5x + y + 2 = 0$.

例 7.46 求曲线 $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + x$ 过点 $P(0, 0)$ 的切线方程.

解 易知 $f(x)$ 的中心点不为点 P , 且点 P 在曲线上, $\therefore$ 所求切线必定有两条, 通过求导易得切点为 $P(0, 0)$ 和 $Q\left(-\frac{3}{2}, \frac{21}{4}\right)$, 故切线方程为 $x - y = 0$ 和 $7x + 2y = 0$.

三次函数的切线条数

如图 7.24 所示, 曲线为三次函数图象, 直线是过三次函数中心点 $O\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ 的一条切线.

- 过 A, C 区域的点可以做这个三次函数的三条切线.
- 过 B, D 区域的点可以做这个三次函数的一条切线.
- 过直线或曲线上的点 (除对称中心) 可以做这个三次函数的两条切线.
- 过对称中心只能做一条切线.

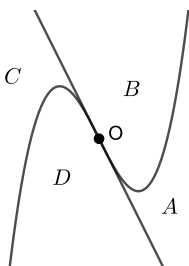


图 7.24

例 7.47 设 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$, 如果过点 $P(a, -4)$ 恰有两条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 求 a 的值.

解 易知过 $f(x)$ 的中心点的切线方程为 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$, 因为过点 P 恰有两条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 所以有两种情况:

1. 当点 P 在过中心点的切线方程上时, $-4 = -\frac{3}{2}a + \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{7}{2}$.
2. 当点 P 在曲线方程上时, $-4 = 2a^3 - 3a^2 + 1 \Rightarrow a = -1$.

变式训练 EXERCISES

362. 设 $f(x) = x^3 - x$, 如果过点 $(1, b)$ 可做曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 求实数 b 的取值范围.

363. 设 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + 1$, 其中 $a > 0$, 如果过点 $A(0, 2)$ 可做曲线 $y = f(x)$ 的三条不同切线, 求 a 的取值范围.

364. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y + 2 = 0$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 若对于区间 $[-2, 2]$ 上任意两个自变量的值 x_1, x_2 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq c$, 求实数 c 的最小值;
- (3) 若过点 $M(2, m)$ ($m \neq 2$) 可做曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 求 m 的取值范围.

7.4.3 三次函数的对称

定理 7.4

函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 是中心对称图形, 关于点 $P\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ 对称.

例 7.48 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, 满足 $f(1+x) + f(1-x) + 22 = 0$, 则 $f(x)$ 的单调递减区间是 ▲ .

解 因为 $f(1+x) + f(1-x) + 22 = 0$, 所以此三次函数的对称中心为 $(1, -11)$, 所以 $a = -3, b = -9$, 易知答案为 $[-1, 3]$.

例 7.49 已知直线 l 与曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 13x - 9$ 的交点依次为 A, B, C , 且 $|AB| = |BC| = \sqrt{5}$, 则直线 l 的方程为 ()

- (A) $y = -2x + 3$ (B) $y = 2x - 3$ (C) $y = 3x - 5$ (D) $y = -3x + 2$

解 易知直线 l 上的点 B 为此三次函数的对称中心为 $(2, 1)$, 所以排除 A, D, 联立方程组

$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 - 6x^2 + 13x - 9 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y_1 = 3 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 1 \\ y_2 = -1 \end{array} \right. \quad (7.5)$$

故选 B.

例 7.50 已知函数 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 29x - 30$, 若实数 m, n 满足 $f(m) = -12, f(n) = 18$, 则 $m + n =$ ▲ .

解 易知此三次函数的对称中心为 $(3, 3)$, 所以 $f(x) + f(6-x) = 6$, 又 $f(m) + f(n) = -12 + 18 = 6 \Rightarrow m + n = 6$.

7.4.4 三次方程中的韦达定理

推论 7.3. 若关于 x 的方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0, x \in \mathbf{R})$ 有三个根 x_1, x_2, x_3 , 则我们有 ① $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, ② $x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$, ③ $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}$.

证 若关于 x 的方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0, x \in \mathbf{R})$ 有三个根 x_1, x_2, x_3 , 则我们有

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

系数相等得证.

例 7.51 已知函数 $f(x) = x^3 - 9x$, $g(x) = 3x^2 + a (a \in \mathbf{R})$, 若方程 $f(x) = g(x)$ 有三个不同实数根 x_1, x_2, x_3 , 且它们可以构成等差数列, 则 $a = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

解 依题意, 方程 $f(x) = g(x)$ 有三个不同实数根 x_1, x_2, x_3 , 等价于方程 $x^3 - 3x^2 - 9x - a = 0$ 有三个不同实数根 x_1, x_2, x_3 , $\therefore$ 由韦达定理知 $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $\therefore$ 它们可以构成等差数列, $\therefore x_2 = 1$, 代入原方程可知 $a = -11$, 故答案为 -11 .

例 7.52 【2009 新课标理科】已知函数 $f(x) = (x^3 + 3x^2 + ax + b)e^{-x}$.

(1) 若 $a = b = -3$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, \alpha)$, $(2, \beta)$ 单调增加, 在 $(\alpha, 2)$, $(\beta, +\infty)$ 单调减少, 证明: $\beta - \alpha > 6$.

解 (1) 依题意可得 $f'(x) = -e^{-x}(x^3 - 9x) = -e^{-x}x(x+3)(x-3)$, 由穿针引线法可知: $f(x)$ 在 $(-\infty, -3)$, $(0, 3)$ 单调增加, 在 $(-3, 0)$, $(3, +\infty)$ 单调减少.

(2) $f'(x) = -e^{-x}[x^3 + (a-6)x + b-a]$, 由条件得 $f'(2) = 0$, 即 $2^3 + 2(a-6) + b-a = 0$, 故 $b = 4 - a$, 从而

$$f'(x) = -e^{-x}[x^3 + (a-6)x + 4 - 2a]$$

因为 $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$, 所以

$$x^3 + (a-6)x + 4 - 2a = (x-2)(x-\alpha)(x-\beta) = (x-2)[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta]$$

比较系数得 $\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = a - 2$,

故 $\beta - \alpha = \sqrt{(\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{12 - 4a}$,

又 $(\beta - 2)(\alpha - 2) < 0$, 即 $\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4 < 0$, 由此可得 $a < -6$, 于是 $\beta - \alpha > 6$.

7.5 讨论含参函数单调性

类型一: 极值点唯一

1. 已知函数 $f(x) = ax - \ln x (a \in \mathbf{R})$, 讨论 $f(x)$ 在 $(0, e]$ 的单调性.
2. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + 1$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
3. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{a} - \ln(ax)$, 若 $a > 0$, 求函数 $f(x)$ 的极值.
4. 已知函数 $f(x) = 2x + (1 - 2a)\ln x + \frac{a}{x}$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
5. 已知函数 $f(x) = a^2x^2 + ax - 3\ln x + 1$, 其中 $a > 0$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
6. 已知函数 $f(x) = xe^x + ax^2 - 2(e^x + ax) + a$, 其中 $a \geq 0$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
7. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} + a\ln x - ax$, 其中 $a < 0$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

类型二: 极值点不唯一

1. 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
2. 已知函数 $f(x) = ax^2 - a - \ln x$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
3. 已知函数 $f(x) = e^{2x} - (a + 2)e^x + ax$, 其中 $a > 0$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
4. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x - a\ln x + ax$, 其中 $a < 0$, 求 $f(x)$ 的极值.
5. 已知函数 $f(x) = (x - 1)e^x - ax^2$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

类型三: 先通过 Δ 判断再比较极值点

1. 已知函数 $f(x) = (x^2 + a)e^x$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
2. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax + \ln x$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
3. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 - 2x - 2$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

7.6 两曲线公切线

众所周知, 求两曲线 C_1 与 C_2 的公切线的通法是, 先分别求出曲线上任一点处的切线方程, 当这两条切线重合时, 变成了两曲线的公切线.

两曲线的公切线

设公切线 l 与函数 $y = f(x)$ 的图象在点 $A(x_1, y_1)$ 处的切线方程为 $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$;
 设公切线 l 与函数 $y = g(x)$ 的图象在点 $B(x_2, y_2)$ 处的切线方程为 $y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)$.

所以, 两直线重合的充要条件为两切线方程的斜率和截距分别相等.

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2) \end{cases} \quad (7.6)$$

$$(7.7)$$

注 上述方程组有解表示两曲线存在公切线; 方程组的解 x_1, x_2 分别是相应切线的横坐标, 方程组有几组解就表示两曲线有几条公切线.

例 7.53 若直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = \ln x + 2$ 的切线, 也是曲线 $y = \ln(x + 1)$ 的切线, $b = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 设 $A(x_1, y_1)$ 是曲线 $y = \ln x + 2$ 的切点, 则切线方程为 $y = \frac{1}{x_1} \cdot x + 1 + \ln x_1$;

设 $B(x_2, y_2)$ 是曲线 $y = \ln(x + 1)$ 的切点, 则切线方程为 $y = \frac{1}{x_2 + 1} \cdot x + \ln(x_2 + 1) - \frac{x_2}{x_2 + 1}$, 则

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2 + 1} \end{cases} \quad (7.8)$$

$$\begin{cases} 1 + \ln x_1 = \ln(x_2 + 1) - \frac{x_2}{x_2 + 1} \end{cases} \quad (7.9)$$

解得 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$, 此时 $b = 1 + \ln x_1 = 1 - \ln 2$. 即为所求.

例 7.54 曲线 $y = -\frac{1}{x} (x < 0)$ 与曲线 $y = \ln x$ 的公切线条数为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

解 设 $A(x_1, y_1)$ 是曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 的切点, 则切线方程为 $y = \frac{1}{x_1^2} \cdot x - \frac{2}{x_1}$;

设 $B(x_2, y_2)$ 是曲线 $y = \ln x$ 的切点, 则切线方程为 $y = \frac{1}{x_2} \cdot x + \ln x_2 - 1$, 则

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1^2} = \frac{1}{x_2} \end{cases} \quad (7.10)$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{x_1} = \ln x_2 - 1 \end{cases} \quad (7.11)$$

消去 x_2 得 $-\frac{2}{x_1} = \ln x_1^2 - 1$, 设 $t = -x_1 > 0$, 即

$$2 \ln t - \frac{2}{t} - 1 = 0 \quad (7.12)$$

只需探究此方程解的个数.

易知函数 $f(x) = 2 \ln x - \frac{2}{x} - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(1) = -3 < 0$, $f(e) = 1 - \frac{2}{e} > 0$, 于是 $f(x) = 0$ 有唯一解, 故两曲线的公切线条数为 1.

注 两曲线存在公切线条数问题解题思路: 利用斜率和截距相等得到方程组后消去 x_1 或 x_2 中的一个, 转化为方程在特定区间上有解的个数问题.

例 7.55 若曲线 $y = \ln x$ 与曲线 $y = x^2 + 2x + a (x < 0)$ 有公切线, 则实数 a 的取值范围是 ▲ .

解 设 $A(x_1, y_1)$ 是曲线 $y = \ln x$ 的切点, 则切线方程为 $y = \frac{1}{x_1} \cdot x + \ln x_1 - 1$;

设 $B(x_2, y_2)$ 是曲线 $y = x^2 + 2x + a (x < 0)$ 的切点, 则切线方程为 $y = (2x_2 + 2)x - x_2^2 + a$, 则

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} = 2x_2 + 2 \\ \ln x_1 - 1 = -x_2^2 + a \end{cases} \quad (7.13)$$

$$\ln x_1 - 1 = -x_2^2 + a \quad (7.14)$$

(7.13) 代入 (7.14) 得 $a = -\ln(2x_2 + 2) + x_2^2 - 1$, 又因为 $x_1 > 0$, 故 $-1 < x_2 < 0$, 设 $f(x) = -\ln(2x + 2) + x^2 - 1 (-1 < x < 0)$, 求导易知函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 且 $f(0) = \ln \frac{1}{2e}$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow +\infty$, 则 $f(x) \in (\ln \frac{1}{2e}, +\infty)$, 故实数 a 的取值范围是 $(\ln \frac{1}{2e}, +\infty)$.

例 7.56 若曲线 $y = ax^2 (a > 0)$ 与曲线 $y = e^x$ 有公切线, 则实数 a 的取值范围是 ▲ .

解 设 $A(x_1, y_1)$ 是曲线 $y = ax^2 (a > 0)$ 的切点, 则切线方程为 $y = 2ax_1x - ax_1^2$;

设 $B(x_2, y_2)$ 是曲线 $y = e^x$ 的切点, 则切线方程为 $y = e^{x_2}x + (1 - x_2)e^{x_2}$, 则

$$\begin{cases} 2ax_1 = e^{x_2} \\ ax_1^2 = (x_2 - 1)e^{x_2} \end{cases} \quad (7.15)$$

$$ax_1^2 = (x_2 - 1)e^{x_2} \quad (7.16)$$

消元得 $a = \frac{e^{x_2}}{4(x_2 - 1)}$, 易知 $x_1 > 0$, $x_2 > 1$, 设 $f(x) = \frac{e^x}{4(x - 1)} (x > 1)$, 求导易知函数 $f(x)$ 在

$(1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(2) = \frac{e^2}{4}$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow +\infty$, 则

$f(x) \in [\frac{e^2}{4}, +\infty)$, 故实数 a 的取值范围是 $[\frac{e^2}{4}, +\infty)$.

注 两曲线存在公切线求参数取值范围问题解题思路: 利用斜率和截距相等得到方程组后消去 x_1 或 x_2 中的一个, 转化为方程在特定区间上有解的问题, 再参变分离转化为相应函数值域问题, 其中要关注自变量的取值范围.

例 7.57 已知曲线 $y = e^x + a$ 与曲线 $y = x^2$ 恰有两条公切线, 则实数 a 的取值范围是 ()

(A) $[2\ln 2 - 2, +\infty)$ (B) $(2\ln 2, +\infty)$ (C) $(-\infty, 2\ln 2 - 2]$ (D) $(-\infty, 2\ln 2 - 2)$

解 设 $A(x_1, y_1)$ 是曲线 $y = e^x + a$ 的切点, 则切线方程为 $y = e^{x_1+a} \cdot x + e^{x_1+a}(1 - x_1)$;

设 $B(x_2, y_2)$ 是曲线 $y = x^2$ 的切点, 则切线方程为 $y = (2x_2)x - x_2^2$, 则

$$\begin{cases} e^{x_1+a} = 2x_2 > 0 \\ e^{x_1+a}(1 - x_1) = -x_2^2 \end{cases} \quad (7.17)$$

$$(7.18)$$

则 $2x_2(1 - x_1) = -x_2^2$, 即 $x_1 = 1 + \frac{x_2}{2}$, 于是关于 x_2 的方程

$$a = \ln(2x_2) - x_1 = \ln(2x_2) - 1 - \frac{x_2}{2} \quad (7.19)$$

在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同解, 设 $f(x) = \ln(2x) - 1 - \frac{x}{2} (x > 0)$, 求导易知函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow -\infty$, $f(2) = 2\ln 2 - 2$, 于是可得实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2\ln 2 - 2)$, 选 D.

7.7 巧“变”洛必达

我们在处理恒成立问题时, 若采用分离参数法, 在得出函数在区间上单调性后, 无法求出最值, 针对这种情况, 有人启用洛必达法则解决, 但因高中没有学习洛必达法则而受质疑, 干脆放弃分离参数的方法另谋它法, 进而采用分类讨论的方法进行求解. 本文使用了 **导数的定义**, 既避免了繁琐的分类讨论, 又没有使用超纲的洛必达法则, 且整个解答过程极为简洁, 无疑是一种值得推广的好方法.

例 7.58 【2016 新课标】已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$.

(1) 当 $a = 4$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 求 a 的取值范围.

解 (1) 所求切线方程为 $2x + y - 2 = 0$;

(2) 若当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$ 等价于 $a < \frac{(x+1)\ln x}{x-1}$.

设 $g(x) = \frac{(x+1)\ln x}{x-1}, (x > 1)$, 则 $g'(x) = \frac{\frac{x^2-1}{x} - 2\ln x}{(x-1)^2}$,

令 $h(x) = \frac{x^2-1}{x} - 2\ln x, (x > 1)$, 则 $h'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 于是 $h(x) > h(1) = 0$, 所以 $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

设 $\varphi(x) = (x+1)\ln x, (x>1)$, 则 $g(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1}$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} = \varphi'(x) \Big|_{x=1} = \left[\ln x + \frac{x+1}{x} \right] \Big|_{x=1} = 2 \quad (7.20)$$

所以 $a \leq \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$.

故 a 的取值范围 $(-\infty, 2]$.

例 7.59 【2012 大纲】已知函数 $f(x) = ax + \cos x, x \in [0, \pi]$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $f(x) \leq 1 + \sin x$, 求 a 的取值范围.

解 (2) $f(x) \leq 1 + \sin x$ 即 $ax \leq 1 + \sin x - \cos x$,

当 $x=0$ 时, 不等式成立;

当 $x>0$ 时, 参变分离, $a \leq \frac{1 + \sin x - \cos x}{x}$,

设 $g(x) = \frac{1 + \sin x - \cos x}{x}, (x \in [0, \pi])$, 则 $g'(x) = \frac{(\cos x + \sin x)x - 1 - \sin x + \cos x}{x^2}$,

令 $h(x) = (\cos x + \sin x)x - 1 - \sin x + \cos x$, 则 $h'(x) = (\cos x - \sin x)x$,

又 $x \in [0, \pi]$, 所以 $h'(0) = 0, h'(\frac{\pi}{4}) = 0$,

故 $h(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递增, 在 $(\frac{\pi}{4}, \pi)$ 上单调递减, 又 $h(0) = 0, h(\pi) = -\pi - 2 < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一零点 x_0 ,

于是 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 (x_0, π) 上单调递减, 设 $\varphi(x) = 1 + \sin x - \cos x$, 则

$g(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}$, 又 $g(\pi) = \frac{2}{\pi}$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(x) \Big|_{x=0^+} = [\cos x + \sin x] \Big|_{x=0^+} = 1$, 所以 $g(\pi) = \frac{2}{\pi}$ 是 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$

上的最小值, 故 $a \leq \frac{2}{\pi}$. 故 a 的取值范围 $(-\infty, \frac{2}{\pi}]$.

例 7.60 【2011 新课标】已知函数 $f(x) = \frac{a \ln x}{x+1} + \frac{b}{x}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x + 2y - 3 = 0$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若当 $x>0$ 且 $x \neq 1$ 时, $f(x) > \frac{\ln x}{x-1} + \frac{k}{x}$, 求 k 的取值范围.

解法一 (1) $a = b = 1$;

(2) 由 (1) 知 $f(x) - \left(\frac{\ln x}{x-1} + \frac{k}{x} \right) = \frac{1}{1-x^2} \left[2 \ln x + \frac{(k-1)(x^2-1)}{x} \right]$,

考虑函数 $h(x) = 2 \ln x + \frac{(k-1)(x^2-1)}{x}, (x>0)$, $h'(x) = \frac{(k-1)(x^2+1) + 2x}{x^2}$,

(i) 设 $k \leq 0$, 由 $h'(x) = \frac{k(x^2+1) - (x-1)^2}{x^2}$ 知, 当 $x \neq 1$ 时, $h'(x) < 0$, 而 $h(1) = 0$, 故:

$$\begin{cases} h(x) > 0 \Rightarrow \frac{1}{1-x^2}h(x) > 0, & x \in (0, 1) \\ h(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{1-x^2}h(x) > 0, & x \in (1, +\infty) \end{cases} \quad \text{从而当 } x > 0 \text{ 且 } x \neq 1 \text{ 时, } f(x) > \frac{\ln x}{x-1} + \frac{k}{x};$$

(ii) 设 $0 < k < 1$, 由于当 $x \in \left(1, \frac{1}{1-k}\right)$ 时, $(k-1)(x^2+1) + 2x > 0$, 故 $h'(x) > 0$, 而 $h(1) = 0$, 故当 $x \in \left(1, \frac{1}{1-k}\right)$ 时, $h(x) > 0 \Rightarrow \frac{1}{1-x^2}h(x) < 0$, 与题设矛盾;

(iii) 设 $k \geq 1$, 此时 $h'(x) > 0$, 而 $h(1) = 0$, 故当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x) > 0 \Rightarrow \frac{1}{1-x^2}h(x) < 0$, 与题设矛盾;

综上所述, k 的取值范围为 $(-\infty, 0]$.

解法二 (1) $a = b = 1$;

(2) 原不等式即 $k < \frac{-2x \ln x}{x^2-1} + 1 = \frac{-2x}{x^2-1} \left(\ln x - \frac{x^2-1}{2x} \right)$, 设 $g(x) = \ln x - \frac{x^2-1}{2x}$, 易知

① 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) > 0$, 此时 $\frac{-2x}{x^2-1}g(x) > 0$;

② 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) < 0$, 此时 $\frac{-2x}{x^2-1}g(x) > 0$.

因此当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $\frac{-2x}{x^2-1} \left(\ln x - \frac{x^2-1}{2x} \right) > 0$.

又 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x \ln x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{-2x \ln x}{x+1}}{\frac{x+1}{x-1}} = \left[\frac{-2x \ln x}{x+1} \right]' \Big|_{x=1} = -1$, 所以 $\frac{-2x \ln x}{x^2-1} + 1 > 0$,

故 k 的取值范围为 $(-\infty, 0]$.

7.8 双变量处理策略

函数中的双变量问题是近年高考中的“宠儿”, 题型多样, 方法多变, 对思维能力和运算能力要求较高.

7.8.1 A-L-G 不等式

定义 7.1: A-L-G 不等式

$$1. \text{ 对数型: } \forall a, b > 0, \text{ 定义 } L(a, b) = \begin{cases} \frac{a-b}{\ln a - \ln b}, & (a \neq b) \\ a, & (a = b) \end{cases}$$

$$\sqrt{ab} \leq L(a, b) \leq \frac{a+b}{2} \quad (7.21)$$

当且仅当 $a = b$ 时取等号.

2. 指数型: 当 $a \neq b$ 时

$$e^{\frac{a+b}{2}} < \frac{e^a - e^b}{a - b} < \frac{e^a + e^b}{2} \quad (7.22)$$

证 先证明 (7.21) 式右边, 不妨设 $a > b > 0$, 不等式等价于

$$2 \cdot \frac{a-b}{a+b} < \ln a - \ln b \Rightarrow \ln \frac{a}{b} - 2 \cdot \frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1} > 0$$

构造函数 $f(x) = \ln x - 2 \cdot \frac{x-1}{x+1}$ ($x > 1$). 于是 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$, 所以 $f(x)$ ($1, +\infty$) 单调递增, 故 $f(x) > f(1) = 0$,

于是 $\ln x > 2 \cdot \frac{x-1}{x+1}$.

再证左边, 不妨设 $0 < a < b$, 不等式等价于

$$\ln a - \ln b < \frac{a-b}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \ln \frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b} - 1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

构造函数 $g(x) = 2 \ln x - \left(x - \frac{1}{x}\right)$ ($x > 1$), 于是 $f'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x - x^2 - 1}{x^2} = \frac{-(x-1)^2}{x^2}$, 所以

$f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, 故 $f(x) < f(1) = 0$, 于是 $2 \ln x < \left(x - \frac{1}{x}\right)$.

$0 < x < 1$ 证法相同.

斜率型

例 7.61 已知函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$), 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 记过点 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ 的直线的斜率为 k , 问: 是否存在 a , 使得 $k = 2 - a$? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由.

解 求导后通分利用韦达定理知 $a > 2$ 且 $x_1 x_2 = 1$.

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 1 + \frac{1}{x_1 x_2} - a \cdot \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = 2 - a \cdot \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$$

若存在 a , 使得 $k = 2 - a$, 则 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = 1$, 即 $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = \sqrt{x_1 x_2}$, 与式 (7.21) 矛盾.

例 7.62 已知函数 $f(x) = \ln x + x^2 - ax$ ($a \in \mathbf{R}$), 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 记过点 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ 的直线的斜率为 k , 问: 是否存在 a , 使得 $k = \frac{2}{a} - \frac{a}{2}$? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由.

解 求导后通分利用韦达定理知 $x_1 + x_2 = \frac{a}{2}$ 且 $x_1 x_2 = \frac{1}{2}$.

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dots = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} - \frac{a}{2}$$

若存在 a , 使得 $k = \frac{2}{a} - \frac{a}{2}$, 则 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = \frac{2}{a} = \frac{1}{x_1 + x_2}$, 而 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2} > \frac{1}{x_1 + x_2}$, 矛盾.

例 7.63 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (2-a)x$, 若函数 $f(x)$ 图象与 x 轴交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 x_0 , 证明: $f'(x_0) < 0$.

证 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax + 2 - a$, 设函数的零点分别为 x_1, x_2 ($x_1 > x_2 > 0$), 则

$$\begin{cases} \ln x_1 - ax_1^2 + (2-a)x_1 = 0 \\ \ln x_2 - ax_2^2 + (2-a)x_2 = 0 \end{cases}$$

两式相减得 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = a(x_1 + x_2) + a - 2$. 所以

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{2}{x_1 + x_2} - (a(x_1 + x_2) + a - 2) \\ &= \frac{2}{x_1 + x_2} - \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} \Rightarrow f'(x_0) < 0 \end{aligned}$$

例 7.64 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2 + (a+2)x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a < 0$, 若不相等的两个正数 x_1, x_2 满足 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$.

证 (1) 具体方法详见本书第 281 页第 7.5 节; (2) 依题意

$$f(x_1) - f(x_2) = 0 \Rightarrow a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} + (a+2) + (x_1 + x_2) = 0 \quad (7.23)$$

又

$$f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{2a}{x_1 + x_2} + (x_1 + x_2) + (a+2) \quad (7.24)$$

把 (7.23) 代入 (7.24) 得

$$f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = a \left(\frac{2}{x_1 + x_2} - \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} \right) > 0 \quad (7.25)$$

例 7.65 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2}ax - b$, $g(x) = ax^2 + bx$, 若函数 $y = f(x)$ 的两个零点分别为 x_1, x_2 , 且 $x_1 \neq x_2$, 证明: $g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 1$.

证 依题意 $\begin{cases} f(x_1) = 0 \Rightarrow \ln x_1 - \frac{1}{2}ax_1^2 - bx_1 = 0 \\ f(x_2) = 0 \Rightarrow \ln x_2 - \frac{1}{2}ax_2^2 - bx_2 = 0 \end{cases}$ 两式做差得

$$\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} - \frac{1}{2}a(x_1 + x_2) - b = 0 \quad (7.26)$$

所以

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 1 \quad (7.27)$$

例 7.66 已知函数 $f(x) = x - a \ln x$, 若 $0 < x_1 < x_2$, $a \neq 0$, $f'(t) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ($x_1 < t < x_2$), 证明: $t < \frac{x_1 + x_2}{2}$.

证 依题意 $\begin{cases} f'(t) = 1 - \frac{a}{t} \\ f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1 - a(\ln x_2 - \ln x_1) \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 1 - a \cdot \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} \end{cases}$

$$\text{即 } 1 - \frac{a}{t} = 1 - a \cdot \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow t = \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1}.$$

所以只需证 $\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} < \frac{x_1 + x_2}{2}$. 相信大家都已经看到黎明的曙光了!

对数和反比例函数

例 7.67 已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{x} - \ln x$, 若存在 $x_1 < x_2$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 求证: $x_1 + x_2 > 2$.

证 由 $f(x_1) = f(x_2)$ 可得 $\frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{\ln \frac{1}{x_1} - \ln \frac{1}{x_2}} = 1$, 由 A-L-G 不等式有 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$, 再由权方和不等式,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{4}{x_1 + x_2} \Rightarrow \frac{4}{x_1 + x_2} < 2 \Rightarrow x_1 + x_2 > 2$$

对数和二次函数

例 7.68 已知函数 $f(x) = x^2 - x - \ln x$, 若存在 $x_1 < x_2$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 求证: $x_1 + x_2 > 2$.

证 由 $f(x_1) = f(x_2)$ 可得

$$x_1^2 - x_1 - \ln x_1 = x_2^2 - x_2 - \ln x_2 \Rightarrow \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2 - 1}$$

由 A-L-G 不等式有 $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2 - 1} < \frac{x_1 + x_2}{2}$, 接下来将 $x_1 + x_2$ 看成一个整体,

$$\frac{1}{x_1 + x_2 - 1} < \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow (x_1 + x_2 - 2)(x_1 + x_2 + 1) > 0 \Rightarrow x_1 + x_2 > 2$$

例 7.69 已知函数 $f(x) = 2 \ln x - (a+1)x^2 - 2ax + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点为 x_1, x_2 , (i) 求实数 a 的取值范围; (ii) 求证: $x_1 + x_2 > 2\sqrt{\frac{1}{a+1}}$.

解 (1) ① 当 $a \leq -1$ 时, $(0, +\infty)$ 是函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

② 当 $a > -1$ 时, $(0, \frac{1}{a+1})$ 是函数 $f(x)$ 的单调递增区间, $(\frac{1}{a+1}, +\infty)$ 是函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

(2) (i) $-1 < a < 0$; (ii) 由 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 可得 $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = \frac{2}{(a+1)(x_1 + x_2) + 2a}$, 由 A-L-G 不等式有 $\frac{2}{(a+1)(x_1 + x_2) + 2a} < \frac{x_1 + x_2}{2}$, 接下来将 $x_1 + x_2$ 看成一个整体,

$$\frac{2}{(a+1)(x_1 + x_2) + 2a} < \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow [(x_1 + x_2) + 2][(a+1)(x_1 + x_2) - 2] > 0 \Rightarrow x_1 + x_2 > 2$$

因为 $(x_1 + x_2) + 2 > 0$, $-1 < a < 0$, 所以解得 $x_1 + x_2 > \frac{2}{a+1}$, 因为 $a+1 > 1$, 所以

$$\frac{2}{a+1} > 2\sqrt{\frac{1}{a+1}}, \text{ 因此 } x_1 + x_2 > 2\sqrt{\frac{1}{a+1}}.$$

指数型

例 7.70 记函数 $f(x) = e^x$ 的图象为 C , 函数 $g(x) = kx - k$ 的图象为 l , 若图象 C 与直线 l 有两个不同的交点 A, B , 其横坐标分别是 x_1, x_2 , 设 $x_1 < x_2$, 求证: $x_1 x_2 < x_1 + x_2$.

解法一 依题意知

$$\begin{cases} e^{x_1} = k(x_1 - 1) \\ e^{x_2} = k(x_2 - 1) \end{cases} \quad (7.28)$$

$$\begin{cases} e^{x_1} = k(x_1 - 1) \\ e^{x_2} = k(x_2 - 1) \end{cases} \quad (7.29)$$

(7.29) - (7.28) 得 $e^{x_2} - e^{x_1} = k(x_2 - x_1)$, 又 $x_1 < x_2$, 所以 $k = \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} > 0$,

(7.29) $\times$ (7.28) 得 $e^{x_1 + x_2} = k^2(x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1)$,

要证 $x_1 x_2 < x_1 + x_2$, 只需证 $x_1 x_2 - x_1 - x_2 = \frac{e^{x_1+x_2}}{k^2} - 1 < 0$, 即证 $e^{x_1+x_2} < k^2 = \left(\frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}\right)^2$, 即证 $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}$. 此即 A-L-G 不等式.

解法二 由式 (7.28), (7.29) 知 $k = \frac{e^{x_1}}{x_1 - 1} = \frac{e^{x_2}}{x_2 - 1} = \frac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{\sqrt{(x_1-1)(x_2-1)}} = \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}$, 由 A-L-G 不等式知 $\frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} > e^{\frac{x_1+x_2}{2}}$, 故 $\sqrt{(x_1-1)(x_2-1)} < 1$, 即 $(x_1-1)(x_2-1) < 1$, 即 $x_1 x_2 < x_1 + x_2$.

解法三 依题可知 $1 < x_1 < x_2$, $\frac{(7.29)}{(7.28)}$ 得 $e^{x_2-x_1} = \frac{x_2-1}{x_1-1}$, 两边取对数,

$$x_2 - x_1 = \ln(x_2 - 1) - \ln(x_1 - 1) \Rightarrow \frac{(x_2 - 1) - (x_1 - 1)}{\ln(x_2 - 1) - \ln(x_1 - 1)} = 1$$

由 A-L-G 不等式可得 $\sqrt{(x_1-1)(x_2-1)} < \frac{(x_2-1) - (x_1-1)}{\ln(x_2-1) - \ln(x_1-1)} = 1$, 整理即得 $x_1 x_2 < x_1 + x_2$.

例 7.71 已知函数 $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;
- (2) 若函数 $y = g(x)$ 对任意 x 满足 $g(x) = f(4-x)$, 求证: 当 $x > 2$ 时, $f(x) > g(x)$;
- (3) 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 求证: $x_1 + x_2 > 4$.

解 (1) $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 内是增函数, 在 $(2, +\infty)$ 内是减函数. 极大值 $f(2) = \frac{1}{e^2}$;

(2) 易知 $g(x) = \frac{3-x}{e^{4-x}}$, 令

$$F(x) = f(x) - g(x) = \frac{x-1}{e^x} - \frac{3-x}{e^{4-x}} \Rightarrow F'(x) > 0 \Rightarrow F(x) \nearrow \Rightarrow F(x) > F(2) = 0$$

(3) 证明: 由等比性质 $\frac{e^{x_1}}{x_1-1} = \frac{e^{x_2}}{x_2-1} = \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{x_1 + x_2 - 2} = \frac{e^{x_1} - e^{x_2}}{x_1 - x_2} < \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 > 4$.

7.8.2 极值点偏移

对称构造函数法解题思路一

如果 $f(x_1) = f(x_2)$, 对结论为 $x_1 + x_2 > 2m$ 或 $x_1 + x_2 < 2m$ 的问题, 可以构造函数 $g(x) = f(2m - x)$.

例 7.72 【2016 全国卷 I 理科】函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ 有两个零点.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1 + x_2 < 2$.

解 (1) 由于 $x = 1$ 不是 $f(x)$ 的零点, 参变分离, 设 $h(x) = \frac{(2-x)e^x}{(x-1)^2}$, 则 $h'(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}$, 从而当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 从而可得到 $y = h(x)$ 的图像如图 7.34 所示, 故当 $a \leq 0$ 时直线 $y = a$ 与曲线 $y = h(x)$ 没有两个交点; 当 $a > 0$ 时, 直线 $y = a$ 与曲线 $y = h(x)$ 有两个交点, 所以 $f(x)$ 有两个零点, 从而可得 a 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

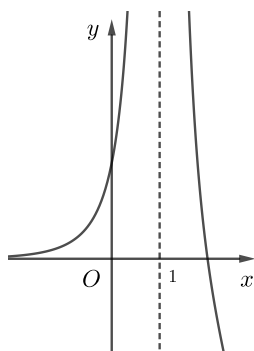


图 7.25

(2) 不妨设 $x_1 < x_2$, 因为 $f(x_1) = f(x_2)$, 可知 $x_1 < 1 < x_2$, 且 $2 - x_2 \in (-\infty, 1)$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减, 所以 $x_1 + x_2 < 2$ 等价于 $f(x_1) > f(2 - x_2)$, 即 $f(2 - x_2) < 0$, 由于

$$\begin{cases} f(2 - x_2) = -x_2 e^{2-x_2} + a(x_2 - 1)^2 \\ f(x_2) = (x_2 - 2)e^{x_2} + a(x_2 - 1)^2 = 0 \end{cases} \quad (7.30)$$

$$(7.31)$$

所以 $f(2 - x_2) = -x_2 e^{2-x_2} - (x_2 - 2)e^{x_2}$, 设 $g(x) = -x e^{2-x} - (x - 2)e^x$, 则 $g'(x) = (x - 1)(e^{2-x} - e^x)$, 所以当 $x > 1$ 时 $g'(x) < 0$, 而 $g(1) = 0$, 故当 $x > 1$ 时 $g(x) < 0$, 从而 $g(x_2) = f(2 - x_2) < 0$, 故 $x_1 + x_2 < 2$.

整体法解偏移

如果 $f(x_1) + f(x_2) = n$, 对结论为 $x_1 + x_2 > 2m$ 或 $x_1 + x_2 < 2m$ 的问题, 可以把 $x_1 + x_2$ 整体处理.

例 7.73 函数 $f(x) = 2 \ln x + x^2 + x$, 正数 x_1, x_2 满足 $f(x_1) + f(x_2) = 4$, 证明: $x_1 + x_2 \geq 2$.

解 依题意

$$f(x_1) + f(x_2) = 4 \Leftrightarrow 2 \ln(x_1 x_2) + x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln(x_1 x_2) + (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) = 4 - 2 \ln(x_1 x_2) + 2x_1 x_2$$

令 $t = x_1 x_2 \in (0, +\infty)$, 则 $(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) = 4 - 2 \ln t + 2t$, 设 $h(t) = 4 - 2 \ln t + 2t$, ($t > 0$), 利用导数可得 $h(t) \geq h(1) = 6$, 故 $(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) \geq 6$, 解得 $x_1 + x_2 \geq 2$ 或 $x_1 + x_2 \leq -3$ (舍去).

变式训练 EXERCISES

55. 已知函数 $f(x) = 2 \ln x + x^2 - 1$, 两不等正数 x_1, x_2 满足 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

56. 已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $g(x) = f(x) - x$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 试判断 $x_1 + x_2$ 与 $x_1 \cdot x_2$ 的大小关系并证明.

57. 【多选】关于函数 $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$, 下列判断正确的是 ()

(A) $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(B) 函数 $y = f(x) - x$ 有且只有 1 个零点

(C) 存在正实数 k , 使得 $f(x) > kx$ 成立

(D) 对任意两个正实数 x_1, x_2 , 且 $x_1 > x_2$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 + x_2 > 4$

58. 已知函数 $f(x) = \ln x + \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 - 2ax$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 在定义域内是增函数, 且存在不相等的正实数 x_1, x_2 , 使得 $f(x_1) + f(x_2) = -3$, 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

7.8.3 “切割线夹”秒解零点差

割线夹

如图 7.26, 可得 $x_2 - x_1 > x_4 - x_3$.

切线夹

如图 7.27, 可得 $x_2 - x_1 < x_4 - x_3$.

一切一割

如图 7.28, 可得 $x_1 + x_2 < x_3 + x_4$.

注 作割线时考虑极值点, 作切线时切点多为图象与 x 轴的交点, 具体怎么割? 怎么切? 要根据题目来反演.

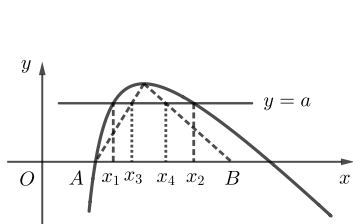


图 7.26

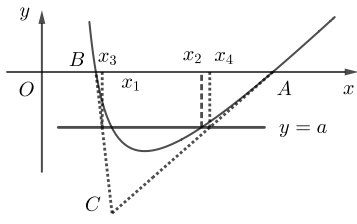


图 7.27

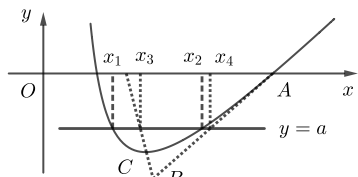


图 7.28

例 7.74 【2021 新高考一卷】已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a, b 为两个不相等的正数, 且 $b \ln a - a \ln b = a - b$, 证明: $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.

解 (1) $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减.

(2) 对式子 $b \ln a - a \ln b = a - b$ 变形得 $\frac{1}{a} \left(1 - \ln \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{b} \left(1 - \ln \frac{1}{b}\right)$,

令 $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = \frac{1}{b}$, 则 x_1, x_2 为 $f(x) = k$ 的两根, 其中 $k \in (0, 1)$. 所以 $f(x_1) = f(x_2)$,

要证 $x_1 + x_2 > 2$,

解法一 对称性构造法

构造奇函数 $G(x) = f(1+x) - f(1-x)$, $x \in (0, 1)$, 则

$$G'(x) = f'(1+x) + f'(1-x) = -\ln(1+x) - \ln(1-x) = -\ln(1-x^2) > 0$$

所以 $G(x)$ 单调递增, 从而 $G(x) > G(0) = 0$, 故 $f(1+x) > f(1-x)$,

令 $x = 1 - x_1 \in (0, 1)$, 则可得 $f(2 - x_1) > f(x_1) = f(x_2)$, 又因为 $2 - x_1 \in (1, e)$, $x_2 \in (1, e)$, 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, 故 $2 - x_1 < x_2$, 即 $x_1 + x_2 > 2$.

解法二 妙用“1”构造同构式法

由 $f(x_1) = f(x_2)$ 得 $x_1(1 - \ln x_1) = x_2(1 - \ln x_2)$, 变形得

$$\frac{x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1}{x_2 - x_1} = 1$$

注意到 $0 < x_1 < 1 < x_2 < e$, 要证明 $x_1 + x_2 > 2$, 即证明 $x_1 + x_2 > 2 \cdot \frac{x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1}{x_2 - x_1}$, 即证

$$x_2^2 - 2x_2 \ln x_2 > x_1^2 - 2x_1 \ln x_1.$$

令 $g(x) = x^2 - 2x \ln x$, 易知 $g'(x) = 2(x - \ln x - 1) > 0$, 所以 $g(x)$ 单调递增, 故 $g(x_2) > g(x_1)$, 从而 $x_1 + x_2 > 2$.

解法三 引参消元构造法

设 $x_2 = tx_1$ ($t > 1$), 由 $f(x_1) = f(x_2)$ 得 $x_1(1 - \ln x_1) = x_2(1 - \ln x_2) = tx_1(1 - \ln tx_1)$, 整理得

$\ln x_1 = 1 - \frac{t \ln t}{t-1}$, 所以

$$x_1 + x_2 > 2 \Leftrightarrow (1+t)x_1 > 2 \Leftrightarrow \ln(1+t) + \ln x_1 > \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+t) + 1 - \frac{t \ln t}{t-1} > \ln 2$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\ln(1+t) - t \ln t + (1-\ln 2)(t-1) > 0$$

设 $g(t) = (t-1)\ln(1+t) - t \ln t + (1-\ln 2)(t-1)$, $t > 1$, 则

$$g'(t) = \ln(1+t) + \frac{t-1}{1+t} - \ln t - \ln 2$$

因为 $g''(t) = \frac{t-1}{t(1+t)^2} > 0$, 所以 $g'(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g'(t) > g'(1) = 0$, 从而 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(t) > g(1) = 0$, 故 $x_1 + x_2 > 2$.

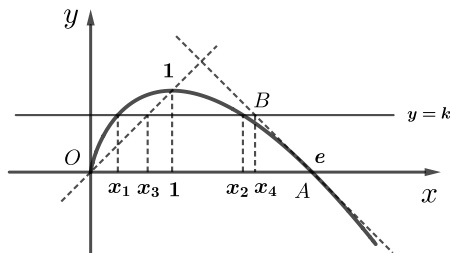


图 7.29

要证 $x_1 + x_2 < e$,

解法四

分析 即证 $x_3 + x_4 = e$, 易知 $x_3 = k$, 故 $x_4 = e - k$, 于是过点 AB 直线方程为 $y = -x + e$, 为了说明直线 AB 在函数 $f(x)$ 图象的上方, 只需求导证明 $h(x) = (-x + e) - f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 恒正即可. 此乃切线.

$$\therefore 2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e.$$

解法五 单侧取点放缩

因为 $0 < x_1 < 1$, 所以 $1 - \ln x_1 > 1$, 又因为 $f(x_1) = f(x_2)$, 故可得

$$x_1 < x_1(1 - \ln x_1) = f(x_1) = f(x_2) = x_2(1 - \ln x_2)$$

所以 $x_1 + x_2 < x_2(1 - \ln x_2) + x_2$, 要证 $x_1 + x_2 < e$, 只需证 $x_2(1 - \ln x_2) + x_2 < e$, 即证 $2x_2 - x_2 \ln x_2 - e < 0$,

令 $g(x) = 2x - x \ln x - e$, $x \in (1, e)$, 则 $g'(x) = 1 - \ln x > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增, 又 $1 < x_2 < e$, 故 $g(x_2) < g(e) = 0$, 即 $x_2(1 - \ln x_2) + x_2 < e$, 从而可得 $x_1 + x_2 < e$.

解法六 引参消元构造法

设 $x_2 = tx_1$ ($t > 1$), 由 $f(x_1) = f(x_2)$ 得 $x_1(1 - \ln x_1) = x_2(1 - \ln x_2) = tx_1(1 - \ln tx_1)$, 整理得 $\ln x_1 = 1 - \frac{t \ln t}{t-1}$, 所以

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 < e &\Leftrightarrow (1+t)x_1 < e \Leftrightarrow \ln(1+t) + \ln x_1 < 1 \\ &\Leftrightarrow \ln(1+t) + 1 - \frac{t \ln t}{t-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{\ln(1+t)}{t} < \frac{\ln t}{t-1} \end{aligned}$$

设 $h(t) = \frac{\ln t}{t-1}$ ($t > 1$), 则 $h'(t) = \frac{t-1-t \ln t}{t(t-1)^2}$,

设 $\varphi(t) = t-1-t \ln t$ ($t > 1$), 则 $\varphi'(t) = -\ln t < 0$, 所以 $\varphi(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 则 $\varphi(t) < \varphi(1) = 0$, 故 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 于是 $h(t+1) < h(t)$, 即 $\frac{\ln(1+t)}{t} < \frac{\ln t}{t-1}$ 成立, 从而可得 $x_1 + x_2 < e$.

7.9 同构换元秒解导数题

7.9.1 反函数

定义 7.2: 反函数

函数 $f(x)$ 的定义域和值域分别是函数 $g(x)$ 的值域和定义域, 且一一对应, 则这两个函数互为反函数, 它们的图象关于直线 $y = x$ 对称. 我们记 $g(x)$ 为 $f^{-1}(x)$.

推论 7.4. 函数 $f(x) = a^x$ 和 $g(x) = \log_a x$ 互为反函数 ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

例 7.75 已知 $\lambda > 0$, 对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $e^{2\lambda x} - \frac{\ln x}{2\lambda} \geq 0$ 恒成立, 则 λ 的最小值为 .

解 易知函数 $y = e^{2\lambda x}$ 的反函数为 $y = \frac{\ln x}{2\lambda}$, 对称轴为 $y = x$, 则原不等式等价于 $e^{2\lambda x} \geq x$ 恒成立, 所以 $2\lambda \geq \frac{\ln x}{x}$ 恒成立, 即 $\lambda \geq \frac{1}{2e}$.

例 7.76 已知 $t > 0$, 对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $e^{2tx} - \frac{\ln 2 + \ln x}{t} \geq 0$ 恒成立, 则 t 的取值范围为 .

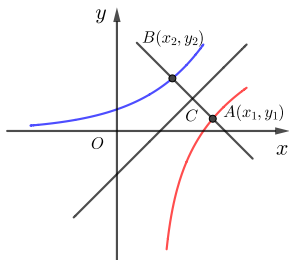
例 7.77 【2020 山东改编】对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $ae^{x-1} - \ln x + \ln a \geq 1$ 恒成立, 则 a 的取值范围为 .

解 原不等式化为不等式 $ae^{x-1} \geq \ln \frac{x}{a} + 1$ 恒成立, 易知函数 $y = ae^{x-1}$ 的反函数为 $y = \ln \frac{x}{a} + 1$, 对称轴为 $y = x$, 则原不等式等价于 $ae^{x-1} \geq x$ 恒成立, 即 $a \geq \frac{x}{e^{x-1}}$ 恒成立, 即 $a \geq 1$.

例 7.78 对任意的 $x \in (-2, +\infty)$, 不等式 $ae^x + \ln a > 2 + \ln(x+2)$ 恒成立, 则 a 的取值范围为 ▲ .

解 原不等式化为不等式 $ae^x - 2 > \ln \frac{x+2}{a}$ 恒成立, 易知函数 $y = ae^x - 2$ 的反函数为 $y = \ln \frac{x+2}{a}$, 对称轴为 $y = x$, 则原不等式等价于 $ae^x - 2 > x$ 恒成立, 即 $a > \frac{x+2}{e^x}$ 恒成立, 即 $a > e$.

例 7.79 若 x_1 满足 $2x + 2^x = 5$, x_2 满足 $2x + 2\log_2(x-1) = 5$, 则 $x_1 + x_2 =$ ▲ .



解 依题意, $2^x = 5 - 2x$, $2\log_2(x-1) = 5 - 2x$, 即 $2^{x-1} = \frac{5}{2} - x$, $\log_2(x-1) = \frac{5}{2} - x$, 函数 $y = 2^{x-1}$, $y = \log_2(x-1)$ 分别是由函数 $y = 2^x$, $y = \log_2 x$ 向右平移一个单位得到的, 由反函数定义可得它们的图象关于直线 $y = x - 1$ 对称.

故直线 $y = \frac{5}{2} - x$ 和 $y = x - 1$ 的交点的横坐标即为 $x_1 + x_2$ 的一半, 答案为 $\frac{7}{2}$.

推论 7.5. 函数 $y = e^x - a, (x \geq 0)$ 和 $y = \ln(x + a), (x \geq 0)$ 互为反函数.

例 7.80 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $(e^x - 1) \cdot \ln(x+1) \geq x^2$.

证 易知 $x = 0$ 时等号成立;

当 $x > 0$ 时采用隔离放缩方法, 由泰勒展开式得到启发, 得到 $e^x - 1 > x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{x(x+2)}{2}$, 故只

需证明 $\ln(x+1) \geq \frac{2x}{x+2}$, 令 $g(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} (x > 0)$, 利用求导易知 $g(x)$ 单调递增, 故

$g(x) > g(0) = 0$, 故 $\ln(x+1) \geq \frac{2x}{x+2}$, 于是 $(e^x - 1) \cdot \ln(x+1) > x^2$.

综上所述可知当 $x \geq 0$ 时, $(e^x - 1) \cdot \ln(x+1) \geq x^2$.

推论 7.6. 函数 $y = e^{x-1}$ 和 $y = 1 + \ln x$ 互为反函数.

例 7.81 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$.

(1) 当 $x > 0$ 时, 恒有 $f(x) > 0$, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: 当 $x > 1$ 时, $e^x(1 + \ln x) > ex^2$.

解 (1) 见第 301 页例 7.88.

(2)

解法一 由 (1) 知 $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, 故 $e^{x-1} > x + \frac{1}{2}(x-1)^2$, 又 $e^x(1 + \ln x) > ex^2 \Leftrightarrow e^{x-1} > \frac{x^2}{1 + \ln x}$, 故只需证明: $x \in (1, +\infty)$ 时, $\frac{x^2 + 1}{2} > \frac{x^2}{1 + \ln x}$, 即证: $x \in (1, +\infty)$ 时, $\ln x > \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, 此即本书第 303 页不等式链 (7.48).

解法二 $e^x(1 + \ln x) > ex^2 \Leftrightarrow \frac{e^{x-1}}{x} > \frac{x}{1 + \ln x}$, 设 $h(x) = \frac{e^{x-1}}{x}$, 则 $h(1 + \ln x) = \frac{x}{1 + \ln x}$, 于是 $\frac{e^{x-1}}{x} > \frac{x}{1 + \ln x} \Leftrightarrow h(x) > h(1 + \ln x)$, 易知 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且当 $x > 1$ 时, $1 + \ln x > 1$, 故只需证明 $x > 1 + \ln x$, 此即本书第 301 页不等式 (7.32).

7.9.2 同构换元解导数题

例 7.82 【2014 新课标乙卷】设函数 $f(x) = ae^x \ln x + \frac{be^{x-1}}{x}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = e(x - 1) + 2$.

(1) 求 a, b ; (2) 证明 $f(x) > 1$.

解 (1) $a = 1, b = 2$; (2) 由 (1) 知 $f(x) = e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x}$, 从而

$$f(x) - 1 = e^x \ln x + \frac{1}{x}e^{x-1} + \frac{1}{x}e^{x-1} - 1 = e^x \left(\frac{1}{ex} + \ln x \right) + \frac{1}{x}(e^{x-1} - x)$$

设 $g(x) = \frac{x}{e} - \ln x$, 则 $f(x) - 1 = e^x g\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}g(e^x)$, 求导易知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最小值为 $g(e) = 0$, 所以 $g(x) \geq 0$, 等号当且仅当 $x = e$ 时成立.

由于 $\frac{1}{x}$ 和 e^x 不同时为 e , 所以 $e^x g\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}g(e^x) > 0$, 即 $f(x) > 1$.

预备知识

1. 函数 $y = x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 值域为 $(-\infty, +\infty)$;
2. 函数 $y = xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 值域为 $(0, +\infty)$;
3. $e^x \geq x + 1 (x \in \mathbf{R})$, 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立

例 7.83 证明不等式 $\frac{1}{xe^x} + x + \ln x \geq 1$.

解法一 令 $t = x + \ln x (t \in \mathbf{R})$, 则 $\frac{1}{xe^x} = e^{-(x+\ln x)} = e^{-t}$, 于是

$$\frac{1}{xe^x} + x + \ln x \geq 1 \Leftrightarrow e^{-t} + t \geq 1 \Leftrightarrow e^{-t} - (-t) - 1 \geq 0$$

由预备知识 3 知其显然成立, 于是命题得证.

解法二 令 $t = xe^x$ ($t > 0$), 则 $\ln t = \ln(xe^x) = x + \ln x$, 于是

$$\frac{1}{xe^x} + x + \ln x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{t} + \ln t \geq 1 \Leftrightarrow e^{\ln \frac{1}{t}} - \ln \frac{1}{t} - 1 \geq 0$$

由预备知识 3 知其显然成立, 于是命题得证.

例 7.84 讨论函数 $f(x) = xe^x - a(x + \ln x)$ 的零点个数.

解 令 $t = xe^x$ ($t > 0$), 则 $\ln t = \ln(xe^x) = x + \ln x$, 由预备知识 2 知函数 $y = xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 所以函数 $f(x) = xe^x - a(x + \ln x)$ 的零点个数 $\Leftrightarrow t - a \ln t = 0$ 的根的个数 $\Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{\ln t}{t}$ 的根的个数 $\Leftrightarrow$ 直线 $y = \frac{1}{a}$ 与曲线 $y = \frac{\ln t}{t}$ 的交点个数,

于是当 $0 \leq a < e$ 时, $f(x)$ 无零点; 当 $a > e$ 时, $f(x)$ 有两个零点; 当 $a = e$ 或 $a < 0$ 时, $f(x)$ 有一个零点.

例 7.85 【2016 湖南改编】已知函数 $f(x) = e^{mx-1} - \frac{\ln x}{x}$ ($m \in \mathbf{R}$) 的最小值为 m , 求 m 的最小值.

解 依题意 $e^{mx-1} - \frac{\ln x}{x} \geq m$ 且可使等号成立 $\Leftrightarrow xe^{mx-1} - \ln x \geq mx$ 且可使等号成立
 $\Leftrightarrow e^{mx+\ln x-1} \geq mx + \ln x$ 且可使等号成立,

令 $t = mx + \ln x - 1$, 则 $e^{mx+\ln x-1} \geq mx + \ln x \Leftrightarrow e^t \geq t + 1$, 由预备知识 3 知取等的条件为 $t = 0$,
 即 $m = \frac{1 - \ln x}{x}$,

由导数知识易求得 m 的最小值为 $-\frac{1}{e^2}$.

例 7.86 证明不等式 $e^x + ex \ln x \geq ex^2$.

解 依题意 $e^x + ex \ln x \geq ex^2 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} \geq e(x - \ln x)$, 令 $t = \frac{e^x}{x}$, 则 $t \geq e$, 且 $\ln t = x - \ln x$, 即证
 $\frac{1}{e} \geq \frac{\ln t}{t}$, 由导数知识易证.

例 7.87 【2022 全国甲卷改编】已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x + x - a \geq 0$, 求实数 a 的取值范围

解 依题意 $\frac{e^x}{x} - \ln x + x - a \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} - \ln x + x \geq a$, 令 $t = \frac{e^x}{x}$, 则 $t \geq e$, 且 $\ln t = x - \ln x$, 即
 $t - \ln t \geq a$, 由导数知识易知 $a \leq e - \ln e = e - 1$.

7.10 不等式链

7.10.1 子依母怀

先来几个最基本的不等式：

$$\begin{cases} \ln x \leq x - 1, (x > 0) \\ e^x \geq x + 1 \end{cases} \quad (7.32)$$

$$\begin{cases} \ln x \leq x - 1, (x > 0) \\ e^x \geq x + 1 \end{cases} \quad (7.33)$$

例 7.88 【2010 理科全国卷】已知 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$.

(1) 若 $a = 0$, 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若当 $x \geq 0$ 时 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

解 (1) $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增；

(2) $f'(x) = e^x - 1 - 2ax$, 由 (1) 知 $e^x \geq 1 + x$, 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立, 故

$$f'(x) \geq x - 2ax = (1 - 2a)x \quad (7.34)$$

从而当 $1 - 2a \geq 0$, 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \geq 0$, 而 $f(0) = 0$, 于是当 $x \geq 0$ 时 $f(x) \geq 0$.

由 $e^x > 1 + x$ 可得 $e^{-x} > 1 - x$, 从而当 $a > \frac{1}{2}$ 时,

$$f'(x) < e^x - 1 + 2a(e^{-x} - 1) = e^{-x}(e^x - 1)(e^x - 2a) \quad (7.35)$$

故当 $x \in (0, \ln 2a)$ 时, $f'(x) < 0$, 而 $f(0) = 0$, 于是当 $x \in (0, \ln 2a)$ 时, $f(x) < 0$.

综上可得 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

由式 (7.32) 知 $\ln x < x$. 式 (7.32) 中 $x \rightarrow \frac{x}{e}$ 知

$$\ln x \leq \frac{1}{e}x \quad (7.36)$$

由式 (7.32) 及 $x - 1 \leq x^2 - x$ 知

$$\ln x \leq x^2 - x, (x > 0) \quad (7.37)$$

式 (7.32) 中 $x \rightarrow \frac{1}{x}$ 知

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, (x > 0) \quad (7.38)$$

由式 (7.32) 可得 $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$, 它和式 (7.32) 相加可得,

$$\ln x \leq \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right), (x \geq 1) \quad (7.39)$$

对式 (7.38) 积分, $x \ln x - x \geq x - \ln x + C$, 取零点 $x = 1$ 知 $C = -2$, 故

$$x \ln x - x \geq x - \ln x - 2 \Rightarrow \ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1}, (x \geq 1) \quad (7.40)$$

式 (7.39) 中 $x \rightarrow e^x$ 知

$$e^x - e^{-x} - 2x \geq 0, (x \geq 0) \quad (7.41)$$

式 (7.37) 中 $x \rightarrow e^x$ 知

$$e^{2x} - e^x - x \geq 0 \quad (7.42)$$

式 (7.33) 中积分知

$$e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2, (x \geq 0) \quad (7.43)$$

式 (7.43) 中 $x \rightarrow x-1$ 知

$$e^x \geq ex + \frac{1}{2}(x-1)^2 \geq ex + \frac{1}{2}(x-1)^2, (x \geq 0) \quad (7.44)$$

式 (7.36) 知

$$\ln x \leq \frac{1}{e}x < \frac{1}{2}x \Rightarrow e^x > x^2 \quad (7.45)$$

7.10.2 换汤不换药

我们熟知正切双曲函数 $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ 的一条切线方程为 $y = \frac{1}{2}x$, 所以我们可得当 $x > 0$ 时, 有

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} < \frac{1}{2}x \Rightarrow e^x(x-2) + (x+2) > 0 \quad (7.46)$$

当 $x < 0$ 时, 有

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} > \frac{1}{2}x \Rightarrow e^x(x-2) + (x+2) < 0 \quad (7.47)$$

例 7.89 【全国卷改编】已知 $f(x) = e^x - e^{-x}$, 若对所有 $x \geq 0$ 都有 $f(x) \geq ax$, 求 a 的取值范围.

解 当 $x = 0$ 时, $a \in \mathbf{R}$ 等号成立, 当 $x > 0$ 时, 由 $f(x) \geq ax$ 知, $a \leq \frac{e^x - e^{-x}}{x} \triangleq g(x)$, 求导可得

$$g'(x) = \frac{e^{2x}(x-1) + (x+1)}{e^x x^2} (x > 0), \text{ 由式 (7.46) 易知 } g'(x) > 0,$$

$\therefore a \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = [e^x - e^{-x}]' \Big|_{x=0} = 2$, 所以 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 有

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < \frac{2(x-1)}{x+1} < \ln x < \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \quad (7.48)$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, 有

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) < \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} < \ln x < \frac{2(x-1)}{x+1} < \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad (7.49)$$

例 7.90 本书第 286 页例 7.60.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 由式 (7.48) 有

$$\ln(1+x) < \sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad (7.50)$$

当 $x \in (-1, 0)$ 时, 由式 (7.49) 有

$$\ln(1+x) > \sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad (7.51)$$

例 7.91 【湖南改编】已知 $f(x) = \ln^2(1+x) - \frac{x^2}{1+x}$, 求 $f(x)$ 的单调区间.

解 $f'(x) = \frac{2 \ln(1+x)}{1+x} - \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, 由式 (7.51) 有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \ln(1+x)}{1+x} - \frac{x(x+2)}{(1+x)^2} > \frac{2}{1+x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \frac{x(x+2)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{2x\sqrt{1+x} - x(x+2)}{(1+x)^2} = \frac{-x(\sqrt{1+x} - 1)^2}{(1+x)^2} > 0 \end{aligned}$$

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 由式 (7.50) 有 $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 0]$, 单调递减区间为 $[0, +\infty)$.

7.11 泰勒展开

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, x \in (-1, 1] \quad (7.52)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in \mathbf{R} \quad (7.53)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, x \in \mathbf{R} \quad (7.54)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, x \in \mathbf{R} \quad (7.55)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, x \in (-1, 1) \quad (7.56)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots, x \in (-1, 1) \quad (7.57)$$

根据上述展开式, 易得下列常用不等式

$$1. \ln(1+x) \leq x, x \in (-1, +\infty); \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}, x \in (-1, 1];$$

$$2. e^x \geq 1+x, x \in \mathbf{R}; e^x \geq 1+x + \frac{x^2}{2}, x \geq 0;$$

$$3. \sin x \leq x, x \geq 0; \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}, x \geq 0;$$

$$4. \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!}, x \in \mathbf{R}; \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!};$$

$$5. (1+x)^n \geq 1+nx, (x > -1, n \in \mathbf{N}^*).$$

例 7.92 【2022 甲卷理】已知 $a = \frac{31}{32}$, $b = \cos \frac{1}{4}$, $c = 4 \sin \frac{1}{4}$, 则 ()

(A) $c > b > a$ (B) $b > a > c$ (C) $a > b > c$ (D) $a > c > b$

解 在不等式 $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!}$ 中, 令 $x = \frac{1}{4}$, 可得 $b > a$, 又因为当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, 不等式 $x < \tan x$ 恒成立, 令 $x = \frac{1}{4}$, 可得 $b < c$, 故选 A.

例 7.93 【2015 北京改编】设实数 k 使得 $\ln \frac{1+x}{1-x} > k \left(x + \frac{x^3}{3} \right)$ 对 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

解 将式 (7.52) 中的 x 换成 $-x$, 得到

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots, x \in (-1, 1) \quad (7.58)$$

(7.52) – (7.58) 得

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \right) \quad (7.59)$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, 显然有 $\ln \frac{1+x}{1-x} > 2 \left(x + \frac{x^3}{3} \right)$, 故 $k \leq 2$.

而 $k \leq 2$ 只是一个使 $\ln \frac{1+x}{1-x} > k \left(x + \frac{x^3}{3} \right)$ 成立的充分条件, 因此需证 $k > 2$ 不符合题意, 这个问题的思路就形成了.

例 7.94 设实数 k 使得 $e^x - e^{-x} > k(x + \frac{x^3}{6})$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

解 将式 (7.53) 中的 x 换成 $-x$, 得到

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + \cdots \quad (7.60)$$

(7.53) – (7.60) 得

$$e^x - e^{-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \right) \quad (7.61)$$

显然有 $e^x - e^{-x} > 2 \left(x + \frac{x^3}{3!} \right)$, 故 $k \leq 2$.

而 $k \leq 2$ 只是一个使 $e^x - e^{-x} > k \left(x + \frac{x^3}{6} \right)$ 成立的充分条件, 因此需证 $k > 2$ 不符合题意, 这个问题的思路就形成了.

例 7.95 【2021 八省联考改编】已知 $g(x) = e^x + \sin x + \cos x$, 若 $g(x) \geq 2 + ax$, 求 a .

解 将式 (7.53), (7.54), (7.55) 相加并舍弃高阶无穷小进行放缩可得 $e^x + \sin x + \cos x \geq 2x + 2$, 所以 $a = 2$.

7.12 经典正弦不等式

推论 7.7. 切割线放缩: 如图 7.30, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 不等式 $\frac{2}{\pi} \cdot x < \sin x < x < \tan x$ 恒成立; 且函数 $\frac{\sin x}{x}$ 单调递减.

推论 7.8. 如图 7.31, 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 没有最大值, 值域为 $\left[-\frac{2}{3\pi}, 1\right)$, 有无数个零点 $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$), 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$.

例 7.96 关于函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 下列命题中的真命题有 .

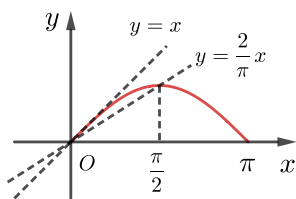


图 7.30

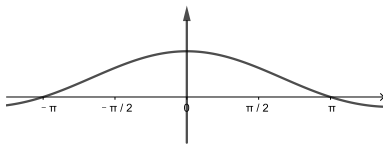


图 7.31

- ① $f(x)$ 为偶函数; ② $f(x)$ 的最大值为 $f(0)$; ③ $f(x)$ 为周期函数; ④ $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减;
 ⑤ 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) < \frac{2}{\pi}$; ⑥ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 (n \in \mathbb{N}^*)$.

解 ① ④ ⑥

变式训练 EXERCISES

59. 【江西高考】当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, 下列不等式成立的是 ()

(A) $\sin x < \frac{2}{\pi}x$ (B) $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ (C) $\sin x < \frac{3}{\pi}x$ (D) $\sin x > \frac{3}{\pi}x$

60. 【福建高考】设 $a = \sin 1$, $b = 5 \sin \frac{1}{5}$, $c = 3 \sin \frac{1}{3}$, 则 ()

(A) $a > b > c$ (B) $c > b > a$ (C) $a > c > b$ (D) $b > a > c$

61. 【湖北高考】当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, 则 ()

(A) $2x > 3 \sin x$ (B) $2x < 3 \sin x$ (C) $2x = 3 \sin x$ (D) 与 x 的取值有关

62. 【河北竞赛】当 $x \in (0, 1]$ 时, 下列不等式正确的是 ()

(A) $\frac{\sin x}{x} < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \leq \frac{\sin x^2}{x^2}$ (B) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 < \frac{\sin x}{x} \leq \frac{\sin x^2}{x^2}$
 (C) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 < \frac{\sin x^2}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x}$ (D) $\frac{\sin x^2}{x^2} < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \leq \frac{\sin x}{x}$

7.13 导数零点问题

7.13.1 指数函数与分式函数乘积

例 7.97 【2015 新课标 I 卷理科】设函数 $f(x) = e^x(2x-1) - ax + a$, 其中 $a < 1$, 若存在唯一的整数 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$, 则 a 的取值范围是 ()

(A) $\left[-\frac{3}{2e}, 1\right)$ (B) $\left[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4}\right)$ (C) $\left[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4}\right)$ (D) $\left[\frac{3}{2e}, 1\right)$

解 参数分离法 由于 $f(1) = e > 0$, 故只需考虑 $x \neq 1$ 的情况.

(i) 存在唯一的整数 $x_0 \in (-\infty, 1)$, 使得 $f(x_0) < 0$ 等价于存在唯一的整数 $x_0 \in (-\infty, 1)$, 使得

$$a < \frac{e^{x_0}(2x_0 - 1)}{x_0 - 1}, \text{ 设 } g(x) = \frac{e^x(2x - 1)}{x - 1} \ (x < 1), \text{ 则 } g'(x) = \frac{e^x(2x^2 - 3x)}{(x - 1)^2}, \text{ 故当 } x < 0 \text{ 时, } g'(x) > 0,$$

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增, 在 $(0, 1)$ 单调递减, 可得 $g(x)$ 的大致图像如图 7.32 所示, 故存在唯一的整数 $x_0 \in (-\infty, 1)$, 使得 $f(x_0) < 0$ 等价于 $g(-1) \leq a < g(0)$, 即

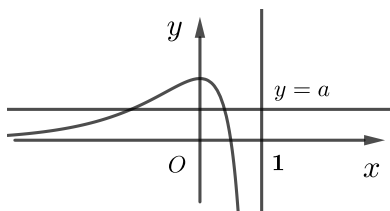


图 7.32

$$\frac{3}{2e} \leq a < 1.$$

(ii) 存在唯一的整数 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_0) < 0$ 等价于存在唯一的整数 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得

$$a > \frac{e^{x_0}(2x_0 - 1)}{x_0 - 1}, \text{ 设 } g(x) = \frac{e^x(2x - 1)}{x - 1} \ (x > 1), \text{ 则 } g'(x) = \frac{e^x(2x^2 - 3x)}{(x - 1)^2}, \text{ 故当 } 1 < x < \frac{3}{2} \text{ 时,}$$

$g'(x) < 0$, 当 $x > \frac{3}{2}$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 单调递增, 而

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{\frac{3}{2}} > 1, \text{ 由于 } a < 1, \text{ 故不存在整数 } x_0 \in (1, +\infty) \text{ 使得 } f(x_0) < 0.$$

综上 a 的取值范围是 $\left[\frac{3}{2e}, 1\right)$, 选 D.

例 7.98 【2016 全国卷 I 理科】函数 $f(x) = (x - 2)e^x + a(x - 1)^2$ 有两个零点.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1 + x_2 < 2$.

解 (1) **方法一:** 由于 $x = 1$ 不是 $f(x)$ 的零点, 当 $x \neq 1$ 时, $a(x - 1) = \frac{(2 - x)e^x}{x - 1}$, 设

$$g(x) = \frac{(2 - x)e^x}{x - 1}, \quad g'(x) = \frac{-e^x \left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right]}{(x - 1)^2} < 0, \text{ 函数 } g(x) \text{ 的单调递减区间 } (-\infty, 1), (1, +\infty), \text{ 当}$$

$x < 1$ 时, $g(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $g(x) \in \mathbf{R}$, 函数 $y = a(x - 1)$ 的图像表示斜率为 a 过 $(1, 0)$ 的直线, 要使函数 $f(x) = (x - 2)e^x + a(x - 1)^2$ 有两个零点, 则函数 $y = a(x - 1)$ 和函数 $y = g(x)$ 的图像必有两个交点, 则 $a > 0$, 如图 7.33.

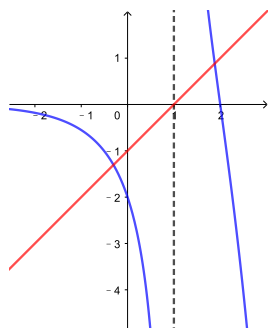


图 7.33

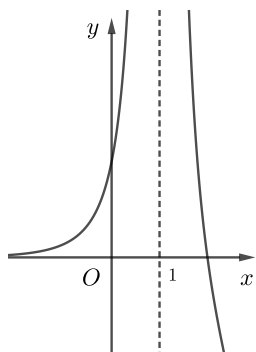


图 7.34

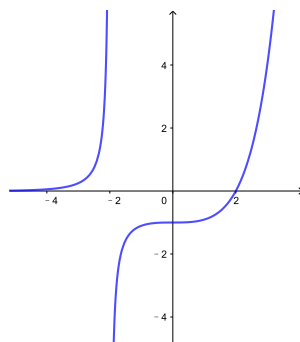


图 7.35

方法二： 由于 $x=1$ 不是 $f(x)$ 的零点，参变分离，设 $h(x) = \frac{(2-x)e^x}{(x-1)^2}$ ，则 $h'(x) = \frac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$ ，从而当 $x \in (-\infty, 1)$ 时， $h'(x) > 0$ ；当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $h'(x) < 0$ ，从而可得到 $y = h(x)$ 的图像如图 7.34 所示，故当 $a \leq 0$ 时直线 $y = a$ 与曲线 $y = h(x)$ 没有两个交点；当 $a > 0$ 时，直线 $y = a$ 与曲线 $y = h(x)$ 有两个交点，所以 $f(x)$ 有两个零点，从而可得 a 的取值范围为 $(0, +\infty)$ 。

(2) 不妨设 $x_1 < x_2$ ，因为 $f(x_1) = f(x_2)$ ，可知 $x_1 < 1 < x_2$ ，且 $2 - x_2 \in (-\infty, 1)$ ， $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减，所以 $x_1 + x_2 < 2$ 等价于 $f(x_1) > f(2 - x_2)$ ，即 $f(2 - x_2) < 0$ ，由于

$$\begin{cases} f(2 - x_2) = -x_2 e^{2-x_2} + a(x_2 - 1)^2 \\ f(x_2) = (x_2 - 2)e^{x_2} + a(x_2 - 1)^2 = 0 \end{cases} \quad (7.62)$$

$$\begin{cases} f(2 - x_2) = -x_2 e^{2-x_2} + a(x_2 - 1)^2 \\ f(x_2) = (x_2 - 2)e^{x_2} + a(x_2 - 1)^2 = 0 \end{cases} \quad (7.63)$$

所以 $f(2 - x_2) = -x_2 e^{2-x_2} - (x_2 - 2)e^{x_2}$ ，设 $g(x) = -x e^{2-x} - (x - 2)e^x$ ，则 $g'(x) = (x - 1)(e^{2-x} - e^x)$ ，所以当 $x > 1$ 时 $g'(x) < 0$ ，而 $g(1) = 0$ ，故当 $x > 1$ 时 $g(x) < 0$ ，从而 $g(x_2) = f(2 - x_2) < 0$ ，故 $x_1 + x_2 < 2$ 。

例 7.99 【2016 全国卷 II 理科改编】讨论 $f(x) = \frac{x-2}{x+2}e^x$ 的单调性，并证明当 $x > 0$ 时， $(x-2)e^x + x + 2 > 0$ 。

解 求导得 $f'(x) = \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}$ ($x \neq -2$)，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 和 $(-2, +\infty)$ 上均为递增函数，如图

7.35 所示，所以 $f(x) > f(0) = -1$ ，即 $\frac{x-2}{x+2}e^x > -1$ ，即 $(x-2)e^x + x + 2 > 0$ 。

7.13.2 虚设零点

我们在求解某些导数压轴题时，经常会碰到导函数具有零点，但求解相对比较繁杂甚至无法求解的情况，此时可以将这个零点只设出来而不必求出，然后谋求一种整体的转化或过渡，再结合其它条件，从而最终获得问题的解决。

例 7.100 【2013 新课标 II 理科】已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x + m)$ 。

(1) 设 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m ，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $m \leq 2$ 时, 证明: $f(x) > 0$.

解法一 (1) $m = 1$, $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

(2) 当 $m \leq 2$, $x \in (-m, +\infty)$ 时, $\ln(x+m) \leq \ln(x+2)$, 故只需证明当 $m = 2$ 时, $f(x) > 0$.

当 $m = 2$ 时, 函数 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+2}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f'(-1) < 0$, $f'(0) > 0$, 故 $f'(x) = 0$ 在 $(-2, +\infty)$ 上有唯一实根 x_0 , 且 $x_0 \in (-1, 0)$, 从而 $f(x)_{\min} = f(x_0)$, 由 $f'(x_0) = 0$ 得

$$e^{x_0} = \frac{1}{x_0 + 2} \Leftrightarrow x_0 = -\ln(x_0 + 2) \quad (7.64)$$

故

$$f(x) \geq f(x_0) \stackrel{(7.64)}{=} \frac{1}{x_0 + 2} + x_0 = \frac{(x_0 + 1)^2}{x_0 + 2} > 0$$

综上, 当 $m \leq 2$ 时, $f(x) > 0$.

解法二 (2) 先证 $e^x \geq x + 1$, 不等式两边取对数, 得 $x \geq \ln(x+1)$, 此不等式仅当 $x = 0$ 时取等号, 所以

$$e^x - \ln(x+m) \geq e^x - \ln(x+2) = (e^x - x - 1) + [x + 1 - \ln(x+2)] > 0.$$

例 7.101 已知函数 $f(x) = e^{x-a}$, $x - y - 1 = 0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条切线.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 证明: $f(x) - \ln x > 0$.

解 (1) 设直线与曲线切于点 (x_0, e^{x_0-a}) , $\because f'(x) = e^{x-a}$,

$$\therefore \begin{cases} e^{x_0-a} = 1 \\ e^{x_0-a} = x_0 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ a = 2 \end{cases}, \therefore f(x) = e^{x-2};$$

(2) 令 $h(x) = e^{x-2} - \ln x$,

$\because h'(x) = e^{x-2} - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $h'(1) < 0$, $h'(2) > 0$, $\therefore h'(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一实根 x_0 , 且 $x_0 \in (1, 2)$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

从而当 $x = x_0$ 时, $h(x)$ 取得极小值, 也是最小值.

$$\text{由 } h'(x_0) = 0 \Rightarrow e^{x_0-2} = \frac{1}{x_0} \Rightarrow x_0 - 2 = -\ln x_0,$$

$$\text{故 } h(x) \geq h(x_0) = e^{x_0-2} - \ln x_0 = \frac{1}{x_0} + x_0 - 2 > 2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0} - 2 = 0.$$

所以 $h(x) > 0$ 即 $f(x) - \ln x > 0$.

例 7.102 函数 $f(x) = e^x - 1 - \ln(x-a)$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线过点 $(1, 0)$, 求 a 的值;

(2) 若不等式 $f(x) > 0$ 在定义域上恒成立, 求 a 的取值范围.

解 (1) 依题意, $f(2) = e^2 - 1 - \ln(2-a)$, $f'(x) = e^x - \frac{1}{x-a}$, $f'(2) = e^2 - \frac{1}{2-a}$,

故函数 $f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y - [e^2 - 1 - \ln(2-a)] = \left(e^2 - \frac{1}{2-a}\right)(x-2)$,

又 $0 - (e^2 - 1 - \ln(2-a)) = \left(e^2 - \frac{1}{2-a}\right)(1-2) \Rightarrow \ln(2-a) + 1 = \frac{1}{2-a}$,

令 $2-a = t \Rightarrow \ln t + 1 - \frac{1}{t} = 0$,

设 $g(t) = \ln t + 1 - \frac{1}{t} \Rightarrow g'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} > 0$, 故 $g(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $g(1) = 1 + \ln 1 - \frac{1}{1} = 0$, 故 $2-a = 1$, 解得 $a = 1$.

(2) 由题可知 $x > a$, 设 $h(x) = f'(x) = e^x - \frac{1}{x-a}$, $h'(x) = e^x + \frac{1}{(x-a)^2} > 0$,

故 $f'(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

又 $x \rightarrow a$ 时, $f'(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f'(x) \rightarrow +\infty$,

故 $f'(x) = 0$ 在 $(a, +\infty)$ 上有唯一实数根 x_0 ,

当 $x \in (a, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以

$$f(x)_{\min} = f(x_0) = e^{x_0} - 1 - \ln(x_0 - a) \quad (7.65)$$

又由 $f'(x_0) = 0$ 可知

$$e^{x_0} = \frac{1}{x_0 - a} \Rightarrow x_0 = -\ln(x_0 - a) \quad (7.66)$$

由 (7.65), (7.66) 两式可知

$$f(x) \geq f(x_0) = e^{x_0} - 1 - \ln(x_0 - a) = \frac{1}{x_0 - a} + x_0 - a + a - 1 \geq 2 + a - 1 > 0 \Rightarrow a > -1$$

故 a 的取值范围为 $(-1, +\infty)$.

7.13.3 含三角的导数问题

一、含三角的导数零点问题

关键词

寻找废区间, 五点中的横坐标, 有界或不等式放缩.

例 7.103 【2019 理科 I 卷】已知函数 $f(x) = \sin x - \ln(x+1)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数, 证明:

(1) $f'(x)$ 在区间 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点;

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

证 (1) 设 $g(x) = f'(x) = \cos x - \frac{1}{1+x}$, 则 $g'(x) = -\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}$, 当 $x \in \left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x)$ 单调递减, 而 $g'(0) > 0$, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, 可得 $g'(x)$ 在 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一零点, 设为 α , 所以 $g(x)$ 在

$(-1, \alpha)$ 上单调递增, 在 $\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 故 $f'(x)$ 在区间 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点;

(2) **分析:** 通过极限思想可知当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) < 0$, 易知 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) > 0$,

$f(\pi) = 0 - \ln(\pi + 1) < 0$, **推测 $f(x)$ 在 π 的右侧恒为负.**

① 当 $x \in [\pi, +\infty)$ 时, $\ln(x+1) \geq \ln(\pi+1) > 1$, 故 $f(x) = \sin x - \ln(x+1) < 0$, $f(x)$ 无零点; (**废区间**)

② 当 $x \in (-1, 0]$ 时, 由 (1) 知 $f'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 而 $f'(0) = 0$, 所以当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 又 $f(0) = 0$, 从而 $x = 0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上的唯一零点;

③ 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 由 (1) 知 $f'(x)$ 在 $(0, \alpha)$ 上单调递增, 在 $\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 又 $f'(0) = 0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, 从而存在 $\beta \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $f'(\beta) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \beta)$ 上单调递增, 在 $\left(\beta, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 又 $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, 所以当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)$ 无零点;

④ 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减, 而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, $f(\pi) < 0$, 所以当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $f(x)$ 有唯一零点;

综上, $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

例 7.104 已知函数 $f(x) = \ln x - x + 2 \sin x$.

(1) 证明: $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极值点;

(2) 讨论 $f(x)$ 零点个数.

证 (1) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 + 2 \cos x$, 设 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 \sin x < 0$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立, 所以 $f'(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 又 $f'(1) = 2 \cos 1 > 0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} - 1 < 0$, 所以存在唯一的 x_0 , 使得 $f'(x_0) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $\left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 故 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点 x_0 ;

(2) **分析:** 通过极限思想可知当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) < 0$, 易知

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2 > 1 - \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{2} + 2 > 0$, $f(\pi) = \ln \pi - \pi < 0$, **推测 $f(x)$ 在 π 的右侧恒为负.**

- ① 当 $x \in [\pi, 2\pi)$ 时, $\sin x \leq 0$, 记 $h(x) = \ln x - x$, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$, 所以 $h(x)$ 在区间 $[\pi, 2\pi)$ 单调递减, 又 $h(\pi) = \ln \pi - \pi < 0$, 所以 $f(x) = \frac{1}{x} - 1 + 2 \cos x$ 在区间 $[\pi, 2\pi)$ 恒为负数, 故无零点; (废区间)
- ② 当 $x \in [2\pi, +\infty)$ 时, $f(x) = \ln x - x + 2 \sin x \leq \ln x - x + 2$, 记 $h(x) = \ln x - x + 2 (x \in [2\pi, +\infty))$, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$, 所以 $h(x)$ 在区间 $[2\pi, +\infty)$ 单调递减, 又 $h(2\pi) = \ln(2\pi) - 2\pi + 2 < \frac{2\pi}{e} - 2\pi + 2 < 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[2\pi, +\infty)$ 恒为负数, 故无零点; (废区间)
- ③ 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $\left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 所以 $f(x_0) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, 又

$$f(x) = \ln x - x + 2 \sin x < f(x) = \ln x - x + 2x = \ln x + x < x - 1 + x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

故 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2 \sin \frac{1}{2} < \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 0$, 所以当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x)$ 有唯一零点;

- ④ 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减, 而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, $f(\pi) < 0$, 所以当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $f(x)$ 有唯一零点;

综上, $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

例 7.105 已知函数 $f(x) = e^x - \cos x - x$.

- (1) 求 $f(x)$ 在区间 $\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的极值;
- (2) 判断函数 $g(x) = f(x) - x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ 上的零点个数.

解 (1) 由题得 $f'(x) = e^x + \sin x - 1$,

- ① 当 $x = 0$ 时, $f'(x) = 0$;
- ② 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增;
- ③ 当 $x \in (-\pi, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-\pi, 0)$ 上单调递减.

所以 $x = 0$ 时 $f(x)$ 极小值 $= 0$, 无极大值;

(2) **分析:** 通过极限思想可知当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) = e^x - \cos x - 2x > 0$, 易知 $g(0) = 0$,

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} - 0 - \pi > e \cdot \frac{\pi}{2} - \pi > 0$, 推测 $f(x)$ 在 π 的右侧恒为正.

- ① 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ 时, $g'(x) = e^x + \sin x - 2 > e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - 2 > e \cdot \frac{\pi}{2} - 3 > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 又 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ 上无零点; (废区间)
- ② 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 时, $g'(x) = e^x + \sin x - 2 = (e^x - 1) + (\sin x - 1) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上单调递减, 又 $g(x) > g(0) = 0$, 故 $g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上无零点;
- ③ 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 因为 $g'(x)$ 单调递增, 且 $g'(0) = -1 < 0$, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 > 0$, 所以存在 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $g'(x_0) = 0$, 当 $x \in [0, x_0]$ 时, $g(x)$ 单调递减, 当 $x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $g(x)$ 单调递增, 且 $g(0) = 0$, 故 $g(x_0) < 0$, 于是在 $\left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上存在一个零点.

综上, $g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ 上的零点个数为 2.

二、指数找基友法处理恒成立问题

例 7.106 【2021 八省联考】已知函数 $f(x) = e^x - \sin x - \cos x$, $g(x) = e^x + \sin x + \cos x$.

(1) 证明: 当 $x \geq -\frac{5\pi}{4}$ 时, $f(x) \geq 0$;

(2) 若 $g(x) \geq ax + 2$, 求 a .

解 (1) 当 $x \geq -\frac{5\pi}{4}$ 时, 要证 $f(x) = e^x - \sin x - \cos x \geq 0$, 即证 $(\sin x + \cos x) \cdot e^{-x} \leq 1$.

设 $h(x) = (\sin x + \cos x) \cdot e^{-x}$, 故只要证 $h(x)_{\max} \leq 1$, 因为 $h'(x) = -2 \sin x \cdot e^{-x}$, 则 $h(x)$ 在 $[2k\pi - \pi, 2k\pi](k \in \mathbf{Z})$ 上单调递增, 在 $[2k\pi, 2k\pi + \pi](k \in \mathbf{Z})$ 上单调递减,

于是可知 $h(x)$ 在 $[-\pi, 0]$ 上单调递增, 在 $[-\frac{5\pi}{4}, -\pi]$ 和 $[0, \pi]$ 上单调递减, 当 $x \in [-\frac{5\pi}{4}, \pi]$ 时,

$$h(x)_{\max} = \max \left\{ h\left(-\frac{5\pi}{4}\right), h(0) \right\} = 1, \text{ 当 } x > \pi \text{ 时, } h(x) = (\sin x + \cos x) \cdot e^{-x} < \sqrt{2} \cdot e^{-\pi} < 1,$$

综上, $h(x)_{\max} \leq 1$, 故当 $x \geq -\frac{5\pi}{4}$ 时, $f(x) \geq 0$;

(2) 设 $m(x) = g(x) - ax - 2 = e^x + \sin x + \cos x - ax - 2$, 则 $m'(x) = e^x + \cos x - \sin x - a$, 依题可知 $m(x) \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 又 $m(0) = 0$, 所以 0 是 $m(x)$ 的极值点, 则 $m'(0) = 2 - a = 0$, 解得 $a = 2$.

下证充分性:

因为 $m'(x) = e^x + \cos x - \sin x - a = e^x[1 + e^{-x}(\cos x - \sin x - a)]$, 设 $n(x) = 1 + e^{-x}(\cos x - \sin x - a)$, 则 $n'(x) = e^{-x}(a - 2 \cos x)$.

- ① 当 $a = 2$ 时, $n'(x) = e^{-x}(a - 2 \cos x) \geq 0$, 则 $n(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $n(0) = 0$, 所以 $m(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $m(x)_{\min} = m(0) = 0$, 满足 $g(x) \geq ax + 2$;
- ② 当 $a > 2$ 时, $n'(x) = e^{-x}(a - 2 \cos x) > 0$, 则 $n(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $n(0) = 2 - a < 0$, 所以存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $n(x_0) = 0$, 故当 $x < x_0$ 时, $m(x)$ 单调递减, 当 $x > x_0$ 时, $m(x)$ 单调递增, 则 $m(x_0) < m(0) = 0$, 即 $g(x_0) < ax_0 + 2$, 矛盾;

- ③ 当 $a < 2$ 时, 存在 $x_0 > 0$, 使得在 $[-x_0, x_0]$ 上 $n'(x) \leq 0$, 则 $n(x)$ 在 $[-x_0, x_0]$ 上单调递减, 又 $n(0) = 2 - a > 0$ 时, 所以 $m(x)$ 在 $[-x_0, 0]$ 上单调递增, 则 $m(-x_0) < m(0) = 0$, 即 $g(-x_0) < -ax_0 + 2$, 矛盾.

综上 $a = 2$.

7.13.4 超越函数零点区间的找点策略

一、有界放缩或不等式放缩

例 7.107 讨论函数 $f(x) = e^x - ax$ 的零点个数.

解 依题意 $f'(x) = e^x - a$,

- ① 当 $a = 0$ 时, $f(x) = e^x > 0$, 所以 $f(x)$ 无零点;
 ② 当 $a < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 又 $f(0) = 1 > 0$, 且当 $x < 0$ 时

$$f(x) = e^x - ax < e^0 - ax = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a} \quad (7.67)$$

故 $f\left(\frac{1}{a}\right) = e^{\frac{1}{a}} - 1 < 0$, 所以存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{a}, 0\right)$, 使得 $f(x_0) = 0$, 即存在唯一零点;

- ③ 当 $a > 0$ 时, 方程 $f'(x) = 0$ 的根为 $x = \ln a$, 易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 单调递增, 且 $f(x)_{\min} = f(\ln a) = a(1 - \ln a)$,

- 1° 当 $0 < a < e$ 时, $f(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 无零点;
 2° 当 $a = e$ 时, $f(x)$ 有唯一零点 $x = 1$;
 3° 当 $a > e$ 时, $f(\ln a) < 0$, 因为 $f(0) > 0$, 所以存在 $x_1 \in (0, \ln a)$, 使得 $f(x_1) = 0$; 当 $x > \ln a$ 时

$$f(x) = e^x - ax > x^2 - ax = 0 \Rightarrow x = a \quad (7.68)$$

故 $f(a) = e^a - a^2 > a^2 - a^2 = 0$, 所以存在 $x_2 \in (\ln a, a)$, 使得 $f(x_2) = 0$, 即存在唯一零点.

综上, 当 $a < 0$ 或 $a = e$ 时, 1 个零点; 当 $0 < a < e$ 时, 无零点; 当 $a > e$ 时, 2 个零点.

注 式子 (7.67), (7.68) 用到了有界放缩和不等式 $e^x > x^2 (x > 0)$ 放缩.

例 7.108 【2012 新课标理科卷】已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2$.

- (1) 求 $f(x)$ 的解析式及单调区间;
 (2) 若 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, 求 $(a+1)b$ 的最大值.

解 (1) $f(x) = e^x - x + \frac{1}{2}x^2$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

(2) 由已知条件得 $e^x - (a+1)x \geq b$, 设 $g(x) = e^x - (a+1)x$, 则 $g'(x) = e^x - (a+1)$,

① 若 $a+1 < 0$, 则 $g'(x) > 0$, 进而 $g(x)$ 单调递增, 则对任意常数 b , 当 $x < 0$ 时,

$e^x - (a+1)x < 1 - (a+1)x$, 令 $1 - (a+1)x = b$, 解得 $x = \frac{1-b}{a+1}$, 故当 $x < \frac{1-b}{a+1}$ 时, 可得 $e^x - (a+1)x < b$, 与题设矛盾;

② 若 $a+1 = 0$, 则 $(a+1)b = 0$;

③ 若 $a+1 > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, \ln(a+1))$ 单调递减, 在 $(\ln(a+1), +\infty)$ 单调递增, 故 $g(x)$ 有最小值

$$g(\ln(a+1)) = a+1 - (a+1)\ln(a+1)$$

所以 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, 等价于

$$b \leq a+1 - (a+1)\ln(a+1) \quad (7.69)$$

因此

$$(a+1)b \leq (a+1)^2 - (a+1)^2 \ln(a+1)$$

设 $h(a) = (a+1)^2 - (a+1)^2 \ln(a+1)$, 则 $h'(a) = (a+1)[1 - 2\ln(a+1)]$, 所以 $h(a)$ 在 $(-1, e^{\frac{1}{2}} - 1)$ 单调递增, 在 $(e^{\frac{1}{2}} - 1, +\infty)$ 单调递减, 故 $h(a)$ 有最大值

$$h(a) \leq \frac{e}{2} \Rightarrow (a+1)b \leq \frac{e}{2}$$

当 $a = e^{\frac{1}{2}} - 1$, $b = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}$ 时, 式 (7.69) 成立, 故 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$.

综合得 $(a+1)b$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$.

例 7.109 【2018 年 I 卷】已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

(1) 若 $a = 1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 a .

解 (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) \geq 1$ 等价于 $(x^2 + 1)e^{-x} - 1 \leq 0$, 设函数 $g(x) = (x^2 + 1)e^{-x} - 1$, 则

$$g'(x) = -(x^2 - 2x + 1)e^{-x} = -(x-1)^2 e^{-x}.$$

当 $x \neq 1$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 而 $g(0) = 0$, 故当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \leq 0$, 即 $f(x) \geq 1$;

(2) 设函数 $h(x) = 1 - ax^2 e^{-x}$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点当且仅当 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点,

(i) 当 $a \leq 0$ 时, $h(x) > 0$, $h(x)$ 没有零点;

(ii) 当 $a > 0$ 时, $h'(x) = ax(x-2)e^{-x}$, 易知 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 故 $h(2) = 1 - \frac{4a}{e^2}$ 是 $h(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 的最小值.

① 若 $h(2) > 0$, 即 $a < \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 没有零点;

② 若 $h(2) = 0$, 即 $a = \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点;

③ 若 $h(2) < 0$, 即 $a > \frac{e^2}{4}$, 由 $h(0) = 1$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 有一个零点, 由 (1) 知当 $x > 0$ 时, $e^x > x^2$, 所以

$$h(4a) = 1 - \frac{16a^3}{e^{4a}} = 1 - \frac{16a^3}{(e^{2a})^2} > 1 - \frac{16a^3}{(2a)^4} = 1 - \frac{1}{a} > 0 \quad (7.70)$$

故 $h(x)$ 在 $(2, 4a)$ 有一个零点, 因此 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个零点,

综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点时, $a = \frac{e^2}{4}$.

例 7.110 【2021 新高考 II 卷】已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax^2 + b$, 从下面两个条件中选一个, 证明: $f(x)$ 有一个零点.

① $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}$, $\geq 2a$; ② $0 < a < \frac{1}{2}$, $b \leq 2a$.

证 选②, 求导易知, $f'(x) = x(e^x - 2a)$, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 方程 $f'(x) = 0$ 的两根为 $x = 0$ 或 $x = \ln 2a$, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2a)$, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\ln 2a, 0)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $x = \ln 2a$ 处取得极大值 $f(\ln 2a)$, 在 $x = 0$ 处取得极小值 $f(0)$,

$$\begin{aligned} f(\ln 2a) &= (\ln 2a - 1) \cdot 2a - a \ln^2 2a + b \\ &> 2a(\ln 2a - 1) - a \ln^2 2a + 2a \\ &= a(2 - \ln 2a) \ln 2a < 0 \end{aligned}$$

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 没有零点.

易证 $e^x > x + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上成立, 当 $x > 1$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)e^x - ax^2 + b \\ &> (x-1)(x+1) - \frac{1}{2}x^2 + b = \frac{1}{2}x^2 - 1 + b \end{aligned}$$

则 $x > 1$ 且 $x > \sqrt{2-2b}$ 时有 $f(x) > 0$,

又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 且 $f(0) = b - 1 < 2a - 1 < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点.

例 7.111 讨论函数 $f(x) = \ln x - ax$ 的零点个数.

解 依题意 $f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}$,

① 当 $a=0$ 时, $f(x) = \ln x$, 所以 $f(x)$ 有唯一零点 $x=1$;

② 当 $a < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 又 $f(1) = -a > 0$, 且当 $0 < x < 1$ 时, 由 $\ln x < x-1$ 可得

$$f(x) = \ln x - ax < x - 1 - ax = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{1-a} \quad (7.71)$$

故 $f\left(\frac{1}{1-a}\right) = \ln \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a} < \frac{1}{1-a} - 1 - \frac{1}{1-a} = -1 < 0$, 所以存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{1-a}, 1\right)$, 使得 $f(x_0) = 0$, 即存在唯一零点;

③ 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 单调递减, 所以 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{a}\right) = \ln \frac{1}{a} - 1$,

1° 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 有唯一零点 $x = e$;

2° 当 $a > \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 无零点;

3° 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $f\left(\frac{1}{a}\right) = \ln \frac{1}{a} - 1 > 0$, 因为 $f(1) > 0$, 且当 $x > 1$ 时, $f(e) = 1 - ae > 0$

$$\ln x < \frac{1}{e}x < \frac{1}{2}x \Rightarrow \ln x < \sqrt{x} \quad (x > 1) \quad (7.72)$$

故

$$f(x) = \ln x - ax < \sqrt{x} - ax = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a^2} \quad (7.73)$$

故 $f\left(\frac{1}{a^2}\right) = \ln \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} < \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$, 所以存在 $x_1 \in \left(1, \frac{1}{a^2}\right)$, $x_2 \in \left(\frac{1}{a^2}, e\right)$, 使得 $f(x) = 0$, 即存在两个零点;

综上, 当 $a \leq 0$ 或 $a = \frac{1}{e}$ 时, 1 个零点; 当 $a > \frac{1}{e}$ 时, 无零点; 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, 2 个零点.

例 7.112 讨论函数 $f(x) = \ln x - \frac{a}{x}$ 的零点个数.

解 依题意 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} = \frac{x+a}{x^2}$,

① 当 $a=0$ 时, $f(x) = \ln x$, 所以 $f(x)$ 有唯一零点 $x=1$;

② 当 $a > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 又 $f(1) = -a < 0$, 且当 $x > 1$ 时,

由 $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$ 可得

$$f(x) = \ln x - \frac{a}{x} > 1 - \frac{1+a}{x} = 0 \Rightarrow x = a+1 \quad (7.74)$$

故 $f(a+1) = \ln(a+1) - \frac{a}{a+1} > 1 - \frac{1}{a+1} - \frac{a}{a+1} = 0$, 所以存在 $x_0 \in (1, a+1)$, 使得 $f(x_0) = 0$, 即存在唯一零点;

③ 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, -a)$ 单调递减, 在 $(-a, +\infty)$ 单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(-a) = \ln(-a) + 1$,

1° 当 $a = -\frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 有唯一零点 $x = \frac{1}{e}$;

2° 当 $a < -\frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 无零点;

3° 当 $-\frac{1}{e} < a < 0$ 时, $f(-a) < 0$, $f(1) > 0$, 由

$$\ln x^2 > x - \frac{1}{x} \quad (0 < x < 1) \quad (7.75)$$

故

$$f(a^2) = \ln a^2 - \frac{1}{a} > \left(-a - \frac{1}{-a}\right) - \frac{1}{a} = -a > 0 \quad (7.76)$$

所以存在 $x_1 \in (a^2, -a)$, $x_2 \in (-a, 1)$, 使得 $f(x) = 0$, 即存在两个零点;

综上, 当 $a \geq 0$ 或 $a = -\frac{1}{e}$ 时, 1 个零点; 当 $a < -\frac{1}{e}$ 时, 无零点; 当 $-\frac{1}{e} < a < 0$ 时, 2 个零点.

7.14 母不等式与数列求和

7.14.1 不等式短边为数字

例 7.113 已知函数 $f(x) = e^x - x (x \in \mathbf{R})$, $g(x) = x - \sin x (x \in [0, +\infty))$.

(1) 分别求出 $f(x)$, $g(x)$ 的最小值;

(2) 求证: $\left(1 + \sin \frac{1}{2}\right) \left(1 + \sin \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \sin \frac{1}{2^3}\right) \cdots \left(1 + \sin \frac{1}{2^n}\right) < e$.

证 (1) $f(x)_{\min} = f(0) = 0$, $g(x)_{\min} = g(0) = 0$; (2) 由 (1) 知当 $x > 0$ 时, $e^x > x + 1$; $x > \sin x$,

当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$, $0 < 1 + \sin \frac{1}{2^n} < 1 + \frac{1}{2^n} < e^{\frac{1}{2^n}}$, 于是

$$\begin{aligned} & \left(1 + \sin \frac{1}{2}\right) \left(1 + \sin \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \sin \frac{1}{2^3}\right) \cdots \left(1 + \sin \frac{1}{2^n}\right) \\ & < e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2^2}} \cdot e^{\frac{1}{2^3}} \cdots e^{\frac{1}{2^n}} = e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}} = e^{1 - \frac{1}{2^n}} < e \end{aligned}$$

例 7.114 已知函数 $f(x) = \ln(1+x)$.

(1) 求证: 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\frac{x}{1+x} < f(x) < x$;

(2) 证明: $\sqrt{e} < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) < e (n \in \mathbf{N}^*)$.

证 (1) 略; (2) 由 (1) 知 $\ln(1+x) < x$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 所以

$$\begin{aligned} & \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \\ & < \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{n+1}{2n} \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 1} = 1 \end{aligned}$$

所以 $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) < e$.

由 (1) 知 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 所以 $\ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) > \frac{\frac{k}{n^2}}{1 + \frac{k}{n^2}} = \frac{k}{n^2 + k}$, 所以

$$\begin{aligned} & \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \\ & > \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \geq \frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \\ & = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以 $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) > \sqrt{e}$.

综上, $\sqrt{e} < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) < e$.

例 7.115 已知函数 $f(x) = \ln x - kx + 1$.

(1) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围;

(2) 证明: $\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < e^{\frac{2}{3}} (n \in \mathbf{N}^*, n > 1)$.

解 (1) $k \in [1, +\infty)$; (2) 由 (1) 可知 $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$, 所以

$$\begin{aligned} & \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \\ & < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\ & = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

即 $\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < e^{\frac{2}{3}} (n \in \mathbf{N}^*, n > 1)$.

例 7.116 【2017 新课标卷 III】已知函数 $f(x) = x - 1 - a \ln x$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的值;

(2) 设 m 为整数, 且对于任意正整数 n , $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < m$, 求 m 的最小值.

解 (1) $a = 1$; (2) 利用不等式 $\ln x \leq x - 1$ 即可得

$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$, 即有

$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < e$, 另外当 $n \geq 3$ 时,

$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) > \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) = \frac{135}{64} > 2$.

故当 $n \geq 3$ 时, $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \in (2, e)$, 综上 m 的最小值为 3.

7.14.2 不等式短边含 n

例 7.117 已知函数 $f(x) = x \ln x + ax + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: 当 $x > 1$ 时, $2 \ln x < x - \frac{1}{x}$;

(3) 若 $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\frac{n}{2n+4} < (\ln 2)^2 + (\ln \frac{3}{2})^2 + \cdots + (\ln \frac{n+1}{n})^2 < \frac{n}{n+1}$.

证 (1) 由不等式 $\ln x \leq x - 1$ 可得 $\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$, 即 $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$, 即 $x - 1 \leq x \ln x$, ($y = x - 1$ 即 $y = x \ln x$ 的一条切线) 故 $a \geq -1$;

(2) 略; (3) 利用通项和通项比较: L.H.S. 只需证明

$$\left(\ln \frac{n+1}{n}\right)^2 > \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad (7.77)$$

由(1)不等式 $1 - \frac{1}{x} < \ln x$, 令 $x = \frac{n+1}{n}$ 可得 $\left(\ln \frac{n+1}{n}\right)^2 > \frac{1}{(n+1)^2}$, 而 $\frac{1}{(n+1)^2} > \frac{1}{(n+2)(n+1)}$, 对式子(7.77)累加即可得证;

R.H.S. 只需证明

$$\left(\ln \frac{n+1}{n}\right)^2 < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (7.78)$$

由(2)知 $2 \ln x < x - \frac{1}{x}$, 令 $x = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$, 可得

$$2 \ln \sqrt{\frac{n+1}{n}} < \sqrt{\frac{n+1}{n}} - \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \Rightarrow \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

对式子(7.78)累加即可得证.

例 7.118 【2010 湖北改编】证明: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} (n \in \mathbf{N}^*)$.

证 此不等式是前 n 项和 VS 含 n 型, 我们采用 **阶差法求出其通项公式**, 然后比较大小, 即证明

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \Rightarrow \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

即

$$\ln x < \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \Rightarrow \ln(1+x) < \frac{1}{2} \left(1+x - \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{x}{x+1} \right)$$

于是 $\ln(1+x) < \frac{1}{2} \left(x + \frac{x}{x+1} \right)$, 令 $x = \frac{1}{n}$, 可得

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

例 7.119 已知函数 $f(x) = (x+1) \ln(x+1) - \lambda x$.

(1) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 λ 的最大值;

(2) 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} < \ln 2$.

证 (1) 依题可得当 $x > 0$ 时, $\lambda \leq \frac{(x+1) \ln(x+1)}{x}$, 由不等式 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ 稍作变形可得

$$\frac{(x+1) \ln(x+1)}{x} \geq \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = 1, \text{ 故 } \lambda \text{ 的最大值为 } 1;$$

(2) 由(1)知 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$, 令 $x = \frac{1}{n}$, 即 $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n$, 进而

$\frac{1}{n+2} < \ln(n+2) - \ln(n+1), \dots, \frac{1}{2n} < \ln(2n) - \ln(2n-1)$, 故

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \ln(2n) - \ln n = \ln 2 \end{aligned}$$

例 7.120 【2022 新高考 II 改编】证明: $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

证 此不等式是前 n 项和 VS 含 n 型, 我们采用 **阶差法求出其通项公式**, 然后比较大小, 即证明

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

令 $x = \frac{1}{n}$, 可得

$$\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{x+1-1}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

母不等式 $\ln x < \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} (x > 1)$,

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} > \ln 2 - \ln 1, \quad \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} > \ln 3 - \ln 2, \dots, \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1) - \ln n$$

累加即得 $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1)$.

例 7.121 若 $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $n \geq 2$, 求证: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

证 不等式 $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ 中令 $x = \frac{n}{n-1} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$, 对 n 累加.

7.15 高考导数试题命制背景

7.15.1 化曲为直命制背景

先给出四个化曲为直的不等式：

$$\begin{cases} e^x \geq x+1, & x \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (7.79)$$

$$\begin{cases} e^x \geq ex, & x \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (7.80)$$

$$\begin{cases} \ln x \leq x-1, & x \in (0, +\infty) \end{cases} \quad (7.81)$$

$$\begin{cases} \ln x \leq \frac{x}{e}, & x \in (0, +\infty) \end{cases} \quad (7.82)$$

当且仅当 $x=0$ 时式 (7.79) 等号成立；当且仅当 $x=1$ 时式 (7.80), (7.81) 等号成立；当且仅当 $x=e$ 时式 (7.82) 等号成立。

一、基于 $e^x \geq x+1$ 命制的高考题

例 7.122 【2010 大纲 II 卷改编】已知函数 $f(x) = 1 - e^{-x}$ ，证明当 $x > -1$ 时， $f(x) \geq \frac{x}{x+1}$ 。

证 第一步（取倒数）式 (7.79) 两边取倒数得 $e^{-x} \leq \frac{1}{x+1}$ ；

第二步（改变不等式方向）：同乘以 -1 得 $-e^{-x} \geq -\frac{1}{x+1}$ ；

第三步（变形整理）：在不等式两边 $+1$ 得 $1 - e^{-x} \geq 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$ 。即题目所证。

例 7.123 【2010 新课标卷改编】已知函数 $f(x) = x(e^x - 1) - ax^2$ ，若当 $x \geq 0$ 时， $f(x) \geq 0$ ，求 a 的取值范围。

解 第一步（引入参数）得 $e^x \geq ax+1$ ；

第二步（包装）：同乘以 x 得 $xe^x \geq ax^2 + x$ ；

第三步（变形整理）：得 $x(e^x - 1) - ax^2 \geq 0$ ，从而题干函数设置为 $f(x) = x(e^x - 1) - ax^2$ 。

例 7.124 【2017 全国 II 卷改编】已知函数 $f(x) = (1 - x^2)e^x$ ，若当 $x \geq 0$ 时， $f(x) \leq ax+1$ ，求 a 的取值范围。

解 第一步（替换）式 (7.79) 中 $-x$ 替换 x 得 $e^{-x} \geq -x+1$ ；

第二步（包装）：同乘以 $(1+x)e^x$ 得 $(1-x^2)e^x \leq x+1$ ；

第三步（引入参数）：当 $x \geq 0$ 时， $(1-x^2)e^x \leq ax+1$ ，所以 $a \geq 1$ 。

例 7.125 【2018 全国 III 卷改编】已知 $f(x) = \frac{ax^2 + x - 1}{e^x}$ ，证明当 $a \geq 1$ 时， $f(x) + e \geq 0$ 。

证 第一步（替换）：式 (7.79) 中 $x+1$ 替换 x 得 $e^{x+1} \geq x+2$ ；

第二步（包装）：同时加 $x^2 + x - 1$ 得 $x^2 + x - 1 + e^{x+1} \geq x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$ ；

第三步（引入参数）：当 $a \geq 1$ 时， $ax^2 + x - 1 + e^{x+1} \geq x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$ ；

第四步 (变形整理): 同除以 e^x , 即 $\frac{ax^2 + x - 1}{e^x} + e \geq 0$.

二、基于 $\ln x \leq x - 1$ 命制的高考题

例 7.126 【2016 全国 III 卷改编】已知函数 $f(x) = \ln x - x + 1$, 证明当 $x > 1$ 时, $1 < \frac{x-1}{\ln x} < x$.

证 本题中的 $f(x)$ 是式 (7.81) 直接移项得到的; 当 $x > 1$ 时, 式 (7.81) 两边同除以 $\ln x$ 即得不等式 $1 < \frac{x-1}{\ln x}$; 式 (7.81) 中用 $\frac{1}{x}$ 替换 x 得 $\ln \frac{1}{x} < \frac{1}{x} - 1$, 也即 $-\ln x < \frac{1-x}{x}$, 通过整理可得 $\frac{x-1}{\ln x} < x$.

例 7.127 【2017 全国 II 卷改编】已知 $f(x) = ax^2 - ax - x \ln x$, 且 $f(x) \geq 0$, 求 a .

解 第一步 (引入参数): 式 (7.81) 中加参数得 $\ln x \leq a(x-1)$;

第二步 (包装): 同时乘以 x 得 $ax^2 - ax \geq x \ln x$;

第三步 (变形整理): 移项 $ax^2 - ax - x \ln x \geq 0$. 所以 $a = 1$.

例 7.128 【2020 山东新高考卷改编】已知 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$, 若 $f(x) \geq 1$, 求 a 的取值范围.

解 第一步 (引入参数): 式 (7.81) 中加参数得 $\ln x \leq x - 1 + \ln a$;

第二步 (包装): 左右两边分别代入一个递增函数 $g(x) = e^x + x$, 得

$e^{\ln x} + \ln x \leq e^{x-1+\ln a} + x - 1 + \ln a$;

第三步 (变形整理): 移项 $ae^{x-1} - \ln x + \ln a \geq 1$. 故 $a \geq 1$.

例 7.129 【2021 惠州模拟】已知函数 $f(x) = ae^x - \ln(x+1) - 1$, 若 $f(x) \geq \ln \frac{1}{a}$, 求 a 的取值范围.

解 $a \geq 1$.

二、基于 $e^x \geq x + 1$ 与 $\ln x \leq x - 1$ 命制的高考题

例 7.130 【2018 全国 I 卷改编】已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$, 证明当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

证 第一步 (变形): 式 (7.79) 变为 $e^{x-1} \geq x$, 式 (7.81) 变为 $-\ln x \geq 1 - x$,

第二步 (合并): 两式相加得 $e^{x-1} - \ln x \geq 1$ (因为等号成立不能同时取到, 所以严格大于 1);

第三步 (引入参数): 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $ae^{x-1} - \ln x \geq 1$. 移项后得到该高考题.

三、基于 $e^x \geq ex$ 与 $\ln x \leq \frac{x}{e}$ 命制的高考题

例 7.131 【2014 新高考 I 卷改编】已知函数 $f(x) = e^x \ln x + \frac{2}{x}e^{x-1}$, 证明 $f(x) > 1$.

证 第一步 (变形): 式 (7.80) 变为 $\frac{1}{e^x} < \frac{1}{ex}$, 式 (7.82) 中 $\frac{1}{x}$ 替换 x 得变为 $-\ln x \leq \frac{1}{ex}$,

第二步 (合并): 两式相加得 $\frac{1}{e^x} - \ln x < \frac{2}{ex}$;

第三步 (整理): 两边乘以 e^x 时, $1 - e^x \ln x < \frac{2}{x}e^{x-1}$. 移项后得到该高考题.

四、基于泰勒展开命制的考题

先来不等式

$$e^x - e^{-x} > 2x \quad (7.83)$$

例 7.132 【2022 新高考 II 卷改编】已知函数 $f(x) = xe^{ax} - e^x$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) < -1$, 求实数 a 的取值范围.

证 第一步 (变形): 式 (7.83) 变为 $e^x - 2x > e^{-x}$, 两边乘以 e^x , $e^{2x} - 2xe^x > 1$;

第二步 (引入参数): 可得 $2xe^{ax} - e^{2x} < -1$,

第三步 (整理): 用 x 替换 $2x$, 即可得到 $a \leq \frac{1}{2}$.

7.15.2 嵌入不等式命制背景

先来不等式

$$\begin{cases} e^x \geq ex, (x \geq 0) \\ e^x \geq x + 1 + \frac{1}{2}x^2, (x \geq 0) \end{cases} \quad (7.84)$$

$$(7.85)$$

式 (7.84) 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立.

一、基于 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 命制的考题

设 $f(x) = \frac{e^x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

① 为了嵌入式 (7.79), 可以构造一个导函数 $F'(x) = \frac{(x-1)(e^x - 1 - x)}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

取原函数 $F(x) = \frac{e^x}{x} - \left(x + \frac{1}{x}\right)$, 对于 $F(x)$, 其两部分的极值点相同, 都为 1, 若 $x > 0$, 易知 $F(x)_{\min} = F(1) = e - 2$, 据此可以命制如下试题

例 7.133 已知函数 $f(x) = e^x - x^2 - ax - 1$, 若 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的取值范围.

解 $a < e - 2$.

② 为了嵌入式 (7.84), 可以构造一个导函数 $G'(x) = \frac{(x-1)(e^x - ex)}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} - e\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ 取

原函数 $G(x) = \frac{e^x}{x} - e(x - \ln x)$, 其两部分的极值点相同, 都为 1.

例 7.134 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^3 + x^2 - ax$, 若 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的取值范围.

解 $a \leq e + \frac{1}{2}$.

③ 为了嵌入式 (7.85), 可以构造一个导函数

$$H'(x) = \frac{1}{x^2}(x-1)\left(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{x^2}\right) \text{ 取原函数}$$

$H(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x}$, 对于 $H(x)$, 其两部分的极值点相同, 都为 1, 若 $x > 0$, 易知

$H(x)_{\min} = H(1) = e - \frac{7}{4}$, 据此可以命制如下试题

例 7.135 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - ax - 1$, 若 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的取值范围.

解 $a \leq e - \frac{7}{4}$.

二、基于 $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 命制的考题

设 $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$, 则 $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$,

① 为了嵌入式 (7.79), 可以构造一个导函数

$$F'(x) = \frac{(x-2)(e^x - 1 - x)}{x^3} = \frac{e^x(x-2)}{x^3} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) \text{ 取原函数 } F(x) = \frac{e^x}{x^2} - \left(\ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right), \text{ 对}$$

于 $F(x)$, 其两部分的极值点相同, 都为 2, 若 $x > 0$, 易知

$$F(x)_{\min} = F(2) = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} - \ln 2 \approx 0.404 > 0,$$

由 $F(x) = \frac{e^x}{x^2} - \left(\ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) > 0 \Rightarrow e^x - x - 1 > x^2 \ln x$, 据此可以命制如下试题

例 7.136 已知函数 $f(x) = e^x - x - 1$, $g(x) = x^2 \ln x$, 证明: $f(x) > g(x)$.

② 为了嵌入式 $e^x > x$, 可以构造一个导函数 $G'(x) = \frac{1}{x^3}(x-2)(e^x - x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3} - \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$ 取

原函数 $G(x) = \frac{e^x}{x^2} - \left(\ln x + \frac{2}{x}\right)$, 对于 $G(x)$, 若 $x > 0$, 易知 $G(x)_{\min} = G(2) = \frac{e^2}{4} - \ln 2 - 1$, 据此可以命制如下试题

例 7.137 证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x - 2x \geq x^2 \ln x$.

② 为了嵌入式 (7.85), 可以构造一个导函数

$$G'(x) = \frac{1}{x^3}(x-2)\left(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{e^x(x-2)}{x^3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) \text{ 取原函数}$$

$G(x) = \frac{e^x}{x^2} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$, 对于 $G(x)$, 若 $x > 0$, 易知 $G(x)_{\min} = G(2) = \frac{e^2 - 7}{4}$, 据此可以命制如下试题

例 7.138 【2020 高考 I 卷改编】已知函数 $f(x) = e^x + ax^2 - x$ ，若 $x \geq 0$ ，都有 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ ，求实数 a 的取值范围.

解 $a \geq \frac{e^2 - 7}{4}$.

第八章 排列组合与概率

8.1 排列组合方程组解法

例 8.1 设坐标平面内有一个质点从原点出发, 沿 x 轴跳动, 每次向正方向或负方向跳 1 个单位, 经过 5 次跳动, 质点落在点 $(3, 0)$ (允许重复过此点) 处, 则质点不同的运动方法共有 ▲ 种.

解 依题意, 设正方向跳动 x 次, 负方向跳动 y 次, 则
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}, \text{ 所以共有}$$

$C_5^4 = 5$ 种情况.

例 8.2 设坐标平面内有一个质点从原点 O 出发, 沿 x 轴跳动, 每次向正方向或负方向跳 1 个单位, 设每次向左移动的概率为 $\frac{1}{3}$, 向右移动的概率为 $\frac{2}{3}$, 经过 5 次跳动, 质点落在点 $(3, 0)$ (允许重复过此点) 处的概率为 ▲ .

解 依题意, 设正方向跳动 x 次, 负方向跳动 y 次, 则
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}, \text{ 所以向右跳动}$$

了 4 次, 向左挑动了 1 次, 由独立重复实验概率公式得 $P = C_5^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{80}{243}$.

例 8.3 设坐标平面内有一个质点从原点 O 出发, 沿 x 轴跳动, 每次等可能地向左或向右跳 1 个单位, 设质点到达位置的数字记为 X .

(1) 若该质点共移动 2 次, 位于原点 O 的概率;

(2) 若该质点共移动 6 次, 求该质点到达数字 X 的分布列和数学期望.

解 (1) 依题意, 设正方向跳动 x 次, 负方向跳动 y 次, 则
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \text{ 所以向右跳}$$

动了 1 次, 向左挑动了 1 次, 由独立重复实验概率公式得 $P = C_2^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

(2) 随机变量 X 可能取得的值为 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, 按照 (1) 的做法可得

$$E(X) = 6 \times \frac{1}{64} + 4 \times \frac{6}{64} + 2 \times \frac{15}{64} + 0 \times \frac{20}{64} + (-2) \times \frac{15}{64} + (-4) \times \frac{6}{64} + (-6) \times \frac{1}{64} = 0$$

X	6	4	2	0	-2	-4	-6
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

例 8.4 楼梯共有 12 级，某人上楼，每步可以上一级，也可以上两级，要用 8 步走完这 12 级楼梯，共有 ▲ 种走法。

解 依题意，设上一级的步数为 x 步，上两级的步数为 y 步，则
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x + 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}, \text{ 所}$$

以上一级的步数为 4 步，上两级的步数为 4 步，问题等价转化为：从“8”选“4”的问题，从而共有 $C_8^4 = 70$ 种方法。

例 8.5 数列 $\{a_n\}$ 共有 11 项， $a_1 = 0$ ， $a_{11} = 4$ 且 $|a_{n+1} - a_n| = 1$ ， $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ ，满足这种条件的不同数列的个数有 ▲ 。

解 依题意 $4 = a_{11} = (a_{11} - a_{10}) + (a_{10} - a_9) + (a_9 - a_8) + \dots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1)$ ，上面等式右边有 10 个括号，又因为 $|a_{n+1} - a_n| = 1$ ，所以，每个括号内的值或者为 1 或者为 -1，

而和为 4。设和为 1 的有 x 个，和为 -1 的有 y 个，则
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}, \text{ 所以共有}$$

$C_{10}^3 = 120$ 种情况，每一种情况与所求的数列之间形成一一对应关系。所以，共能组成 120 个数列。

变式训练 EXERCISES

- 63.** 设坐标平面内有一个质点从原点 O 出发，沿 x 轴跳动，每次等可能地向左或向右 1 个单位，经过 6 次跳动，质点落在点 $(-2, 0)$ （允许重复过此点）处的概率为 ▲

8.2 环排涂色问题

方法 8.1. 将一个圆环分成 $n(n \geq 2)$ 个扇形区域，现用 $m(m \geq 2)$ 种不同颜色对这 n 个区域涂色，要求一个区域使用一种颜色，相邻区域颜色不同，则不同的涂色方法是

$$(m-1)^n + (-1)^n(m-1) \quad (8.1)$$

证 从 A_1 区域先涂色，可知 A_1 区域有 m 种涂法， A_2 区域有 $m-1$ 种涂法， A_3 区域有 $m-1$ 种涂法， $\dots$ ， A_{n-1} 区域有 $m-1$ 种涂法， A_n 区域有 $m-1$ 种涂法，则不同的涂色方法有 $m(m-1)^{n-1}$ 种，但这里面会包含两种情况：

(1) A_1, A_n 区域不同色，设不同的涂色方法有 a_n 种。

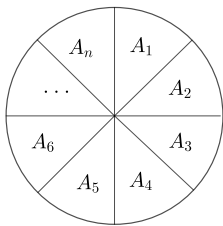


图 8.1

(2) A_1, A_n 区域同色, 则不同的涂色方法有 a_{n-1} 种.

于是

$$a_n + a_{n-1} = m(m-1)^{n-1} \quad (8.2)$$

即

$$\begin{aligned} a_n &= -a_{n-1} + m(m-1)^{n-1} = -a_{n-1} + [(m-1) + 1](m-1)^{n-1} \\ &= -a_{n-1} + (m-1)^n + (m-1)^{n-1} \end{aligned}$$

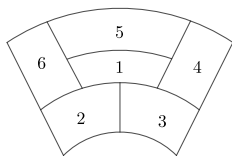
于是

$$a_n - (m-1)^n = (-1)[a_{n-1} - (m-1)^{n-1}] \quad (8.3)$$

所以数列 $\{a_n - (m-1)^n\}$ 是以 $a_2 - (m-1)^2 = m(m-1) - (m-1)^2 = m-1$ 为首项, 公比为 -1 的等比数列, 故

$$a_n - (m-1)^n = (m-1)(-1)^{n-2} = (m-1)(-1)^n \Rightarrow a_n = (m-1)^n + (-1)^n(m-1) \quad (8.4)$$

例 8.6 某城市在中心广场建造一个花园, 花园分为 6 个部分 (如图), 现要栽种 4 种不同颜色的花, 每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花, 不同的栽种方法有 ▲ 种 (用数字作答).



解 先对区域 1 进行涂色, 有 4 种涂法, 再对其它区域采用式 (8.1) 可得 $(3-1)^4 + (3-1) = 18$ 种, 故共有 $4 \times 18 = 72$ 种涂法.

例 8.7 如图 8.2, 将一个四棱锥的每一个面染一种颜色, 并使相邻两面不同色, 如果有 5 种不同的颜色供选用, 则不同的染色方法有 ▲ 种 (用数字作答).

解 先对底面进行涂色, 有 5 种涂法, 再对其它区域采用式 (8.1) 可得 $(4-1)^4 + (4-1) = 84$ 种, 故共有 $5 \times 84 = 420$ 种涂法.

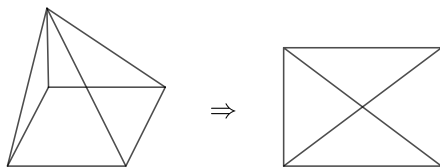


图 8.2

例 8.8 如图 8.3, 将一个四棱锥的每一个顶点染一种颜色, 并使一条棱上的两个端点不同色, 如果有 5 种不同的颜色供选用, 则不同的染色方法有 ▲ 种 (用数字作答).

解 先对 P 点进行涂色, 有 5 种涂法, 再对其它顶点采用式 (8.1) 可得 $(4-1)^4 + (4-1) = 84$ 种, 故共有 $5 \times 84 = 420$ 种涂法.

例 8.9 如图 8.4, 用 4 种不同的颜色给图中 A, B, C, D 区域涂色, 要求一个区域使用一种颜色, 相邻区域颜色不同, 则不同的染色方法有 ▲ 种 (用数字作答).

解 先对图中 A, B, C 采用环排, 由式 (8.1) 可得 $(4-1)^3 - (4-1) = 24$ 种, 再可知区域 D 有 3 种涂法, 故共有 $24 \times 3 = 72$ 种涂法.

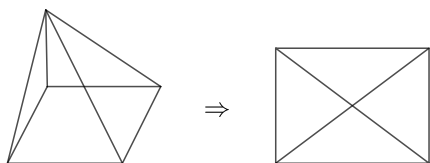


图 8.3

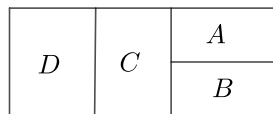


图 8.4

例 8.10 甲、乙、丙三人传球, 由甲开始进行 5 次传球, 又回到甲的方法数有 ▲ 种.

解 我们把图 8.1 的每一个分隔符看成每一次传球, 相当于用 3 种颜色去涂 5 个区域, 由式 (8.1) 可得 $(3-1)^5 - (3-1) = 30$ 种, 但甲、乙、丙都有可能作为首位, 所以总的传球方法为 $\frac{30}{C_3^1} = 10$.

例 8.11 甲、乙、丙、丁四人传球, 由甲开始进行 4 次传球, 又回到甲的方法数有 ▲ 种.

解 我们把图 8.1 的每一个分隔符看成每一次传球, 相当于用 4 种颜色去涂 4 个区域, 由式 (8.1) 可得 $(4-1)^4 + (4-1) = 84$ 种, 但甲、乙、丙、丁都有可能作为首位, 所以总的传球方法为 $\frac{84}{C_4^1} = 21$.

例 8.12 一条线段上有 n 个点, 用 m 种不同的颜色去染色, 相邻顶点不同色, 且两端不同色, 问有 ▲ 种染色方法?

解 设符合条件的染色方法有 a_n 种, 当首末同色时, 可去掉其中一点化为有 a_{n-1} 种, 又

$a_n + a_{n-1}$ 表示相邻两点不同色的方法数, 共有 $m(m-1)^{n-1}$ 种, 和方法 8.1 其实是一模一样的. 答案为 $a_n = (m-1)^n + (-1)^n(m-1)$.

8.3 相同元素有序分组的“隔板式”方法

方法 8.2. 凡“相同小球放入不同盒中”的问题, 即“ n 个同元素有序分成 m 组 (每组的任务不同)”的问题一般可用“隔板法”解, 即

- (1) 当每组含元素数目至少一个时, 其不同分组方式为 $N = C_{n-1}^{m-1}$ 种, 即给 n 个元素的中 $n-1$ 空格加入 $m-1$ 个“隔板”.
- (2) 任意分组, 可出现某些组含元素为 0 个时, 不同分组方式为 $N = C_{n+m-1}^{m-1}$ 种, 即将 n 个相同元素与 $m-1$ 个相同“隔板”进行排列, 在 $n+m-1$ 个位置中选 $m-1$ 个安排隔板.

例 8.13 某城市的一条街道边有 9 只路灯, 为节约用电且不影响照明, 现要关掉不在街两头的 3 只灯, 而且关掉的 3 只灯互不相邻, 则不同的关灯方式共有 ▲ 种.

解 本题表面上与“相同元素的有序分组相距甚远, 但可转化为该类问题: 可视为往不关掉的 6 只灯中间的 5 个空格中加入无区别的 3 个“隔板”(关掉的路灯), 共 $N = C_5^3 = 10$ 种关灯方式.

例 8.14 将 24 个志愿者名额分配给 3 所学校, 则每校至少有一个名额且各校名额互不相同的分配方法共有 ▲ 种.

解 先考虑每校至少有一个名额的分法, 设分配给三个学校的名额分别为 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1 + x_2 + x_3 = 24$, 该方程的正整数解有 $C_{23}^2 = 253$ 种, 即每校至少有一个名额的分法有 253 种. 每校至少有一个名额的分法中, 至少有两个学校的名额数相同的分配方法有两种情况:
 两个学校名额相同: $(1, 1, 22), (2, 2, 20), (3, 3, 18), (4, 4, 16), (5, 5, 14), (6, 6, 12), (7, 7, 10), (9, 9, 6), (10, 10, 4), (11, 11, 2)$, 有 $10C_3^1 = 30$ 种分法.
 三个学校名额相同: $(8, 8, 8)$, 1 种分法.
 故至少有两个学校的名额数相同的分配方法是 31 种.
 综上知, 满足条件的分配方法共有 $253 - 31 = 222$ 种.

变式训练 EXERCISES

64. 将 24 个志愿者名额分配给 3 所学校, 则每校至少有一个名额且各校名额互不相同的分配方法共有 ▲ 种.

8.4 比赛问题

例 8.15 两人进行乒乓球比赛, 先赢 3 局者获胜, 决出胜负为止, 则所有可能出现的情形 (各人输赢局的不同视为不同情形) 共有 ▲ 种.

解 从 5 个大小相同, 编号分别为 1 到 5 的小球中任取 3 个小球, 比如, 取出的小球编号分别为 1, 2, 5, 则表示甲第 1, 2, 5 场赢得比赛, 以 3 比 2 获胜; 取出的小球的编号分别为 1, 2, 3, 则表示甲第 1, 2, 3 场赢得比赛, 以 3 比 0 获胜, 依此类推, 故甲获胜的情形有 $C_5^3 = 10$ 种. 同理乙获胜的情形也有 10 种, 故所有可能出现的情形共有 20 种.

8.5 映射问题

8.5.1 映射

映射与投信具有相同的数学模型, 它们的本质是相同的. 在解决数学问题时, 常常把生疏的、复杂的、未知的问题转化为我们熟悉的、简单的、已知的问题来解决. 现举几例如下.

例 8.16 将 5 封信投入 3 个邮筒, 不同的投法共有 ▲ 种

解 第 1 封信有 3 种不同的投递方法, 第 2 封信也有 3 种不同的投递方法, 同理第 3、4、5 封信都有 3 种不同的投递方法, 则共有 3^5 种投法.

例 8.17 某外商计划在 4 个候选城市投资 3 个不同的项目, 且在同一个城市投资的项目不超过 2 个, 则该外商不同的投资方案有 ▲ 种

例 8.18 安排 3 名教师去 4 所学校任教, 每校至多 2 人, 则不同的分配方案共有 ▲ 种

解 用映射的观点看, 设 X 为 3 个不同项目 (3 名教师) 的集合, Y 为 4 个候选城市 (4 所学校) 的集合, 则例 8.17、例 8.18 可统一为: 从 X 向 Y 作映射, 不能将 X 中 3 个元素全映射到 Y 中同一个元素上的映射有多少个? 因为从 X 到 Y 的映射共有 4^3 个, 其中 3 个元素全映射到 Y 中同一个元素上的映射有 $C_4^1 = 4$ 个, 故例 8.17、例 8.18 的解均为 $4^3 - 4 = 60$ 种.

用映射的观点可将例 8.17、例 8.18 推广为

推论 8.1. 设集合 X 为 n 元集合, 集合 Y 为 m 元集合, 从 X 向 Y 作映射, 不能将 X 中 n 个元素全映射到 Y 中同一个元素上, 则这样的映射共有 $m^n - C_m^1 = m^n - m$ 个.

8.5.2 单射

例 8.19 某校设有 6 个不同的兴趣小组, 每名学生限报一个组, 现有 3 名学生报名, 假设每名学生报每个组的可能性相同, 则任何两名学生不报同一个组的概率为 ()

- (A) $\frac{A_6^3}{36}$ (B) $\frac{C_6^3}{36}$ (C) $\frac{A_6^3}{6^3}$ (D) $\frac{C_6^3}{6^3}$

解 问题为从 3 元集到 6 元集的单射有多少种? 满足条件的报名方法有 $C_6^3 A_3^3 = A_6^3$ 种, 而 3 名同学的报名方法共有 6^3 种, 故所求概率为 $\frac{A_6^3}{6^3}$, 选 C.

8.5.3 满射

例 8.20 现要将 6 名奥运志愿者分派到 4 个奥运场馆工作, 要求每个奥运场馆至少派 1 名志愿者, 则不同的分派方法有 ▲ 种.

解法一 常规方法是先分组、再分配来解决, 即 $\left(C_6^3 + \frac{C_6^2 C_4^2}{A_2^2}\right) \cdot A_4^4 = 1560$ 种.

解法二 我们可以设将这 6 名志愿者分派到 n 个场馆, 且每个场馆至少 1 人的方法为 a_n 种, 则数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2^6 - C_2^1 a_1 = 62, \quad a_3 = 3^6 - (C_3^1 a_1 + C_3^2 a_2) = 540$$

$$a_4 = 4^6 - (C_4^1 a_1 + C_4^2 a_2 + C_4^3 a_3) = 1560$$

推论 8.2. 将 m 名志愿者分派到 n 个场馆, 且每个场馆至少 1 人, 我们可以称之为 **满射** 分配问题. 设分配方法为 a_n 种, 则数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$,
 $n \geq 2$ 时, $a_n = n^m - (C_n^1 a_1 + C_n^2 a_2 + \cdots + C_n^{n-1} a_{n-1})$.

变式训练 EXERCISES

65. 现要将编号为 1、2、3、4、5 的 5 个小球放入 4 个不同的小盒中, 则恰有一个空盒的概率为 ▲ .
66. 【2021 乙卷理科】将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训, 每名志愿者只分配到 1 个项目, 每个项目至少分配 1 名志愿者, 则不同的分配方案共有 ()
- (A) 60 种 (B) 120 种 (C) 240 种 (D) 480 种

8.6 灵活分组求概率

例 8.21 8 支排球队中有 2 支为强队, 任意将 8 个队分成两组 (每组 4 个队) 进行比赛, 这两个强队被分在一个组内的概率是多少?



解法一 设强队 A 的编组已定, 则与 A 同组的空位共有 3 个, 与 A 不同组的空位有 4 个, 将 B 填入任一空位的可能性应是相等. 于是 A、B 同组的概率 $P = \frac{3}{7}$.

推论 8.3. 如果有 $2n$ 个队：平均分为两组，则指定的两队编在同一组的概率为 $P = \frac{n-1}{2n-1}$.

解法二 将 8 个队分成两组 (每组 4 个队) 进行比赛，假设 A 的编组已定，则与 A 同组的空位共有 3 个，共有 C_7^3 种分法；强队 A 、 B 的编组已定，则与 A 、 B 同组的空位共有 2 个，共有 C_6^2 种分法；故所求概率为 $P = \frac{C_6^2}{C_7^3} = \frac{3}{7}$.

8.7 概率问题“浓度”法

我们知道：盒中有形状相同的白球 m 个，红球 n 个，从中取一个球是红球的概率 $= \frac{n}{m+n}$ = 红球在盒中比例值 (相当于盒中红球的“浓度”)，而红球个数 ξ 的数学期望 (均值) $\frac{n}{m+n}$ = (红球的“浓度”) $\times 1$ (取球个数)，从形式上看“概率” = “浓度”。能否用“浓度”的方法一般性地处理“摸球”这类的问题呢？

例 8.22 (1) 甲盒中有形状完全相同的 4 个红球、12 个白球，现从中取出 3 个球，求取到红球个数的数学期望；

(2) 若将 (1) 中取出的 3 个球放到装有同样形状的 3 个红球、4 个白球的乙盒中，再从乙盒中取一个球是红球的概率是多少？

解 (1) 甲盒中红球的“浓度” $= \frac{4}{12+4}$ ，则取出的 3 个球 (溶液的量) 中含有红球的个数 (溶质的量) 为 $\frac{4}{12+4} \times 3 = \frac{3}{4}$ ，这就是取到红球个数的数学期望。

(2) 由 (1) 可知，从甲盒中取出的 3 个球中有红球 $\frac{3}{4}$ 个，将取出的 3 个球放到的乙盒中后，乙盒中有球 $4+3+3$ 个，其中红球 $3+\frac{3}{4}$ 个，故再从乙盒中取一个球是红球的概率是 $\frac{3+\frac{3}{4}}{4+3+3} = \frac{3}{8}$.

例 8.23 (1) 甲盒中有形状完全相同的 m 个红球、 n 个白球，现从中取出 t 个球，求取到红球个数 ξ 的数学期望；(2) 若将 (1) 中取出的 t 个球放到装有同样形状的 a 个红球、 b 个白球的乙盒中，再从乙盒中取一个球是红球的概率是多少？

解 (1) $E(\xi) = \frac{m}{m+n} \cdot t$; (2) $P = \frac{\frac{m}{m+n} \cdot t + a}{t+a+b}$.

8.8 混合方差

推论 8.4. 设第 i 组样本数据的平均数为 $\bar{x}_i$ ，第 i 组样本数据的方差为 S_i^2 ，第 i 组样本数据的权重为 ω_i ， n 组样本数据混合在一起的平均数为 $\bar{z}$ ，则 n 组样本数据混合在一起的方差为

$$S_{\text{总}}^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i [(\bar{x}_i - \bar{z})^2 + S_i^2] \quad (8.5)$$

例 8.24 已知样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_{40}$ 的平均数和方差分别为 77 和 123, 样本数据 $y_1, y_2, \dots, y_{30}$ 的平均数和方差分别为 m 和 n , 全部 70 个数据的平均数和方差分别为 74 和 138, 则 $m = \underline{\quad\quad}$; $n = \underline{\quad\quad}$.

解 易知 $m = 70$; 由公式(8.5)可得 $138 = \frac{4}{7} \cdot [(77 - 74)^2 + 123] + \frac{3}{7} \cdot [(70 - 74)^2 + n]$, 解得 $n = 130$.

例 8.25 一所初级中学为了估计全体学生的平均身高和方差, 通过抽样的方法从初一年级随机抽取了 30 人, 计算得这 30 人的平均身高为 154cm, 方差为 30; 从初二年级随机抽取了 40 人, 计算得这 40 人的平均身高为 167cm, 方差为 20; 从初三年级随机抽取了 30 人, 计算得这 30 人的平均身高为 170cm, 方差为 10. 依据以上数据, 若用样本的方差估计全校学生身高的方差, 则全校学生身高方差的估计值为 $\underline{\quad\quad}$.

解 先求总体平均值为 $[154 \times 30 + 167 \times 40 + 170 \times 30] \div 100 = 164$, 由公式(8.5)可得

$$\frac{3}{10} \cdot [(154 - 164)^2 + 30] + \frac{4}{10} \cdot [(167 - 164)^2 + 20] + \frac{3}{10} \cdot [(170 - 164)^2 + 10] = 64.4$$

例 8.26 某市为了了解人们对“中国梦”的伟大构想的认知程度, 针对本市不同年龄和不同职业的人举办了一次“一带一路”知识竞赛, 满分 100 分 (95 分及以上为认知程度高), 结果认知程度高的有 m 人, 按年龄分成 5 组, 其中第一组: $[20, 25)$, 第二组 $[25, 30)$, 第三组: $[30, 35)$, 第四组 $[35, 40)$, 第五组 $[40, 45]$, 得到如图 8.5 所示的频率分布直方图, 已知第一组有 10 人.

(1) 根据频率分布直方图, 估计这 m 人的平均年龄和第 80 百分位数;

(2) 若第四组宣传使者的年龄的平均数与方差分别为 37 和 $\frac{5}{2}$, 第五组宣传使者的年龄的平均数与方差分别为 43 和 1, 求这 m 人中 35 ~ 45 岁所有人的年龄的方差.

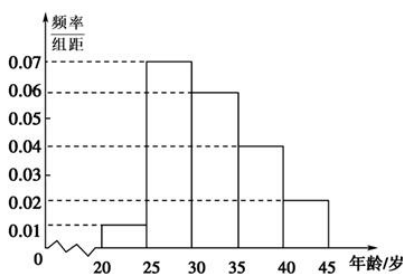


图 8.5

解 (1) 设这 m 人的平均年龄为 $\bar{x}$, 则

$$\bar{x} = 22.5 \times 0.05 + 27.5 \times 0.35 + 32.5 \times 0.3 + 37.5 \times 0.2 + 42.5 \times 0.1 = 32.25 \text{ 岁}$$

设第 80 百分位数为 a , 由 $5 \times 0.02 + (40 - a) \times 0.04 = 0.2$, 解得 $a = 37.5$.

(2) 易知这两组宣传使者的年龄的平均数为 $\frac{4 \times 37 + 2 \times 43}{6} = 39$, 由公式(8.5)可得

$$\frac{4}{6} \cdot [(37 - 39)^2 + \frac{5}{2}] + \frac{2}{6} \cdot [(43 - 39)^2 + 1] = 10, \text{ 据此, 可估计这 } m \text{ 人中 } 35 \sim 45 \text{ 岁所有人的年龄}$$

的方差为 10.

8.9 方差和期望的关系

推论 8.5. 设随机变量 X 中样本数据: $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则 方差等于平方的期望减去期望的平方

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) \quad (8.6)$$

证 由方差定义可得

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i^2 - 2x_i E(X) + E^2(X)) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2E(X) \sum_{i=1}^n p_i x_i + \sum_{i=1}^n p_i E^2(X) \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + 1 \cdot E^2(X) = E(X^2) - E^2(X) \end{aligned}$$

第九章 不等式

9.1 基本不等式

定理 9.1: basic inequality

设 a, b 为正实数, 则 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. 当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

衍生品

$$\forall a, b, \in \mathbf{R}, a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (9.1)$$

$$\forall a, b, \in \mathbf{R}^+, \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \quad (9.2)$$

双变量化单变量求最值

例 9.1 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $\frac{1}{a-1} + \frac{4}{b-1}$ 的最小值为 ▲ .

解 由 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 可得 $\frac{1}{a-1} = \frac{b}{a}$, $\frac{1}{b-1} = \frac{a}{b}$, 所以 $\frac{1}{a-1} + \frac{4}{b-1} = \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 4$. 当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$ 时等号成立.

换元法求最值

例 9.2 已知实数 $xy > 0$, 则 $\frac{x}{x+y} + \frac{2y}{x+2y}$ 的最大值为 ▲ .

解 设 $\begin{cases} m = x+y \\ n = x+2y \end{cases}$, 则 $\begin{cases} x = 2m-n \\ y = n-m \end{cases}$, 于是

$$\frac{x}{x+y} + \frac{2y}{x+2y} = \frac{2m-n}{m} + \frac{2n-2m}{n} = 4 - \left(\frac{n}{m} + \frac{2m}{n} \right) \leq 4 - 2\sqrt{2}.$$

例 9.3 若 $4x > y > 0$, 则 $\frac{y}{4x-y} + \frac{x}{y}$ 的最小值为 ▲ .

解 $\frac{5}{4}$.

9.2 权方和不等式

定理 9.2: 权方和不等式

设 m, x_i, y_i 为正实数 ($i = 1, 2, \dots, n$), 则 $\frac{x_1^{m+1}}{y_1^m} + \frac{x_2^{m+1}}{y_2^m} + \dots + \frac{x_n^{m+1}}{y_n^m} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{m+1}}{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^m}$.
 当且仅当 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$ 时等号成立.

例 9.4 已知 $a > 1, b > 1$, 则 $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1}$ 的最小值为 .

解 $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq \frac{(a+b)^2}{a+b-2}$, 设 $a+b-2=t$, 则 $\frac{(t+2)^2}{t} = t + \frac{4}{t} + 4 \geq 8$, 当且仅当 $t=2$,
 $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$ 时等号成立.

例 9.5 已知正数 x, y, z 满足 $x+y+z=1$, 则 $\frac{x^2}{y+2z} + \frac{y^2}{z+2x} + \frac{z^2}{x+2y}$ 的最小值为 .

解 $\frac{1}{3}$.

例 9.6 已知正数 x, y 满足 $x+y=1$, 则 $\frac{1}{x^2} + \frac{8}{y^2}$ 的最小值为 .

解 $\frac{1}{x^2} + \frac{8}{y^2} = \frac{1^3}{x^2} + \frac{2^3}{y^2} \geq \frac{(1+2)^3}{(x+y)^2} = 27$, 当 $\frac{1}{x} = \frac{2}{y}$, 即 $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$ 时等号成立.

例 9.7 已知正数 x, y 满足 $x+3y=2$, 则 $\frac{1}{x^3} + \frac{3}{y^3}$ 的最小值为 .

解 $\frac{1}{x^3} + \frac{3}{y^3} = \frac{1^4}{x^3} + \frac{1^4}{y^3} + \frac{1^4}{y^3} + \frac{1^4}{y^3} \geq \frac{(1+1+1+1)^4}{(x+3y)^3} = 2^5$, 当 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, 即 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ 时等号成立.

例 9.8 已知正数 x, y 满足 $x+y=xy$, 则 $\frac{1}{x-1} + \frac{9y}{y-1}$ 的最小值为 .

解 由 $x+y=xy$ 可得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 则

$$\frac{1}{x-1} + \frac{9y}{y-1} = \frac{x}{x-1} + \frac{9y}{y-1} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} + \frac{9}{1-\frac{1}{y}} - 1 \geq \frac{(1+3)^2}{2-1} - 1 = 15.$$

例 9.9 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, A, B 分别为右顶点和上顶点, 直线 $y=kx (k>0)$ 与 AB 相交于点 D , 与椭圆相交于 E, F 两点, 求四边形 $AEBF$ 面积的最大值.

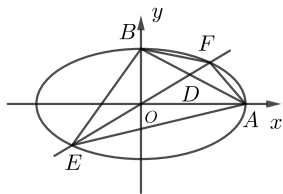


图 9.1

解 设 $E(-x_0, -y_0)$, $F(x_0, y_0)$, 故四边形 $AEBF$ 面积 $S = S_{\triangle DEF} + S_{\triangle AEF} = x_0 + 2y_0$, 由题

$$\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = \frac{x_0^2}{4} + \frac{(2y_0)^2}{4} \geq \frac{(x_0 + 2y_0)^2}{8} = \frac{S^2}{8}$$

当且仅当 $\frac{x_0}{4} = \frac{2y_0}{4}$ 即 $x_0 = 2y_0$ 时等号成立. 所以四边形 $AEBF$ 面积的最大值为 $2\sqrt{2}$.

例 9.10 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{3^n}{3^n + 2}$, 证明: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > \frac{n^2}{n+1}$.

证 $a_n = \frac{3^n}{3^n + 2} = \frac{1}{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}$, 所以

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \frac{1^2}{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1} + \frac{1^2}{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \cdots + \frac{1^2}{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} \\ &> \frac{n^2}{n + 2 \cdot \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]} \\ &= \frac{n^2}{n + \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]} > \frac{n^2}{n+1} \end{aligned}$$

9.3 构造平方差求二元最值

例 9.11 设 x, y 为实数, 若 $4x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 $2x + y$ 的最大值为 ▲ .

解 设 $\begin{cases} 2x = a + b \\ y = a - b \end{cases}$ 代入 $4x^2 + y^2 + xy = 1$ 后整理得 $5a^2 + 3b^2 = 2$, 所以 $a^2 \leq \frac{2}{5}$, 所以

$$-\frac{\sqrt{10}}{5} \leq a \leq \frac{\sqrt{10}}{5}, \text{ 又 } 2x + y = 2a, \text{ 故 } 2x + y \text{ 的最大值为 } \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

例 9.12 设 x, y 为实数, 若 $x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 $x + y$ 的最大值为 ▲ .

解 $x + y$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例 9.13 【2022 新高考二卷：多选】若 x, y 满足 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 则 ()

- (A) $x + y \leq 1$ (B) $x + y \geq -2$ (C) $x^2 + y^2 \leq 2$ (D) $x^2 + y^2 \geq 1$

解 设 $\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases}$ 代入 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 后整理得 $a^2 + 2b^2 = 1$, 所以 $a^2 \leq 1$, 所以 $-1 \leq a \leq 1$,

又 $x + y = 2a$, 故 $-2 \leq x + y \leq 2$, B $\checkmark$; 又 $x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2) = 2(a^2 + b^2) = 2(1 - b^2) \leq 2$, C $\checkmark$.
答案为 BC.

注 这种换元的思想是为了消去“困扰”项 xy .

9.4 糖水不等式

定理 9.3: 糖水不等式

- ① 真分数 $\frac{b}{a}$ ($a > b > 0$), 在分子分母同时加上一个 c ($c > 0$), 则 $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$. (做差法容易证明).
② 假分数 $\frac{a}{b}$ ($a > b > 0$), 在分子分母同时加上一个 c ($c > 0$), 则 $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$. (做差法容易证明).

例 9.14 比较 $\log_2 3, \log_3 4, \log_4 5$ 的大小.

解 由糖水不等式知 $\frac{\ln 2}{\ln 3} < \frac{\ln 2 + \ln \frac{4}{3}}{\ln 3 + \ln \frac{4}{3}} = \frac{\ln \frac{8}{3}}{\ln 4} < \frac{\ln 3}{\ln 4}$, 所以 $\log_2 3 > \log_3 4$, 同理可得

$\log_3 4 > \log_4 5$, 综上所述, $\log_2 3 > \log_3 4 > \log_4 5$.

例 9.15 【2022 全国甲卷文科 12 题】已知 $9^m = 10$, $a = 10^m - 11$, $b = 8^m - 9$, 则 ()

- (A) $a > 0 > b$ (B) $a > b > 0$ (C) $b > a > 0$ (D) $b > 0 > a$

解 由糖水不等式知 $\log_9 10 = \frac{\ln 10}{\ln 9} > \frac{\ln 10 + \ln \frac{10}{9}}{\ln 9 + \ln \frac{10}{9}} = \frac{\ln \frac{100}{9}}{\ln 10} > \frac{\ln 11}{\ln 10} = \log_{10} 11$, 所以

$\log_9 10 > \log_{10} 11$, 同理可得 $\log_8 9 > \log_9 10$, 综上所述 $\log_{10} 11 < \log_9 10 < \log_8 9$, 所以
 $a = 10^m - 11 = 10^{\log_9 10} - 11 > 10^{\log_{10} 11} - 11 = 0$, $b = 8^m - 9 = 8^{\log_9 10} - 9 < 8^{\log_8 9} - 9 = 0$, 即
 $a > 0 > b$, 故选 A.

变式训练 EXERCISES

67. 已知 $9^m = 11$, $a = 10^m - 12$, $b = 8^m - 10$, 则 ()

- (A) $a > 0 > b$ (B) $a > b > 0$ (C) $b > a > 0$ (D) $b > 0 > a$

第十章 高中数学二级结论

1. 平行四边形对角线平方和等于四条边平方和.
2. 斜二测画法直观图面积为原图面积的 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 倍.
3. 四面体内切球半径为 $\frac{3V}{S}$ (V 为体积, S 为表面积).
4. 任意 $\triangle ABC$ 中, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$.
5. $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan A + \tan B + \tan C < 0$, 则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形.
6. 若 A, B, C, D 是圆锥曲线 (二次曲线) 上顺次四点, 则四点共圆 (常用相交弦定理) 的一个充要条件是: 直线 AC, BD 的斜率存在且不为零, 并有 $k_{AC} + k_{BD} = 0$.
7. 若圆的直径端点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则圆的方程为 $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$.
8. 椭圆的焦半径 (椭圆的一个焦点到椭圆上一点横坐标为 x_0 的点 P 的距离) 公式
 $r_{1,2} = a \pm ex_0$.
9. 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 为双曲线, 其焦点为 $(\sqrt{2k}, \sqrt{2k})$ 和 $k < 0$ 时的 $(-\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$.
10. 三角形三边 a, b, c 成等差数列, 则 $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.
11. 棱长为 a 的正四面体外接球半径 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$; 内切球半径 $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$; 四面体高 $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$; 四面体体积 $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$; 四面体的中心将高分为 $3:1$ 两部分.
12. 正四面体相邻两面重心连线长度为棱长的 $\frac{1}{3}$; 相邻两面所成二面角的余弦值为 $\frac{1}{3}$.
13. 第一余弦定理: $\triangle ABC$ 中, $a \cos B + b \cos A = c$. (根据对称性还会有几个公式).
14. 任意 $\triangle ABC$ 中, $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 1$.
15. 三角混合不等式: 若 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin x < x < \tan x$.
16. $\triangle ABC$ 中, $a > b \Leftrightarrow \sin A > \sin B \Leftrightarrow \cos 2A < \cos 2B$.

17. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 其中一个角的 $\sin$ 一定大于另一个角的 $\cos$.

18. 锐角 $\triangle ABC$ 中, $\sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C$.

19. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 任意两角的正切之积一定大于 1.

20. 锐角 $\triangle ABC$ 中, $\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \geq 3\sqrt{3}$.

21. 钝角 $\triangle ABC$ 中, 其中一个锐角的 $\cos$ 一定大于另一个锐角的 $\sin$.

22. 正弦平方差公式: $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$.

23. 不等式链: 设 $a > 0$, $b > 0$, 则

$$\frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a^2+b^2}{a+b} \leq \frac{a^2+b^2}{2\sqrt{ab}} \quad (\text{当且仅当 } a=b \text{ 时等号成立}).$$

第十一章 变式训练参考答案

1. 易知 $S_9 = 9a_5 = 3a_5 \Rightarrow a_5 = 0$, 所以 $S_5 = S_6$, 故选 D.

2. 依题意可得
$$\begin{cases} a_1 + 2d = 5 \\ 4a_1 + 6d = 8a_1 + 4d \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases} \quad \text{所以 } a_n = 2n - 1, \text{ 于是 } a_{10} = 19.$$

3. $\frac{a_2 + 2a_7 + a_8}{a_3 + a_6} = \frac{2a_5 + 2a_7}{a_3 + a_6} = \frac{4a_6}{a_3 + a_6} = \frac{20}{11}$, 于是 $\frac{a_6}{a_3 + a_6} = \frac{5}{11}$, 故 $\frac{S_{11}}{S_8} = \frac{11a_6}{4(a_3 + a_6)} = \frac{11}{4} \times \frac{5}{11} = \frac{5}{4}$, 选 D.

4. 根据公式 $S_n = na_{\frac{n+1}{2}}$ 可知 $S_9 = 9a_5 = 81 \Rightarrow a_5 = 9$, 所以 $d = 4$, 于是 $a_{10} = a_5 + 5d = 9 + 4 \times 5 = 29$, 故选 D.

5. 根据题意 $S_9 = S_4 \Rightarrow S_9 - S_4 = 0$ 可知 $a_7 = 0$, 所以 $2a_4 = a_1 + a_7 = 1 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{2}$. 故选 C.

6. 根据公式 $S_n = na_{\frac{n+1}{2}}$ 可知 $S_4 = 4a_{2.5} = 0 \Rightarrow a_{2.5} = \frac{5-0}{2.5} = 0$, 所以 $d = \frac{a_5 - a_{2.5}}{5 - 2.5} = 2$, 又因为等差数列的通项公式是关于 n 的一次函数, 并且一次项系数为公差, 排除 B; 又等差数列的前 n 项和是关于 n 的无常数项的二次函数, 并且二次项系数为公差的一半, 排除 C, D, 故选 A.

7. 不妨假设 $a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = 3 \Rightarrow a_n = 2n - 1$, 利用公式 $S_n = na_{\frac{n+1}{2}}$, 可得 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{10a_{5.5}}{5a_3} = \frac{2 \times 10}{5} = 4$.

8. 由已知得 $\frac{a_{n+1}}{2n-3} = \frac{a_n}{2n-5} + 1$, 又 $\frac{a_1}{2-5} = -7$, 可得数列 $\left\{ \frac{a_n}{2n-5} \right\}$ 是首项为 -7 , 公差为 1 的等差数列, 所以 $\frac{a_n}{2n-5} = n - 8 \Rightarrow a_n = (2n-5)(n-8)$, 其对称轴 $n = \frac{10.5}{2} = 5.25$, 所以 $\{a_n\}$ 的最小的一项是第 5 项.

9. 由已知得 $S_4 = 4a_{2.5} = 11 \Rightarrow a_{2.5} = \frac{11}{4}$, 所以 $d = \frac{3 - \frac{11}{4}}{3 - 2.5} = \frac{1}{2}$, 可得 $S_7 = 7a_4 = 7 \times \left(3 + \frac{1}{2} \right) = \frac{49}{2}$.

10. 依题意 $S_6 = 90 \Rightarrow 6a_{3.5} = 90 \Rightarrow a_{3.5} = 15$, $a_7^2 = a_3 a_9 \Rightarrow (15 + 3.5d)^2 = (15 - 0.5d)(15 + 5.5d)$, 解得 $d = -2$, 故 $B \checkmark$; 所以 $a_1 = a_{3.5} - 2.5d = 20$, 故 $A \times$; 易知数列 a_n 单调递减, 且 $a_n = -2n + 22$, 故 $S_n = n(21 - n)$, 对称轴为 $n = 11.5$, 故 $C \checkmark$; $\because S_{20} > 0$, $S_{21} = 0$, 故 $D \checkmark$.

11. 依题意 $2\sqrt{S_2+1} = \sqrt{S_1+1} + \sqrt{S_3+1}$, 即 $2\sqrt{7+d} = 2 + \sqrt{10+3d}$, 解得 $d = 2$ 或 $d = 18$ (舍去), $\therefore a_n = 2n + 1$, 于是 $S_n = n(n+2)$,

$$\therefore \frac{S_n + 10}{a_n + 1} = \frac{n^2 + 2n + 10}{2n + 2} = \frac{(n+1)^2 + 9}{2(n+1)} = \frac{1}{2} \left[(n+1) + \frac{9}{n+1} \right] \geq \sqrt{(n+1) \cdot \frac{9}{n+1}} = 3, \text{ 当且仅当 } n = 2 \text{ 时 } \left(\frac{S_n + 10}{a_n + 1} \right)_{\min} = 3.$$

$$12. \text{ 由已知得 } a_1^2 + (a_1 + 4d)^2 = 8, \text{ 化简得 } (a_1 + 2d)^2 + 4d^2 = 4, \text{ 引入参数方程 } \begin{cases} a_1 + 2d = 2 \cos \theta \\ 4d = 4 \sin \theta \end{cases} \text{ 于}$$

是 $a_1 + a_2 = 4 \cos \theta - 3 \sin \theta = -5 \sin(\theta + \varphi)$, 其中 $\tan \varphi = -\frac{4}{3}$, 故有最大值 5.

13. 由已知得 $\frac{a_{n+1}}{2n-3} = \frac{a_n}{2n-5} + 1$, 又 $\frac{a_1}{2-5} = -7$, 即数列 $\left\{ \frac{a_n}{2n-5} \right\}$ 是首项为 -7, 公差为 1 的等差数列, 于是 $\frac{a_n}{2n-5} = n - 8$, 则 $a_n = (2n-5)(n-8)$, 其对称轴 $n = 5.25$, 所以 a_n 的最小的一项是第 5 项. 故选 A.

14. $\because a_1 = 0$, $\therefore 4a_{n+1} \cdot a_n \geq 0$, $\therefore a_{n+1} + a_n - 1 = 2\sqrt{4a_{n+1} \cdot a_n}$, 即 $(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})^2 = 1$, 即数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是首项为 0, 公差为 1 的等差数列, $\therefore \sqrt{a_n} = n - 1$, 即 $a_n = (n-1)^2$.

15. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $2020 \cdot a_{2019} = 2019 \cdot a_{2020} \Rightarrow 2020(a_1 + 2018d) = 2019(a_1 + 2019d)$, 于是 $a_1 = d$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)d \neq 0$, 故 $\frac{S_{2019}}{S_{2020}} = \frac{\frac{1}{2} \times 2019 \times 2020}{\frac{1}{2} \times 2020 \times 2021} = \frac{2019}{2021}$.

$$16. \frac{S_5}{S_9} = \frac{5a_3}{9a_5} = \frac{5}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{27}.$$

17. 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $2 \times \frac{S_2}{a_2} = 1 + \frac{S_3}{a_3}$, 可得 $d(d - a_1) = 0$, 于是 $d = a_1 (d > 0)$,

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = na_1, \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}a_1, \text{ 即 } \frac{S_n}{a_n} = \frac{n+1}{2}, \text{ 则 } \frac{S_3}{a_3} = 2, \text{ 选 B.}$$

18. 易知奇函数 $f(0) = 0 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \cos \frac{n\pi}{3}$, 所以 $a_2 = a_1 + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$, $a_3 = a_2 + \cos \frac{2\pi}{3} = 1$,

$a_4 = a_3 + \cos \frac{3\pi}{3} = 0$, $a_5 = a_4 + \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $a_6 = a_5 + \cos \frac{5\pi}{3} = 0$, $a_7 = a_6 + \cos \frac{6\pi}{3} = 1$, 于是最小正周期为 6,

$\therefore 2020 \div 6 = 336 \cdots 4$, 于是

$$S_{2020} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2020} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 336(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) = \frac{7}{2} + 336 \times 3 = \frac{2023}{2}.$$

故选 A.

19. (1) 依题意 $S_9 = 9a_5 = 54 \Rightarrow a_5 = 6$, 又 $a_3 = 2$, $\therefore d = \frac{6-2}{5-3} = 2$, $\therefore a_n = 2n - 4$;

(2)

证 由 (1) 知 $\sqrt{\frac{1}{a_n+3}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} > \frac{2}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$,

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\frac{1}{a_1+3}} + \sqrt{\frac{1}{a_2+3}} + \sqrt{\frac{1}{a_3+3}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{a_{100}+3}} \\ > (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{201}-\sqrt{199}) = \sqrt{201}-1 > 14-1 = 13. \end{aligned}$$

20. 依题意, $a_{2019} = S_{2019} - S_{2018} > 0$, $a_{2020} = S_{2020} - S_{2019} < 0$, 所以等差数列 $\{a_n\}$ 递减, 且 $a_1, a_2, \cdots, a_{2019} > 0$, $a_{2020}, a_{2021}, \cdots, a_n < 0$, 且 $a_{2019} + a_{2020} > 0$, 对于 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$, 易知

- 当 $n \leq 2017$ 时, $b_n > 0$, $\frac{1}{b_n} > 0$, $T_n \nearrow$;
- 当 $n = 2018$ 时, $b_n < 0$, $\frac{1}{b_n} < 0$, $T_{2018} < T_{2017}$;
- 当 $n = 2019$ 时, $b_n > 0$, $\frac{1}{b_n} > 0$, $T_{2019} > T_{2018}$;
- 当 $n > 2020$ 时, $b_n < 0$, $\frac{1}{b_n} < 0$, $T_n \searrow$.

所以 T_n 的最大值是 T_{2017} , T_{2019} 中的一个, 又

$$\frac{1}{b_{2018}} + \frac{1}{b_{2019}} = \frac{1}{a_{2018}a_{2019}a_{2020}} + \frac{1}{a_{2019}a_{2020}a_{2021}} = \frac{a_{2021} + a_{2018}}{a_{2018}a_{2019}a_{2020}a_{2021}} \quad (11.1)$$

而

$$\begin{cases} a_{2021} + a_{2018} = a_{2019} + a_{2020} > 0 \\ a_{2018}a_{2019}a_{2020}a_{2021} > 0 \end{cases} \quad (11.2)$$

$$(11.3)$$

由式 (11.1), (11.2), (11.3) 可知 $\frac{1}{b_{2018}} + \frac{1}{b_{2019}} > 0$,

所以 $T_{2019} > T_{2017}$. 故选 B.

注 特殊化: 令 $a_{2019} = 3$, $a_{2020} = -1$, 满足 $a_{2019} + a_{2020} > 0$. 即可方便验证.

21. 由赋值法可得数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 故其前 n 项和 $S_n = 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$, 所以 $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+10} = S_{k+10} - S_k = 2^{k+11} - 2^{k+1} = 2^{15} - 2^5$, 解得 $k = 4$.

22. (1) 依题意 $a_1 + a_2 = a_1(1 + q) = 4$, $a_3 - a_1 = a_1(q^2 - 1) = 8$, 两式作比可得 $\frac{1}{q-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow q = 3$, 所以 $a_n = 3^{n-1}$.

(2) 由 (1) 知数列 $\{\log_3 a_n\}$ 的通项公式为 $n-1$, 于是 $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$, 故由式 $S_m + S_{m+1} = S_{m+3}$ 可得 $\frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m+2)(m+3)}{2}$, 解得 $m = 6$ 或 $m = 0$ (舍去).

23. (1) $a_n = 2^n$;

(2) 依题意 $b_2 = 1$, $b_4 = 2$, $b_8 = 3$, $b_{16} = 4$, $b_{32} = 5$, $b_{64} = 6$, 前 100 项其余为 0, 故 $S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

24. 易知此数列为等比数列, 当 $n = 1$ 时, $a_1 = -2$, 当 $n = 2$ 时, $a_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} - 1$, 可知 $a_2 = -4$, 所以公比 $q = 2$, 于是 $S_7 = \frac{(-2)(1-2^7)}{1-2} = -254$, 答案为 -254 .

25. 依题意 $S_n = \frac{3}{2}a_n + \frac{3}{2}$, $\therefore a_1 = -3$, $q = 3 \Rightarrow a_n = -3^n$, $\therefore \frac{a_{10}}{a_8} = k = 3^2 = 9$.

26. $\because S_n = Aq^n - A$, $\therefore S_n = \frac{a}{4} \cdot 4^n + b$, $\therefore \frac{a}{4} = -b$, $\therefore \frac{b}{a} = -\frac{1}{4}$.

27. 依题意可设 $a_n = kq^n$, 则 $a_n a_{n+1} = k^2 q \cdot (q^2)^n$, 所以 $q^2 = 9$, 且 $k^2 q = 1$, 于是 $q = 3$.

28. 由数列通项公式的通性, 不妨设 $a_n a \cdot b^n$, 则 $a_n + a_{n+1} = ab(1+b)b^{n-1} = 4 \times 3^{n-1}$, 解得 $a = \frac{1}{3}$, $b = 3$, 于是 $a_n = 3^{n-1}$, 经验证 $a_1 = 1$ 符合上式, 故数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 3 为公比的等比数列, 故 $S_{2020} = \frac{3^{2020} - 1}{2}$.

29. 根据公式 $S_{2021} = \frac{a_1(1-q^{2021})}{1-q}$, 可知 a_1 和 S_{2021} 同号, 故选 C.

30. 等比数列 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6, \cdots$ 成等比数列, 设 $S_3 = 1$, 则 $S_5 = 6$, 于是 $S_9 - S_6 = 25$, 所以 $S_9 = 31$, 则 $\frac{S_9}{S_6} = \frac{31}{6}$.

32. 令 $a_1 = 2$, $q = 3$, 满足 $\{a_n\}$ 是递增数列, 故 A $\times$; 令 $a_1 = -1$, $q = 2$, 满足 $\{a_n\}$ 是递减数列, 故 B $\times$; 令 $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, 则 $a_6 < a_5$, $S_6 - S_5 < S_5 - S_4$, 故 C $\times$; 选项 D 明显正确.

33. 由等比数列性质知 $a_1 a_{11} + 2a_5 a_9 + a_3 a_{13} = a_6^2 + 2a_6 a_8 + a_8^2 = (a_6 + a_8)^2 = 25$, 于是 $a_6 + a_8 = 5$, 所以 $a_1 a_{13} = a_6 a_8 \leq \left(\frac{a_6 + a_8}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, 当且仅当 $a_6 = a_8 = \frac{5}{2}$ 时取等号.

34. (1) 由 $a_{n+1} = a_1 + 2T_n$ 得 $a_2 = a_1 + 2b_1 = 2 + 2 = 4$, 因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 所以该数列的公差为 $a_2 - a_1 = 2$, 于是 $S_n = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2 + n$;

(2) 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = a_1 + 2T_{n-1}$, 因为 $T_n - T_{n-1} = b_n$, 所以 $a_{n+1} - a_n = 2b_n$, 即 $a_{n+1} = a_n + 2b_n$, 同理可得 $b_{n+1} = b_n + 2a_n$,

则 $a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n)$, 所以 $\frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{a_n + b_n} = 3 (n \geq 2)$, 又 $a_2 = a_1 + 2b_1 = 2 + 2 = 4$, $b_2 = b_1 + 2a_1 = 5$,

所以 $\frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} = 3$, 所以 $\frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{a_n + b_n} = 3$, 所以数列 $\{a_n + b_n\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列;

因为 $a_{n+1} - b_{n+1} = -(a_n - b_n)$, 所以 $\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = -1 (n \geq 2)$, 又 $\frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} = \frac{4 - 5}{2 - 1} = -1$, 所以

$\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = -1$, 所以数列 $\{a_n - b_n\}$ 是以 -1 为首项, -1 为公比的等比数列.

35. $a_7 = a_6 + 2a_5 \Rightarrow q^2 a_5 = q a_5 + 2a_5 \Rightarrow q^2 = q + 2$, 解得 $q = 2$ 或 $q = -1$ (舍去), 所以

$\sqrt{a_m a_n} = 4a_1 \Rightarrow \sqrt{a_1 2^{m-1} \cdot a_1 2^{n-1}} = 4a_1$, $\therefore 2^{m+n-2} = 16 \Rightarrow m + n = 6$, 由权方和不等式知

$\frac{1}{m} + \frac{4}{n} \geq \frac{(1+2)^2}{6} = \frac{3}{2}$. 当且仅当 $n = 2m$ 时等号成立.

36. 由式 $a_1 a_2 a_3 = 1$ 可得 $a_2 = \pm 1$, 所以 $\begin{cases} a_1 a_3 = 1 \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} = \frac{5}{2} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_3 = 2 \end{cases}$ 于是可解得

$a_n = 2^{n-2}$ 或 $a_n = 2^{2-n}$.

37. $\frac{a_{2019} - 1}{a_{2020} - 1} < 0 \Rightarrow a_{2019}$ 和 a_{2020} 一个比 1 大, 一个比 1 小, 但 $a_1 > 1$ 说明等比数列 $\{a_n\}$ 单调递减,

故 $0 < q < 1$, 且 $a_{2019} > 1$, $0 < a_{2020} < 1$, 故 $S_{2019} < S_{2020}$, 所以 A ✓;

有因为等比数列, 所以 $a_{2019} a_{2021} - 1 = a_{2020}^2 - 1 < 0$, 所以 B ✓;

T_{2019} 是数列 $\{T_n\}$ 中的最大值, 所以 C ✗; D ✗. 答案为 A, B.

38. 由比例的等比性质可知 $\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_5 - a_4}{a_4 - a_2} = \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}$, 所以 $a_2 = 2a_4$, 又 $a_1 = 5$, 所以

$5 + d = 2 \times (5 + 3d)$, 于是 $d = -1$, 所以 $a_{2020} = 5 - 2019 = -2014$. 故选 D.

39. (1) 由比例的等比性质可知 $\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_8}{a_4} = \frac{a_8 - a_4}{a_4 - a_2} = \frac{4d}{2d} = 2$, 所以 $a_4 = 2a_2 = 2(a_1 + d) = 8 + 2d$, 又 $a_4 = a_1 + 3d = 4 + 3d$, 所以 $d = 4$, 于是 $a_n = 4n$;

(2) 由 (1) 知 $S_n = n(2n+2)$, 所以 $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$, 于是

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

40. 由比例的等比性质可知 $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_9}{a_3} = \frac{a_9 - a_3}{a_3 - a_2} = \frac{6d}{d} = 6$, 所以 $a_3 = 6a_2$, 又 $a_3 = a_2 + d$, 所以 $d = 5a_2$, 于是 $\frac{a_2 + a_3 + a_4}{a_4 + a_5 + a_6} = \frac{a_3}{a_5} = \frac{a_2 + d}{a_2 + 3d} = \frac{3}{8}$. 故选 B.

41. 由式 $2a_7 - a_{13} = 1$ 可得 $a_1 = 1$, 由 $a_1, a_3 - 1, a_6 + 5$ 成等比数列, 可得 $d = 2$ (负值舍去), 则 $a_n = 2n - 1$,

所以数列 $\{(-1)^{n-1}a_n\}$ 的前 21 项和为

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{19} - a_{20} + a_{21} = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + 37 - 39 + 41 = -2 \times 10 + 41 = 21.$$

42. 依题意 $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_5) - (\cos a_1 + \cos a_2 + \cdots + \cos a_5) = 5\pi$, 又因为 $\cos a_1 + \cos a_2 + \cdots + \cos a_5$ 不是 π 的倍数, 故 $\cos a_1 + \cos a_2 + \cdots + \cos a_5 = 0$, 因此 $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_5) = 10a_3 = 5\pi \Rightarrow a_3 = \frac{\pi}{2}$. 故选 D.

43. 易知 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{3\pi}{8}, 1\right)$.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{21} = 21 \cdot a_{11} = 21 \times \frac{3\pi}{8} \Rightarrow f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{11}) = 21 \times 1 = 21.$$

44. 依题意 $f(x) + f(2-x) = e^x - e^{2-x} + 1 + e^{2-x} - e^x + 1 = 2$, 所以 $f(x)$ 的对称中心为 $(1, 1)$, 故 $f(x) + f(2-x) = 2$.

又由阶差法可知数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{4}$ 为首项, 公比等于 2 的等比数列, 于是 $a_n = 2^{n-3}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(\log_2 a_1) + f(\log_2 a_2) + \cdots + f(\log_2 a_7) &= f(-2) + f(-1) + \cdots + f(4) = \\ (f(-2) + f(4)) + (f(-1) + f(3)) + (f(0) + f(2)) + f(1) &= 3 \times 2 + 1 = 7. \end{aligned}$$

45. 当 $n = 1$ 时, $a_1 + b_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n + b_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 2 + 2^{n-1}$, 所以 $a_2 + b_2 = 4$, 于是

$$d + q = (a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) = 3.$$

46. 依题意

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 + \cdots + 3^{n-1}a_n = n & (11.4) \\ a_1 + 3a_2 + \cdots + 3^{n-2}a_{n-1} = n-1 & (11.5) \end{cases}$$

式 (11.4) - (11.5) 得 $3^{n-1}a_n = 1 \Rightarrow a_n = 3^{1-n}$,

$$\therefore S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} = \frac{40}{27}.$$

47. 当 $n=1$ 时, $a_1 = 2a_1 - 2$, 解得 $a_1 = 2$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_n = 2a_n - 2$, 所以 $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2$, 两式做差得 $a_n = 2a_{n-1}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 故 $a_n = 2^n$, 于是由 $a_m a_n = 64$ 可得 $2^{m+n} = 2^6$, 解得 $m+n=6$,

$$\bullet m=1, n=5, \text{ 此时 } \frac{1}{1} + \frac{16}{5} = \frac{21}{5};$$

$$\bullet m=5, n=1, \text{ 此时 } \frac{1}{5} + \frac{16}{1} = \frac{81}{5};$$

$$\bullet m=2, n=4, \text{ 此时 } \frac{1}{2} + \frac{16}{4} = \frac{9}{2};$$

$$\bullet m=4, n=2, \text{ 此时 } \frac{1}{4} + \frac{16}{2} = \frac{33}{4};$$

故选 B.

48. 当 $n=1$ 时, $2\sqrt{a_1} = a_1 + 1$, 解得 $a_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, $4S_n = a_n^2 + 2a_n + 1$, 所以

$4S_{n-1} = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} + 1$, 两式做差得 $a_n^2 - a_{n-1}^2 = 2a_n + 2a_{n-1}$, 于是 $a_n - a_{n-1} = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列, 故 $a_n - 7 = 2n - 8$, 于是 $T_n = n(n-7)$, 当 $n=3$ 时 T_n 有最小值 -12.

49. $\because S_n + S_{n+1} = 2n^2 + 3n$, $S_{n+1} + S_{n+2} = 2(n+1)^2 + 3(n+1)$, 两式相减得

$$S_{n+2} - S_n = a_{n+2} + a_{n+1} = 4n + 5, \text{ 化简得 } a_{n+2} = 4n + 5 - a_{n+1}, \text{ 于是 } a_{n+1} = 4n + 1 - a_n (n \geq 2),$$

两式相减得 $a_{n+2} - a_n = 4 (n \geq 2)$, 可得数列 $\{a_n\}$ 是从第二项开始的偶数项, 组成的以 4 为公差的等差数列, 由 $a_{n+2} - a_n = 4$ 可得 $a_{n+1} - a_{n-1} = 4 (n \geq 3)$, 可得数列 $\{a_n\}$ 是从第三项开始的奇数项, 组成的以 4 为公差的等差数列,

又因为 $S_1 + S_2 = 2a_1 + a_2 = 5$, 则有 $a_2 = 5 - 2a_1$, $a_3 = 9 - a_2 = 4 + 2a_1$, $a_4 = 13 - a_3 = 9 - 2a_1$, $a_5 = 17 - a_4 = 8 + 2a_1$, $a_6 = 21 - a_5 = 13 - 2a_1$, 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a_n < a_{n+1}$, 则由 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 从第二项开始, 得:

由 $a_2 < a_3$ 得 $a_1 > \frac{1}{4}$; 由 $a_3 < a_4$ 得 $a_1 < \frac{5}{4}$; 由 $a_4 < a_5$ 得 $a_1 > \frac{1}{4}$; 由 $a_5 < a_6$ 得 $a_1 < \frac{5}{4}$; $\cdots$, 于是 $\frac{1}{4} < a_1 < \frac{5}{4}$.

50. 依题意当 $n \geq 2$ 时, $a_1 + 4a_2 + 7a_3 + \cdots + (3n-2)a_n = (n-1)4^{n+1} + 2$, 于是

$$a_1 + 4a_2 + 7a_3 + \cdots + (3n-5)a_{n-1} = (n-2)4^n + 2, \text{ 两式相减得}$$

$$(3n-2)a_n = [(4n-4) - (n-2)]4^n = (3n-2) \cdot 4^n, \text{ 即 } a_n = 4^n (n \geq 2),$$

当 $n=1$ 时, 易知 $a_1=2$, $\therefore a_n = \begin{cases} 2, & n=1 \\ 4^n, & n \geq 2 \end{cases}$

于是有 $S_n = 2 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n = 2 + \frac{16(1-4^{n-1})}{1-4} = \frac{4^{n+1}-10}{3}$, 由方程 $\frac{3}{2}(S_n-16) = 2019$ 化简可得 $4^{n+1} = 4096 = 4^6$, $\therefore n=5$, $\therefore$ 所有正整数 n 的集合是 $\{5\}$.

51. 依题意

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = 2^n - 1 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = 2^{n-1} - 1 \end{cases} \quad (11.6)$$

$$(11.6) - (11.7) \text{ 得 } na_n = 2^{n-1}, \therefore a_n = \frac{2^{n-1}}{n}, \quad (11.7)$$

所以 $\frac{2^{n-1}}{n} \leq \frac{n+1}{n} \cdot \lambda \Rightarrow \lambda \geq \frac{2^{n-1}}{n+1}$, 记 $b_n = \frac{2^{n-1}}{n+1}$, 则 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{n+2+n}{n+2} > 1$,

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 单调递增, $b_n \geq b_1 = \frac{1}{2}$, 故 λ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

答案为 $\frac{2^{n-1}}{n}, \frac{1}{2}$.

52. 依题意可得 $a_{n+1} = 32 + \sum_{i=1}^n 2i = 32 + \frac{n(2+2n)}{2} = 32 + n(n+1)$, 于是 $a_n = 32 + n(n-1)$, 故

$\frac{a_n}{n} = \frac{32}{n} + n - 1$, 当 $n=6$ 时有最小值 $\frac{31}{3}$. 选 C.

53. 依题意可得 $a_{n+1} = 2 + \sum_{i=1}^n (2i+2) = 2 + n(n+3)$, 于是 $a_n = n(n+1)$, 所以 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 故

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{20}} = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$. 选 D.

54. 依题意可得 $a_{n+1} - a_n = 2 \times 3^n + 1$, 所以

$a_{n+1} = 3 + \sum_{i=1}^n (2 \times 3^i + 1) \stackrel{\text{分组求和}}{=} 3 + 2 \times (3 + 3^2 + \cdots + 3^n) + n = 3^{n+1} + n$, 于是 $a_n = 3^n + n - 1$.

55. (1)

证 易知 $a_n = 2^{n-1}$, 依题意得 $(b_{n+2} - b_{n+1}) - (b_{n+1} - b_n) = 2$, 所以数列 $\{b_{n+1} - b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, 于是 $b_{n+1} - b_n = 2n - 1$,

所以 $b_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^n (2i-1) = 1 + n^2$, 所以 $b_n = 1 + (n-1)^2 = n^2 - 2n + 2$;

(2) 设 $c_n = \frac{b_n}{a_n}$, 所以 $c_n - c_{n-1} = \frac{n^2 - 2n + 2}{2^{n-1}} - \frac{(n-1)^2 - 2(n-1) + 2}{2^{n-2}} = -\frac{(n-2)(n-4)}{2^{n-1}}$,

$\therefore c_1 = c_2 < c_3 = c_4 > c_5 > c_6 > \cdots$, 故 c_n 的最大值为 $c_4 = \frac{4^2 - 8 + 2}{2^3} = \frac{5}{4}$.

56. 依题意 $a_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n}\right)a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n}$, 由分母减去分子 (大减小) 除以 n 的系数得

$$\frac{(n+2)-n}{1} = 2, \text{ 可知 } \frac{a_{n+1}}{a_1} = \frac{(n+2)(n+1)}{1 \times 2} \Rightarrow a_{n+1} = (n+2)(n+1) \Rightarrow a_n = n(n+1).$$

57. 十字相乘 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$ 可化为 $(a_{n+1} + a_n)[(n+1)a_{n+1} - na_n] = 0$, 所以

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}, \text{ 由分母减去分子 (大减小) 除以 } n \text{ 的系数得 } \frac{(n+1)-n}{1} = 1, \text{ 可知}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} = \frac{1}{(n+1)} \Rightarrow a_n = \frac{1}{(n+1)}.$$

58. 由 $2(n+1)a_n - na_{n+1} = 0$ 可得 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = 2 \times \frac{a_n}{n}$, 所以 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是以 $\frac{a_1}{1} = 4$ 为首项, 2 为公比的等比数

列, 故 A $\times$; 因为 $\frac{a_n}{n} = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$, 所以 $a_n = n \cdot 2^{n+1}$, 显然递增, 故 A $\checkmark$; 因为

$$S_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n+1}, 2S_n = 1 \times 2^3 + 2 \times 2^4 + \cdots + n \cdot 2^{n+2}, \text{ 所以}$$

$$-S_n = 1 \times 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1} - n \cdot 2^{n+2} = \frac{2^2(1-2^n)}{1-2} - n \cdot 2^{n+2}, \text{ 于是 } S_n = (n-1) \times 2^{n+2} + 4, \text{ 故 C } \times;$$

因为 $\frac{a_n}{2^{n+1}} = \frac{n \cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}} = n$, 所以 $\left\{\frac{a_n}{2^{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{n^2+n}{2}$, 故 D $\checkmark$.

59. 设

$$a_n + \lambda = \frac{2}{3}(a_{n-1} + \lambda) \Rightarrow a_n = \frac{2}{3}a_{n-1} - \frac{1}{3}\lambda \quad (11.8)$$

由题设

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1 \quad (11.9)$$

比较 (11.8), (11.9) 两式可得 $\lambda = -3$, 故 $a_n - 3 = \frac{2}{3}(a_{n-1} - 3)$, 因此数列 $\{a_n - 3\}$ 是首项为

$$1 - 3 = -2, \text{ 公比为 } \frac{2}{3} \text{ 的等比数列, 所以 } a_n - 3 = (-2) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = 3 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

60. 当 $n = 1$ 时, $a_1 = 3a_1 - 2 \Rightarrow a_1 = 1$, 当 $n = 2$ 时, $a_1 + a_2 = 3a_2 - 4 \Rightarrow a_2 = \frac{5}{2}$, 当 $n = 3$ 时,

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3a_3 - 6 \Rightarrow a_3 = \frac{19}{4}, \text{ 于是 } \left(\frac{5}{2} + \lambda\right)^2 = (1 + \lambda)\left(\frac{19}{4} + \lambda\right), \text{ 解得 } \lambda = 2.$$

61. (1) 由式 $S_n = 3a_n - 2n$ 得 $S_{n+1} = 3a_{n+1} - 2(n+1)$, 两式做差得 $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + 1$, 由第 13 页一次函

数型的做法构造等比数列可知 $\{a_n + 2\}$ 为以 3 为首项, $\frac{3}{2}$ 为公比的等比数列, 即 $\{b_n\}$ 为以 3 为首

$$\text{项, } \frac{3}{2} \text{ 为公比的等比数列. } \therefore a_n + 2 = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 2;$$

$$(2) \because c_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \therefore T_n = \frac{\frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n, \therefore T_n < 1, \text{ 故 } m \geq 1.$$

62. (1) 由 $T_1 = 2b_1 - 1$ 得 $b_1 = 1$, 因为 $T_n - T_{n-1} = (2b_n - n) - [2b_{n-1} - (n-1)] (n \geq 2)$, 所以 $b_n = 2b_{n-1} + 1$, 从而由 $b_n + 1 = 2(b_{n-1} + 1)$, 得 $\frac{b_n + 1}{b_{n-1} + 1} = 2 (n \geq 2)$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 故 $b_n = 2^n - 1$;
 (2) 依题意, $a_n = 2 \log_2(1 + b_n) - 1 = 2n - 1$, $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, 所以 $a_{n+1} - a_n = 2$, 于是数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, 又因为 $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 7$, $b_4 = 15$, $b_5 = 31$, $b_6 = 63$, $b_7 = 127$, $a_{56} = 111$, $a_{57} = 113$,
 所以 $c_1 + c_2 + \cdots + c_{50} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{56}) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_6) =$
 $\frac{56(1 + 111)}{2} - (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^6 - 6) = 56^2 - (2^7 - 8) = 3016$.

63. 式子 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ 两边同乘以 2^{n+1} , 得 $2^{n+1}a_{n+1} = 2^n a_n + 1$, 所以数列 $\{2^n a_n\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 于是 $2^n a_n = n$, 解得 $a_n = \frac{n}{2^n}$, 由错位相减法得 $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, 于是 $S_{10} = 2 - \frac{12}{2^{10}} = 2 - \frac{3}{2^8} = \frac{509}{256}$.

64. 给式 $a_{n+1} = 2a_n + 4 \cdot 3^{n-1}$ 两边同除以 3^{n+1} , 得 $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{4}{3^2}$. 令 $b_n = \frac{a_n}{3^n}$, 得

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{4}{9} \quad (11.10)$$

设

$$b_{n+1} + \lambda = \frac{2}{3}(b_n + \lambda) \Rightarrow b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n - \frac{1}{3}\lambda \quad (11.11)$$

由式 (11.10), (11.11) 可得 $\lambda = -\frac{4}{3}$, 因此数列 $\left\{b_n - \frac{4}{3}\right\}$ 为首项等于 -1, 公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列, 于是 $b_n - \frac{4}{3} = (-1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow b_n = \frac{4}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, 所以 $a_n = 3^n \left[\frac{4}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] = 4 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}$.

65. (1)

证 $\because 3a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3^n}$, $\therefore 3^{n+1}a_{n+1} = 3^n a_n + 1$, 又因为 $a_1 = 1$, 所以 $3a_1 = 3$,
 $\therefore$ 数列 $\{3^n \cdot a_n\}$ 是以 3 为首项, 1 为公差的等差数列.

(2) 由 (1) 知 $3^n \cdot a_n = 3 + n - 1 = n + 2$, $\therefore a_n = \frac{n+2}{3^n}$,

$$\begin{aligned} S_n &= 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + (n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + (n+2) \left(\frac{1}{3}\right)^n, \\ \frac{1}{3}S_n &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots + (n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^n + (n+2) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}, \\ \therefore \frac{2}{3}S_n &= 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n - (n+2) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - (n+2) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}, \\ \therefore S_n &= \frac{7}{4} - \left(\frac{n}{2} + \frac{7}{4}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{7}{4} - \frac{2n+7}{4 \cdot 3^n}. \end{aligned}$$

66. 设 $2(a_n + xn + y) = a_{n-1} + x(n-1) + y$, 和原式比较可解得 $x = -6$, $y = 9$,

所以数列 $\{a_n - 6n + 9\}$ 是首项为 $\frac{9}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 于是

$$a_n - 6n + 9 = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6n - 9.$$

67. 设 $a_{n+1} + k(n+1) + b = 2(a_n + kn + b)$, 和原式比较可解得 $k = 2$, $b = 1$,

所以数列 $\{a_n + 2n + 1\}$ 是首项为 5, 公比为 2 的等比数列, 于是

$$a_n + 2n + 1 = 5 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 2n - 1.$$

68. 给式 $a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$ 取倒数, $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 1}{a_n} = \frac{1}{a_n} + 3$, 令 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 则 $b_{n+1} = b_n + 3$, 得数列 $\{b_n\}$ 为

首项等于 1, 公差为 3 的等差数列, 于是 $b_n = 3n - 2$, 所以 $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. 答案为 C.

69. 给式 $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3}$ 取倒数, $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 3}{a_n} = \frac{3}{a_n} + 1$, 令 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 则 $b_{n+1} = 3b_n + 1$,

设 $b_{n+1} + \lambda = 3(b_n + \lambda) \Rightarrow b_{n+1} = 3b_n + 2\lambda$,

由以上两式可得 $\lambda = \frac{1}{2}$, 因此数列 $\left\{b_n + \frac{1}{2}\right\}$ 为首项等于 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, 公比为 3 的等比数列, 于是

$$b_n + \frac{1}{2} = 1 \times 3^{n-1} \Rightarrow b_n = 3^{n-1} - \frac{1}{2}, \text{ 所以 } a_n = \frac{2}{2 \times 3^{n-1} - 1}.$$

70. 给式 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$ 取倒数, $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{a_n} = \frac{1}{a_n} + 2$, 令 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 则 $b_{n+1} = b_n + 2$, 因此数列 $\{b_n\}$

为首项等于 1, 公差为 2 的等差数列, 于是 $b_n = 2n - 1$, 所以 $a_n = \frac{1}{2n-1}$.

71. 由阶差法可得 $a_{n+1} - a_{n-1} = 2$, 分奇偶可得 $\begin{cases} a_{2k-1} = 2k-1 \\ a_{2k} = 2k \end{cases}$, 故 $a_n = n$.

72. 依题意, 当 $n = 2k - 1 (k \in \mathbf{N}^*)$ 时,

$$a_{2k+1} = \left[1 + \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{2}\right] a_{2k-1} + \sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2} = a_{2k-1} + 1$$

所以数列 $\{a_{2k-1}\}$ 以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 因此 $a_{2k-1} = k$;

当 $n = 2k (k \in \mathbf{N}^*)$ 时,

$$a_{2k+2} = \left[1 + \cos^2 \frac{(2k)\pi}{2}\right] a_{2k} + \sin^2 \frac{(2k)\pi}{2} = 2a_{2k}$$

所以数列 $\{a_{2k}\}$ 以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 因此 $a_{2k} = 2^k$.

$$\text{故 } a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & (n \text{ 为奇数}) \\ 2^{\frac{n}{2}} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}.$$

73. $\because S_n - S_{n-2} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n \geq 3)$, 所以 $a_n + a_{n-1} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 已经是类型 3 了.

74. 观察题目, 我们可得 $a_{n+2} - a_n = \lambda$, 假设结论成立, 通过前 3 项可得 $\lambda = 4$, 由类型 1 可得 $a_n = 2n - 1$.

76. (1) 依题意 $a_2 + a_3 = 2a_1 \Rightarrow q^2 + q - 2 = 0 \Rightarrow q = -2$.

(2) 记 $b_n = na_n$, 由 (1) 知数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $n(-2)^{n-1}$, 于是 $b_1 = 1, a = 1, p = -2$, 故

$$A = \frac{ap}{p-1} = \frac{2}{3}, B = \frac{b_1 - Ap}{p-1} = -\frac{7}{9}, \text{ 故 } S_n = \left(\frac{2}{3}n - \frac{7}{9}\right)(-2)^n + \frac{7}{9}.$$

78. (1) 当 $n = k \in \mathbf{N}^*$ 时, $S = -\frac{1}{2}n^2 + kn$ 取得最大值, 即 $8 = S_k = -\frac{1}{2}k^2 + k^2 \Rightarrow k = 4$,

从而 $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{9}{2} - n (n \geq 2)$, 又 $a_1 = S_1 = \frac{7}{2}$, 所以 $a_n = \frac{9}{2} - n$;

$$(2) \because \frac{9 - 2a_n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

$$\therefore T_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}}, \therefore 2T_n = 2 + 2 + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-3}} + \frac{n}{2^{n-2}},$$

所以

$$\begin{aligned} 2T_n - T_n &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{n}{2^{n-1}} = 4 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{n}{2^{n-1}} \\ &= 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} \Rightarrow T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

79. (1) 依题意当 $n = 1$ 时, $\frac{a_1 + 2}{2} = \sqrt{a_1 \cdot 2} \Rightarrow a_1 = 2$,

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_n + 2}{2} = \sqrt{S_n \cdot 2}$, 两边平方整理得

$$a_n^2 + 4a_n + 4 = 8S_n \quad (11.12)$$

$$a_{n+1}^2 + 4a_{n+1} + 4 = 8S_{n+1} \quad (11.13)$$

式 (11.13) - (11.12) 得 $a_{n+1}^2 - a_n^2 + 4(a_{n+1} - a_n) = 8a_{n+1}$,

整理得

$$(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 4) = 0 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 4 \quad (11.14)$$

$\therefore \{a_n\}$ 是首项为 2, 公差为 4 的等差数列, 通项公式为 $a_n = 4n - 2$;

(2)

证 由 (1) 知 $b_n = \frac{8}{a_n a_{n+1}} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$, 则

$$\begin{aligned} T_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

$\because n \in \mathbf{N}^*$, $\therefore 0 < \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{3}$, $\therefore \frac{2}{3} \leq 1 - \frac{1}{2n+1} < 1$. 于是 $\frac{2}{3} \leq T_n < 1$.

80. $\because (2+2d)^2 = 2 \cdot (2+6d)$, 所以 $d=1$, 故 $a_n = n+1$, 则

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{\text{分母 } n+1 \text{ 的 } n \text{ 移到分子}} \frac{n}{(1+1)(n+2)}. \text{ 当 } n=2019 \text{ 时, 选 B.}$$

81. (1) $a_n = n+5$;

(2) 由 (1) 知 $c_n = \frac{1}{(2a_n - 11)(2a_n - 9)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, 所以数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和

$T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$, 又不等式 $T_n < \frac{k}{2018} \Leftrightarrow \frac{k}{2018} > \frac{n}{2n+1}$. 根据本书第 271 页 “ $\frac{1}{1}$ ” 型函数性质知 $\frac{k}{2018} \geq \frac{1}{2}$, 因此 $k \geq 1009$.

82. (1) 由式 $4S_n = a_n^2 + 2a_n$ 得 $4S_{n+1} = a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}$, 两式做差得 $4a_{n+1} = a_{n+1}^2 - a_n^2 + 2a_{n+1} - 2a_n$, 即 $(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 2) = 0$, 所以 $a_{n+1} - a_n = 2$, 又 $a_1 = 2$ 符合上式, 故 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公差为 2 的等差数列, 因此 $a_n = 2n$;

(2)

证 由 (1) 知 $b_n = \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4n^2 + 4n + 1} < \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$,

$$\therefore T_n < \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{4}.$$

83. (1) 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n$, 又 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$ 满足上式, $\therefore a_n = 2n$,

$\because b_5 + 4$ 是 b_4, b_6 的等差中项, 可得 $b_4 + b_6 = 2(b_5 + 4)$, 又等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q > 1$, 且

$$b_4 + b_5 + b_6 = 56, \therefore b_5 = 16, b_4 + b_6 = 40, \text{ 又 } \because b_4 b_6 = b_5^2 = 16^2, q > 1, \text{ 解得 } b_4 = 8, b_6 = 32,$$

$$\therefore q = 2, b_n = 2^{n-1};$$

$$(2) \because b_n + \frac{1}{a_n^2 - 1} = 2^{n-1} + \frac{1}{(2n)^2 - 1} = 2^{n-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\therefore T_n = (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = 2^n - 1 + \frac{n}{2n+1}.$$

84. (1) 令 $n=1$, 得 $a_1 b_1 = 3 + (2-3) \times 2 = 1$, 所以 $b_1 = 1$, 令 $n=2$, 得 $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 7$, 所以 $a_2 = 2$,

故数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $\frac{a_2}{a_1} = 2$, 所以 $a_n = 2^{n-1}$;

(2) 当 $n \geq 2$ 时, $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 3 + (2n-3)2^n$, 于是

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} = 3 + (2n-5)2^{n-1}$. 两式做差得

$$a_n b_n = 3 + (2n-3)2^n - [3 + (2n-5)2^{n-1}] = (2n-1)2^{n-1},$$

得 $b_n = 2n-1$, $n=1$ 时也成立. 所以 $b_n = 2n-1$, 故

$$\frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{于是 } T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}.$$

85. (1) 因为点 (S_n, a_{n+1}) 在直线 $y = x + 1$ 上, 所以 $a_{n+1} = S_n + 1$, 于是 $a_n = S_{n-1} + 1 (n \geq 2)$, 两式相减得 $a_{n+1} - a_n = a_n$, 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 (n \geq 2)$, 经验证 $\frac{a_2}{a_1} = 2$ 合适, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 于是 $a_n = 2^{n-1}$;

(2) 由 (1) 知 $b_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$, 所以

$$T_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right] = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.$$

86. (1) 由阶差法得 $a_n = 2n + 1$;

(2) 由 (1) 知 $b_n = \frac{2n+3}{2n+1} + \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n+3} + 2$, 所以 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n =$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + 2 \right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7} + 2 \right) + \cdots + \left(\frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n+3} + 2 \right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{2n+3} + 2n = \frac{4n}{6n+9} + 2n.$$

87. (1) 当 $n \geq 2$ 时, $(n-1)a_n = n(a_{n-1} + 2n-2)$ 两边同除以 $n(n-1)$, 得 $\frac{a_n}{n} = \frac{a_{n-1} + 2n-2}{n-1}$, 即

$\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1} = 2$, 所以数列 $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$ 是以 $\frac{a_1}{1} = 4$ 为首项, 2 为公差的等差数列;

(2) 由 (1) 得 $\frac{a_n}{n} = 2n + 2 \Rightarrow a_n = 2n(n+1)$, 所以 $b_n = \frac{2n+1}{a_n^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right]$, 于是

$$S_n = \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \right] = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \frac{n^2 + 2n}{4(n+1)^2}.$$

88. (1) 由 $a_2 a_7 = 3a_4^2 \Rightarrow a_1^2 q^7 = 3a_1^2 q^6 \Rightarrow q = 3$, $\therefore -3, S_4, 9a_3$ 成等差数列, $\therefore 2S_4 = 9a_3 - 3$, 从而有 $\frac{2a_1(1-3^4)}{1-3} = 9a_1 \cdot 3^2 - 3 \Rightarrow a_1 = 3$, $\therefore a_n = 3^n$;

(2) $b_n = (-1)^n a_n + \frac{1}{n(n+1)} = (-3)^n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 所以

$$T_n = [(-3)^1 + (-3)^2 + \cdots + (-3)^n] + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{-3[1 - (-3)^n]}{4} + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{3[(-3)^n - 1]}{4} + \frac{n}{n+1}.$$

89. 依题意数列 $\{a_n^2\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列, 所以 $a_n^2 = 2n - 1$, 于是 $a_n = \sqrt{2n - 1}$, 故

$$\frac{1}{a_n + a_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} = \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}), \text{ 所以数列 } \left\{ \frac{1}{a_n + a_{n+1}} \right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和}$$

$$S_n = \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - 1), \text{ 故 } S_{60} = \frac{1}{2}(\sqrt{121} - 1) = 5.$$

90. (1) 由 $S_9 = 54$ 可得 $9a_5 = 54 \Rightarrow a_5 = 6$, 所以 $d = \frac{6-2}{6-3} = 2$, 故 $a_n = 2n - 4$;

$$(2) \because \sqrt{\frac{1}{a_n+3}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} > \frac{2}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1},$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{a_1+3}} + \sqrt{\frac{1}{a_2+3}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{a_{100}+3}} > (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{201}-\sqrt{199}) = \sqrt{201} - 1 > 14 - 1 = 13.$$

91. (1) 阶差法: 当 $n \geq 2$ 时,
$$\begin{cases} S_n = 2a_n - a_1 \\ S_{n-1} = 2a_{n-1} - a_1 \end{cases}, \text{ 两式做差得 } a_n = 2a_{n-1}, \text{ 因为 } b_n = S_n + \frac{1}{a_n} + 4, \text{ 所}$$

以 $6 = a_1 + \frac{1}{a_1} + 4$, 解得 $a_1 = 1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2, 首项为 1 的等比数列, 于是 $a_n = 2^{n-1}$.

(2)

证 由 (1) 知 $S_n = 2a_n - a_1 = 2^n - 1$, 于是 $b_n = 2^n + \frac{1}{2^{n-1}} + 3$,

即 $\frac{1}{b_n} = \frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n-1}+1)} = \frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n+1}$, 所以

$$T_n = \left(\frac{1}{2^0+1} - \frac{1}{2^1+1} \right) + \left(\frac{1}{2^1+1} - \frac{1}{2^2+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2}.$$

92. (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 依题意得 $S_1 - S_3 = 2S_2$, 所以 $-(a_2 + a_3) = 2(a_1 + a_2)$, 得 $-a_1(q + q^2) = 2a_1(1 + q)$, 且 $a_1 \neq 0$, 所以 $q^2 + 3q + 2 = 0$, 解得 $q = -1$ 或 $q = -2$, 因为 $S_n \neq 0$, 所以 $q = -2$, 又因为 $a_1 a_2 = a_3$, 则 $a_1 = q$, 于是 $a_n = (-2)^n$;

(2) 由 (1) 得 $b_n = \frac{-3(-2)^n}{[(-2)^n+1][(-2)^{n+1}+1]} = \frac{(-2)^{n+1} - (-2)^n}{[(-2)^n+1][(-2)^{n+1}+1]} = \frac{1}{(-2)^n+1} - \frac{1}{(-2)^{n+1}+1}$, 于是

$$T_n = \left[\frac{1}{(-2)^1+1} - \frac{1}{(-2)^2+1} \right] + \left[\frac{1}{(-2)^2+1} - \frac{1}{(-2)^3+1} \right] + \cdots + \left[\frac{1}{(-2)^n+1} - \frac{1}{(-2)^{n+1}+1} \right]$$

$$= -1 - \frac{1}{(-2)^{n+1}+1} = -\frac{(-2)^{n+1}+2}{(-2)^{n+1}+1}$$

93. (1) 依题意 $a_{n+1} - 2a_n + 2 = 0 \Rightarrow a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2)$, 所以数列 $\{a_n - 2\}$ 是以 6 为首项, 2 为公比的等比数列;

(2) 由 (1) 知 $a_n - 2 = 6 \cdot 2^{n-1}$, 即 $a_n = 3 \cdot 2^n + 2$, 所以

$$b_n = \frac{(-1)^n a_n}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)} = (-1)^n \left(\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^{n+1} + 1} \right)$$

① 当 n 为偶数时,

$$\begin{aligned} T_n &= \left(-\frac{1}{2+1} - \frac{1}{2^2+1} \right) + \left(\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} \right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n+1} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^{n+1}+1} \right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2^{n+1}+1} \end{aligned}$$

此时 T_n 递减, 于是当 $n=2$ 时 T_n 取得最大值 $-\frac{2}{9}$, 则 $m \geqslant -\frac{2}{9}$;

② 当 n 为奇数时,

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + b_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2^n+1} - \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^{n+1}+1} \right) \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}+1}. \end{aligned}$$

此时 T_n 递增, 于是 $T_n < -\frac{1}{3}$, 则 $m \geqslant -\frac{1}{3}$,

综上所述, m 的取值范围为 $\left[-\frac{2}{9}, +\infty \right)$.

94. (1) 依题意 $S_n = a_{n+1} \Rightarrow S_n = S_{n+1} - S_n \Rightarrow S_{n+1} = 2S_n$, 又 $S_1 = a_1 = 2$,

所以 $\{S_n\}$ 是以 2 为公比, 2 为首项的等比数列, 所以 $S_n = 2^n$,

当 $n \geqslant 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n-1}$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$ 不满足上式.

$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} 2, & n=1 \\ 2^{n-1}, & n \geqslant 2 \end{cases}$$

(2)

证 由 (1) 知

$$b_n = \frac{S_n}{(1+S_n)(1+S_{n+1})} = \frac{2^n}{(1+2^n)(1+2^{n+1})} = \frac{1}{1+2^n} - \frac{1}{1+2^{n+1}}$$

所以

$$T_n = \left(\frac{1}{1+2^1} - \frac{1}{1+2^2} \right) + \left(\frac{1}{1+2^2} - \frac{1}{1+2^3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{1+2^n} - \frac{1}{1+2^{n+1}} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{1+2^{n+1}}$$

$$\because \frac{1}{1+2^{n+1}} > 0, \therefore \frac{1}{3} - \frac{1}{1+2^{n+1}} < \frac{1}{3}, \therefore T_n < \frac{1}{3}.$$

95. (1) 阶差法: 当 $n \geq 2$ 时, $\begin{cases} 2S_n = (n+1)a_n \\ 2S_{n-1} = na_{n-1} \end{cases}$, 两式做差并整理得 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1}$, 由第 12 页累乘法

可知 $a_n = 2n$, 所以 $S_n = n(n+1)$;

(2) 由 (1) 知 $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_{n+1}S_n} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, 所以

$$\begin{aligned} T_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

100. 如图 11.1, 由杠杆原理可知 $2BM = 3ME$, $\therefore \overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$,

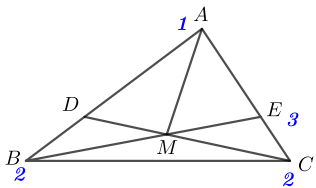


图 11.1

$\therefore xy = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$, 选 B.

101. 依题意 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, $\therefore m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{2}{3}$, 于是 $m+n = \frac{7}{6}$. 故选 B.

102. 依题意若 $\overrightarrow{CE} = 4\overrightarrow{ED}$, 则 $\overrightarrow{CE} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CD}$, $\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} + \frac{4}{5}\overrightarrow{CD} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. 故选 A.

103. 设 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{BF}$, 因为 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$,

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$, 所以 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC} = \lambda(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \mu\left(\overrightarrow{AD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}\right)$, 所以

$$\begin{cases} \lambda + \mu = \frac{1}{2} \\ \lambda - \frac{3}{2}\mu = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = \frac{9}{10} \\ \mu = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ 故选 A.}$$

104. 由式 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \mathbf{0}$ 可知点 M 为 $\triangle ABC$ 的重心, 故答案为 3.

当且仅当 $\frac{3x}{y} = \frac{y}{x}$ 时等号成立.

解法一 在 $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ 中, 两边分别平方即可. 选 A.

107. 根据题意, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2\lambda}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2\mu}\overrightarrow{AF}$. 又 D, E, F 三点共线, 可知

$$\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\mu} = 1 \Rightarrow 2 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\lambda\mu}} \Rightarrow \lambda\mu \geq 1.$$

110. 特殊值法: 取这条直线为 BC , 则 $m = n = 1$. 答案为 2.

$$\begin{cases} m = \frac{1}{3x} \\ n = \frac{1}{3y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = 1 \\ 3x + y = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \end{cases} \quad \text{由权方和不等式可得 } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \geq \left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

113. 取 AC 中点 D , 式子 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} + 2y\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, 所以 B, O, D 三点共线, 且

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = m \cdot \sqrt{12 - m^2} = \sqrt{m^2(12 - m^2)} \leq \sqrt{\left(\frac{m^2 + 12 - m^2}{2}\right)^2} = 6.$$

115. 如图 11.2, 依题意, 设 $\overrightarrow{AP} = (\lambda + \mu)\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AD}$, 易知 B, E, D 三点共线, 故当直线 $l \parallel BD$



且与 $\odot C$ 相切时 (切点为 P) $\lambda + \mu$ 有最大值, 此时 $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AE}|} = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AN}|} = \frac{3r}{r} = 3$.

116. 如图 11.3, $(\lambda + \mu)_{\max} = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AG}|} = \frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AD}|} = 2$.

120. $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$, 故选 D.

121. 如图 11.5, 由重心质量法易知 $CM = 3ME$, 所以

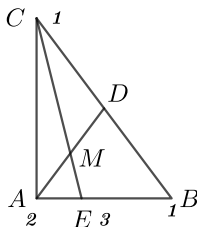


图 11.5

$\overrightarrow{CM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CE} \xrightarrow{\text{对面的女孩看过来}} \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. 故选 D.

122. 由极化恒等式可知 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PC}|^2 - 1^2$, 而 $|\overrightarrow{PC}|$ 的最小值即为圆心到直线的距离

$d = \frac{|1 - 0 + 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 故选 A.

123. 如图 11.6, 取 DE 中点 M , 连接 AM , 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = |\overrightarrow{AM}|^2 - |\overrightarrow{MD}|^2 = |\overrightarrow{AM}|^2 - \frac{1}{9}$, 而 $|\overrightarrow{AM}|_{\min}^2 = 1$,

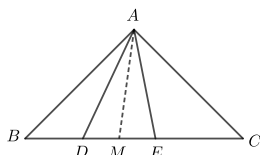


图 11.6

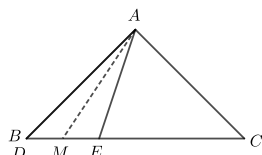


图 11.7

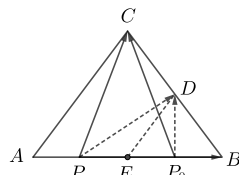


图 11.8

所以 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} \geq \frac{8}{9}$, 排除 B, D, 而当 B, D 两点重合 (或 C, E 两点) 时 $|\overrightarrow{AM}|$ 最大, 如图 11.7, 在

$\triangle ABM$ 中运用余弦定理可知 $|\overrightarrow{AM}|_{\max}^2 = \frac{13}{9}$, 所以 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} \leq \frac{13}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{3}$, 故选 A.

124. 如图 11.8 所示, 取 AB , BC 的中点 E , D , 由极化恒等式, 有

$$\begin{cases} \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = |PD|^2 - |BD|^2 \\ \overrightarrow{P_0B} \cdot \overrightarrow{P_0C} = |P_0D|^2 - |BD|^2 \end{cases} \Rightarrow |PD|^2 \geq |P_0D|^2$$

因此, $DP_0 \perp EB \Rightarrow DE = DB \Rightarrow CA = CB$. 故选 D.

125. 如图 11.9 所示, 过 MB 中点 N 作 $NG \perp CB$, 由极化恒等式, 有

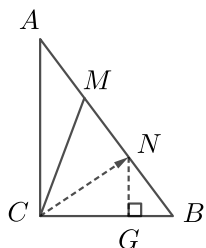


图 11.9

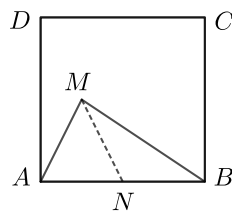


图 11.10

$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = |CN|^2 - |BN|^2 = |CG|^2 + |GN|^2 - (|GN|^2 + |GB|^2) = |CG|^2 - |BG|^2 = 4 - 1 = 3$, 故选 B.

126. 如图 11.10 所示, 取 AB 中点 N , 由极化恒等式, 有 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = |MN|^2 - |AN|^2 = |MN|^2 - 1$. 易知 $|MN|^2$ 的最大值为 $|MN|^2 = |DA|^2 + |AN|^2 = 5$, 最小值为 0, 故选 D.

127. 如图 11.11 所示, 取 AB 中点 D , CD 中点 E , 连接 PD , PE ,

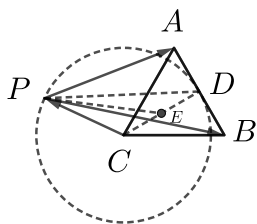


图 11.11

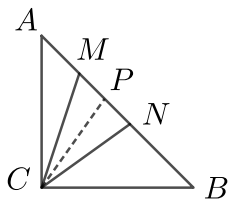


图 11.12

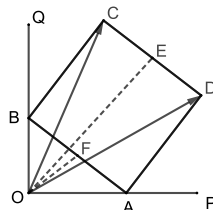


图 11.13

$\overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) = 2\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = 2(|PE|^2 - |ED|^2) = 2\left(|PE|^2 - \frac{3}{4}\right)$, 再利用圆上动点最值理论知答案为 A.

128. 如图 11.12 所示, 取 MN 的中点 P . 由极化恒等式 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN} = |CP|^2 - |MP|^2 = |CP|^2 - \frac{1}{2}$, 所以当 P 为 AB 的中点时, $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN}$ 的取值最小 4; 当 M 为 A 时, $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN}$ 的取值最大 6, 故选 B.

129. 如图 11.13 所示, 取 CD 中点 E , 则 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = OE^2 - ED^2 = OE^2 - 1$, 取 AB 中点 F , 连接 FE , FO , 我们易知 $FO + FE = 1 + 2 = 3$, 并且当 O, F, E 三点共线时 OE 有最大值 3, 所以 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = OE^2 - ED^2 = OE^2 - 1 \leq 9 - 1 = 8$. 故选 D.

130. 仿照第 54 页例题 2.18 的做法. 选 D.

131. 仿照第 54 页例题 2.18 的做法. 选 C.

132. 如图 11.14 所示, 取 BC 中点 D , AD 中点 E , 则

$\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD} = 2(|PE|^2 - |ED|^2) = 2\left(|PE|^2 - \frac{3}{4}\right)$, 又 $|PE|^2$ 的最小值为 0, 故选 B.

133. 依题易知正三角形 ABC 的边长为 $2\sqrt{3}$, 由极化恒等式, 有 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |PD|^2 - |AD|^2 = |PD|^2 - 3$. 因此, P 在 C 点时 $|PD|$ 最大, P 在 CO 的延长线与圆的交点处 $|PD|$ 最小, 故选 B.

134. 取 AB 中点 M , 连接 EM , 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = |\overrightarrow{EM}|^2 - |\overrightarrow{AM}|^2 = |\overrightarrow{EM}|^2 - \frac{1}{4} \geq |\overrightarrow{E'M}|^2 - \frac{1}{4} = \frac{21}{16}$, 故选 A.

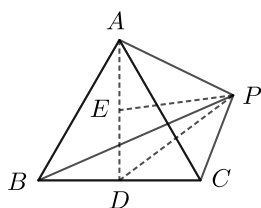


图 11.14

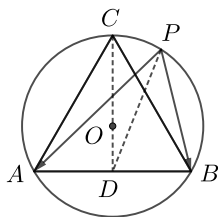


图 11.15

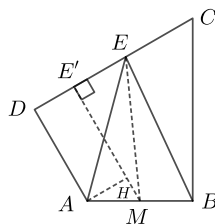


图 11.16

135.

解法一

根据极化恒等式以及向量夹角公式可知
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \end{cases}$$

以上两式可知 $bc = \frac{27}{2}$. 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin 60^\circ = \frac{27\sqrt{3}}{8}$.

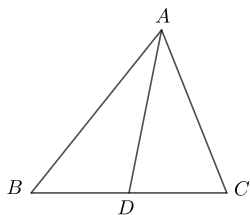


图 11.17

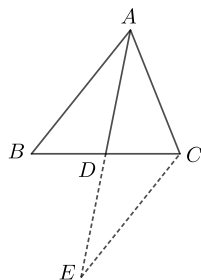


图 11.18

解法二 如图 11.18, 采用倍长中线法, 则 $\angle ACE = 120^\circ$, 分别对 $\triangle ACE$, $\triangle ABC$ 利用余弦定理可得

$$\begin{cases} 36 = b^2 + c^2 + bc \\ 9 = b^2 + c^2 - bc \end{cases} \quad \text{以上两式可知 } bc = \frac{27}{2}. \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin 60^\circ = \frac{27\sqrt{3}}{8}.$$

解法三 利用 $\angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$, 分别对 $\triangle ADB$, $\triangle ADC$ 利用余弦定理可得答案.

136. 依题意, $|2\vec{AP} - \lambda\vec{AB}| \geq 8$, 得 $|\vec{AP} - \frac{\lambda}{2}\vec{AB}| \geq 4$, 即点 P 到 AB 所在的直线的距离大于等于 4, 取

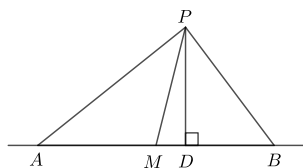


图 11.19

AB 的中点 M , 由极化恒等式可知 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = |\vec{PM}|^2 - \frac{|\vec{AB}|^2}{4} = |\vec{PM}|^2 - 25 \geq 16 - 25 = -9$, 选 C.

137. 依题意及矩形大法得 $|\vec{OP}|^2 + |\vec{OC}|^2 = |\vec{OA}|^2 + |\vec{OB}|^2 = 8 \Rightarrow |\vec{OC}| = \sqrt{7}$,

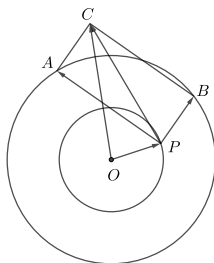


图 11.20

$\therefore \vec{OC} \cdot \vec{OP} = 1 \times \sqrt{7} \times \cos \langle \vec{OC}, \vec{OP} \rangle \in [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$.

138. 设 $\mathbf{a} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 为符合题意的两个向量, 则 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\sqrt{3}, 0)$, 即 $C(\sqrt{3}, 0)$, 而 $|\mathbf{m} - \mathbf{a} - \mathbf{b}| = 1$, 则 $\mathbf{m}$ 的终点在以 C 为圆心, 1 为半径的圆上, 从而当 $\mathbf{m}$ 的终点在点 $D(\sqrt{3} + 1, 0)$ 处时, $|\mathbf{m}|$ 最大, 且 $|\mathbf{m}|_{\max} = \sqrt{3} + 1$. 故选 B.

139. 依题意可知,
$$\begin{cases} \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{AP} + \vec{PB} \Rightarrow \vec{PC} = 2\vec{AP} \\ \vec{RA} + \vec{RB} + \vec{RC} = \vec{CA} \Rightarrow \vec{QA} = 2\vec{BQ} \\ \vec{RA} + \vec{RB} + \vec{RC} = \vec{CA} \Rightarrow \vec{RB} = 2\vec{CR} \end{cases},$$

即点 P, Q, R 为各边的三等分点, 再特殊化令 $\triangle ABC$ 为边长为 3 的等边三角形可知 $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3}$.
故选 B.

140. 如图 11.21, 设 $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$, 依题意, C 在以 O 为圆心, 半径为 1 的圆上, 又

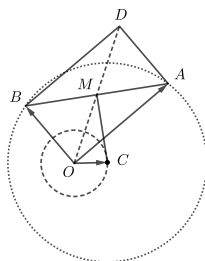


图 11.21

$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{BA} \cdot (\vec{CA} + \vec{CB}) = 0$, 取 AB 中点 M , 则 $AB \perp CM$, 又因为 $|\vec{a} - \vec{c}| = 3$,
 $\therefore |\vec{CA}| = |\vec{CB}| = 3$, 即 A, B 在以 C 为圆心, 半径为 3 的圆上,

构造矩形 $OADB$, 由平面向量矩形性质可知 $|\vec{CD}|^2 = |\vec{CA}|^2 + |\vec{CB}|^2 - |\vec{CO}|^2 = 9 + 9 - 1 = 17$, 再由平面几何矩形对角线等长以及圆的“一箭穿心”原理可知 $|\vec{AB}|_{\max} = |\vec{OD}|_{\max} = |\vec{CD}| + 1 = \sqrt{17} + 1$.

141. 依题意, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $|x\vec{AC} + \vec{AB}| \geq |\vec{AD} - \vec{AB}|$ 恒成立, 我们可得 $BD \perp AC$, 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 设 $AD = 2t$, 则 $AB = 4t$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得 $BC = \sqrt{13}$, 再由余弦定理可得 $\cos \angle ABC = \frac{5\sqrt{13}}{26}$, 故答案为 $\frac{5\sqrt{13}}{26}$.

142. 根据题意 $\vec{AP} = \lambda\vec{AB} + \vec{AC} \Rightarrow \vec{AP} \cdot \vec{BC} = (\lambda\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{BC} = 0$. 又因为 $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$, 所以 $(\lambda\vec{AB} + \vec{AC})(\vec{AC} - \vec{AB}) = 0$, 整理得

$$(\lambda - 1)\vec{AB} \cdot \vec{AC} - \lambda|\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 = 0 \Rightarrow 7 = 12\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{7}{12}$$

143. 延长 F_2Q 交 PF_1 于点 A , 如图 11.22 所示, 由 ① 知 $QF_2 \perp \angle F_2PF_1$ 的平分线, 由 ② 知 QP

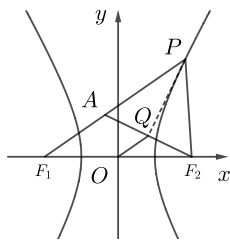


图 11.22

和 $\angle F_2PF_1$ 的平分线共线, 由此我们可以得到 $\triangle APF_2$ 是以 P 为顶点的等腰三角形, 由双曲线的定义得 $|PF_1| - |PF_2| = 2$, 所以 $|PF_1| - |AP| = |AF_1| = 2$, 连接 OQ , 由中位线可知 $|OQ| = 1$, 所以点 Q 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 1 (y \neq 0)$.

144. 根据题意, 以 OA 为 x 轴, 以 OB 为 y 轴建立直角坐标系, 则 $\overrightarrow{OA} = (1, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (0, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{OC} = (m, \sqrt{3}n)$, 因此 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}n}{m} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{m}{n} = 3$.

145. 根据题意 $\overrightarrow{EA} \cdot (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}) = 2\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED} = -2|\overrightarrow{EA}||\overrightarrow{ED}| = -2|\overrightarrow{EA}|(2 - |\overrightarrow{EA}|) \geq -2$.

146. 根据题意, 建立如图 11.23 所示的坐标系, 设 $N(x, y)$, 则

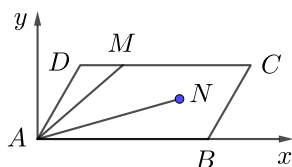


图 11.23

$M(2, \sqrt{3})$, $C(5, \sqrt{3}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 2x + \sqrt{3}y$, 按照线性规划, 当直线 $z = 2x + \sqrt{3}y$ 过点 $C(5, \sqrt{3})$ 时有最大值 13.

147.

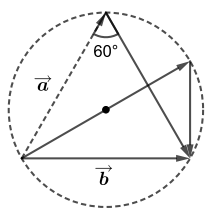


图 11.24

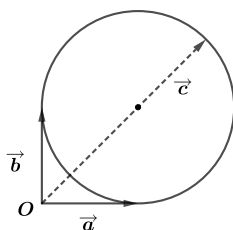


图 11.25

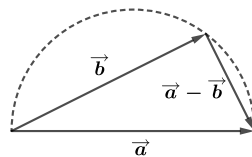


图 11.26

如图 11.24 所示, 以向量 b 的模长为弦做圆, 使得张角为 60° , 根据图形我们知, 当 a 为直径时, $|a|$ 最大. 所以 $|a|$ 的取值范围是 $\left[0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

148. 如图 11.25 所示, 令 $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$, 易知 $|c - a - b| = 1 \Rightarrow |c - (a + b)| = 1$, 即 c 是以 $(1, 1)$ 为圆心, 以 1 为半径的圆. 答案为 $\sqrt{2} + 1$.

149. 如图 11.26 所示. 答案为 $[0, 1]$.

150. 以 $|a|$ 为弦画张角为 $\frac{\pi}{6}$ 的圆. 答案为 4.

152. 建立如图 11.27 所示坐标系, 设 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, 由式 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ 可知点 C 在以 AB 中点 $D\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 为圆心, 半径为 $r = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的圆上, 由平面几何圆的“一箭穿心”原理可知 $|\vec{c}| \in [|OD| - r, |OD| + r] = \left[\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}\right]$.

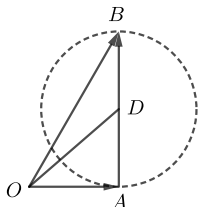


图 11.27

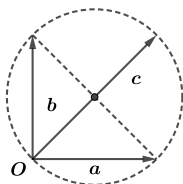


图 11.28

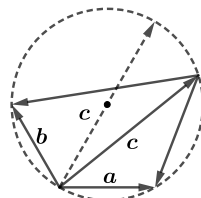


图 11.29

153. 设 $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1)$, 如图 11.28, 则 $\mathbf{c} = (1, 0)$ 在以 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 为圆心, 半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆上运动, 故 $|\mathbf{c}|$ 的最大值为 $\sqrt{2}$.

154. 易知 $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1)$, $\mathbf{c} = (\cos \theta, \sin \theta)$, 于是 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 1 - (\cos \theta + \sin \theta) \geq 1 - \sqrt{2}$.

155. 如图 11.29 所示, 易知 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 120^\circ$, 画出一个圆. 故 $|\mathbf{c}|$ 的最大值为圆的直径, 选 A.

156. 依题意 $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{b} \cdot \mathbf{e} + 3 = 0 \Rightarrow (\mathbf{b} - \mathbf{e})(\mathbf{b} - 3\mathbf{e}) = 0$, 所以向量 $\mathbf{b}$ 是以向量 $\mathbf{e}$, $3\mathbf{e}$ 的终点连线为直径的一个圆, 如图 11.30 所示. 此时 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 的最小值是 $\sqrt{3} - 1$. 选 A.

157. 依题意 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$ 可知向量 $\mathbf{c}$ 在以向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 终点为直径的圆上. 如图 11.31 所示. 答案为 $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$.

158. 依题意 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$, 可知 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$, 令 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, 则

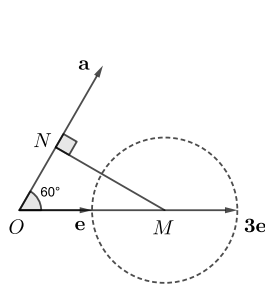


图 11.30

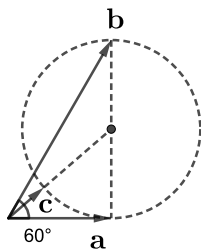


图 11.31

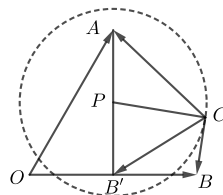


图 11.32

$\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 2$, 所以

$$(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - 2\vec{c}) \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{c}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) = \frac{1}{2} \quad (11.15)$$

如图 11.32, 取 AB 中点 B' , 则式 (11.15) 为 $\vec{CA} \cdot \vec{CB'} = \frac{1}{2}$, 取 AB' 中点 P , 由极化恒等式

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB'} = |CP|^2 - |AP|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |CP| = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (11.16)$$

式 (11.16) 说明点 C 在以 P 为圆心, $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 为半径的圆上, 由图可知, 当 C 位于直线 PB 与 $\odot P$ 的交点时, $|\vec{b} - \vec{c}| = |\vec{CB}|$ 取最小值, $\therefore |\vec{CB}|_{\min} = |BP| - r = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$.

161. 如图 11.33 所示, 取 BC 中点 D , 连接 PB , PC , 根据题意

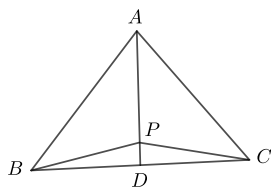


图 11.33

$$\vec{AP} = k(\vec{AB} + \vec{AC}) = 2k\vec{AD} \Rightarrow \frac{AD}{AP} = \frac{1}{2k} \quad (11.17)$$

所以 A, P, D 三点共线. 因为 P 是 $\triangle ABC$ 的外心, 故 $\angle BPC = 2\angle DPC = 2\angle BAC$. 可知

$$\frac{2}{5} = \cos \angle BAC = \cos \angle DPC = \frac{PD}{PC} = \frac{PD}{PA} \Rightarrow \frac{AD}{AP} = \frac{7}{5} \quad (11.18)$$

由式 (11.17), (11.18) 知 $k = \frac{5}{14}$.

162. 对式 $\vec{OA} + \vec{OB} = -\sqrt{2}\vec{OC}$ 两边平方, 可知 $\vec{OA}$ 和 $\vec{OB}$ 垂直, 圆周角等于圆心角的一半, 所以选 B.

163. 根据题意 $3\vec{OA} + 4\vec{OB} = -5\vec{OC} \Rightarrow 9 + 16 + 24\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 25 \Rightarrow \vec{OA} \perp \vec{OB} \Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}$. 由奔驰

定理, $\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{5}{3+4+5}$. 于是 $\frac{5}{12} = \frac{\frac{1}{2}}{S_{\triangle ABC}} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{6}{5}$, 选 C.

164. 取 BC 中点 D , 因为 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, 外心重心重合, 故 $\angle BAC = 60^\circ$. 选 C.

165. 依题意设圆心为 O , 则

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 \quad (11.19)$$

又由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}$ 可得

$$\frac{3}{2} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos B \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| \cos B = \frac{3}{4} \quad (11.20)$$

在 $\triangle ABC$ 中由余弦定理可得

$$|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 4 - 4|\overrightarrow{AB}| \cos B \quad (11.21)$$

把式 (11.19), (11.20) 代入式 (11.21), 可得 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 - 3 = 1$. 故选 A.

166. 给式子 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ 两边同时点乘 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 得

$$\begin{cases} \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = x|\overrightarrow{AB}|^2 + y\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \Rightarrow 2 = 4x + 3y \end{cases} \quad (11.22)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 = x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y|\overrightarrow{AC}|^2 \Rightarrow \frac{9}{2} = 3x + 9y \end{cases} \quad (11.23)$$

解得 $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{4}{9}$, $\therefore 2x + 3y = \frac{5}{3}$. 选 B.

167. 依题意 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2} = 10$, 选 C.

168. 依题意, 给式子 $\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ 两边分别点乘向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 得

$$\begin{cases} \frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{2} = m|\overrightarrow{AB}|^2 + n\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = m|\overrightarrow{AB}|^2 + n|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ \\ \frac{|\overrightarrow{AC}|^2}{2} = m\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + n|\overrightarrow{AC}|^2 = m|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ + n|\overrightarrow{AC}|^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{21}{45} \\ n = \frac{5}{45} \end{cases}$$

$$\therefore m + n = \frac{26}{45}.$$

169. 由式 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ 可知点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 给式子 $\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ 两边分别点乘

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \text{得} \begin{cases} \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = 100m + 30n \\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2 = 30m + 36n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{7}{15} \\ n = \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow m + 3n = \frac{4}{5}.$$

172. 依题意 $d = 2$, $d' = 1$, 若圆 C 上至多有一个点到直线 $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$ 的距离为 1, 则 $d \geq r + d' \Rightarrow 0 < r \leq 1$, 若圆 C 上有两个点到直线 $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$ 的距离为 1, 则 $1 < r < 3$, 所以 $q: 0 < r < 3$, 故选 C.

175. 易知 $a = 1$, 且 $M(1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MF_2} = \sqrt{2} - 1$. 选 C.

$$176. e = \left| \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ - \sin 60^\circ} \right| = \sqrt{3} + 1.$$

$$178. S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{b^2}{\tan \frac{\theta}{2}} = 2, \text{ 所以点 } M \text{ 到点 } x \text{ 轴的距离为 } d = \frac{2S_{\triangle MF_1F_2}}{2c} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

180. 如图 11.34 所示, 以 F_1, F_2 为直径做圆, 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 点 P 一定在圆内, 此时, 有

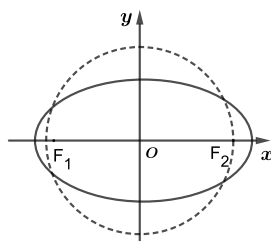


图 11.34

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \\ x_0^2 + y_0^2 < 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0^2 < \frac{8}{3}.$$

181. 特殊化, 令 $\angle PFA = 2\angle PAF = 90^\circ$, 此时

$$\frac{b^2}{a} = a + c \Rightarrow c^2 - 2a^2 - ac = 0 \Rightarrow e^2 - e - 2 = 0 \Rightarrow e = 2.$$

182. 由本书第 71 页定义 3.1 可得点 $P\left(\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$, 所以 $|OP| = c = \frac{1}{2}|F_1F_2|$, 于是 $\triangle PF_1F_2$ 是顶角 $\angle F_1PF_2$ 为直角, 底角分别为 30° 和 60° 的直角三角形, 于是 $e = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ} = \sqrt{3} + 1$.

$$184. \tan \alpha \cdot \tan \beta = e^2 - 1 = -\frac{3}{4}, \therefore \text{所求} = \frac{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{1}{7}.$$

186. 由式 (3.4.3) 得

$$|PF_1| + |PF_2| = 4, \quad |PF_1| \cdot |PF_2| = 4 \Rightarrow |PF_1| = |PF_2| = 2$$

所以点 P 为短轴顶点, 故选 D.

187. 由定理的证明方法可知 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} = 4$. 换元,
$$\begin{cases} m = \frac{1}{e_1^2} \\ n = \frac{3}{e_2^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1^2 = \frac{1}{m} \\ e_2^2 = \frac{3}{n} \\ m + n = 4 \end{cases}$$

由权方和不等式知

$$e_1^2 + 2e_2^2 = \frac{1}{m} + \frac{6}{n} \geq \frac{(1 + \sqrt{6})^2}{4} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{7}$$

188. 由两曲线的中心对称性以及定理 3.5 可知 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} = 4$. 再由基本不等式可得

$$4 = \frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} \geq \frac{6}{e_1^2 e_2^2}$$

当且仅当 $\frac{1}{e_1^2} = \frac{3}{e_2^2} = 2$ 时等号成立. 此时 $e_2^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故选 C.

196. 根据向量的定义可知 A 在双曲线的左支, B 在双曲线的右支, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则

$$\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{BF} \Rightarrow c - x_1 = 3(c - x_2) \Rightarrow 2c = 3x_2 - x_1 \quad (11.24)$$

又根据双曲线图象易知

$$\left. \begin{array}{l} x_1 < -a \Rightarrow -x_1 > a \\ x_2 > a \Rightarrow 3x_2 > 3a \end{array} \right\} \Rightarrow 3x_2 - x_1 > 4a \quad (11.25)$$

由式 (11.24)(11.25) 可知 $2c > 4a \Rightarrow e > 2$.

197. 根据第 96 页定理 3.6 可知 $e \cos \theta = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3c \cos \theta$,

又因为 $|AB| = |BF_1|$ 且根据椭圆定义知 $|BF_1| + |BF_2| = 2a$, 所以 $|AF_2| = a$, 又由焦半径公式【第 93

页定义 3.8】知 $\frac{b^2}{a - c \cos \theta} = a \Rightarrow 2a^2 = 3b^2$, 依题意 $c = 1 \Rightarrow a^2 = 3$, 故选 B.

202. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 易知

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{p^2}{4} - p^2 = -\frac{3p^2}{4} = -12 \Rightarrow p = 4$$

203. 由 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta}$, 知焦点弦的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 于是 $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 \times \sin \frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}$. 故选 B.

204.

(1) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{6} + \frac{y_2^2}{2} = 1 \end{cases} \quad (11.26)$$

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{6} + \frac{y_2^2}{2} = 1 \end{cases} \quad (11.27)$$

(11.26)-(11.27) 得

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{6} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{2} \Rightarrow \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{6} = \frac{(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}{2} \Rightarrow \frac{2(x_1 - x_2)}{6} = \frac{(y_2 - y_1)}{2}$$

即 $k_{AB} = -\frac{2}{3}$, 所以直线 l 的方程为 $4x + 6y - 7 = 0$.

(2) 定值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

205. $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{9}{4}$, 离心率 $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, 故选 A C.

206. 依题意易知

(1) $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 由椭圆中点弦定理 (点差法) 可知 $k_{AB} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{t} = -\frac{3}{4t}$, 因此 $k_l = \frac{4t}{3}$.

又因为直线 l 过 $P(1, t)$ 点, 由点斜式方程可得: $y = \frac{4t}{3}(x - 1) + t$, 整理得 $y = \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)t$, 故直线 l 恒过点 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

207. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 关于直线 l 对称, $N(x_0, y_0)$ 为 AB 的中点, 由本书第 112 页定理 3.8 以及直线 l 方程

$$\begin{cases} \frac{x_0}{y_0} = \frac{1}{3} \\ y_0 = 4x_0 + m \end{cases} \Rightarrow m = -x_0 \quad (11.28)$$

再由 N 在椭圆内, 可得 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} < 1 \Rightarrow m \in \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$.

208. 设 AB 中点为 N , 则 $\overrightarrow{ON}$ 与 $\mathbf{a} = (3, -1)$ 共线, 即 $k_{ON} = -\frac{1}{3}$. 由

$$k_{AB} \cdot k_{ON} = -\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow a^2 = 3b^2 \Rightarrow e = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

209. 根据题意可知 $k_{AB} \cdot k_{OM} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow k_{OM} = \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

210.

(1) 由正弦定理知 $|CB| + |CA| = 2|AB| = 4 > |AB| = 2$, 由椭圆定义可知顶点 C 的轨迹为中心在原点, 以 A 、 B 为焦点的椭圆 (不包括与 x 轴交点).

$$\therefore 2a = 4, 2c = 2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 3, \therefore \text{轨迹方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2).$$

(2) 可知 $k = \frac{\sqrt{3}x_0}{2}$, 所以线段 MN 的垂直平分线方程为

$$y = -\frac{2}{\sqrt{3}x_0}(x - x_0) - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{\sqrt{3}x_0}x + \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (11.29)$$

所以过定点 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

211. 依题意

(1) 设 $a = 2t (t > 0)$, $c = \sqrt{3}t$, 则 $b^2 = t^2$, 此时椭圆方程为 $\frac{x^2}{4t^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1$, 代入点 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 得

$$t^2 = 1, \text{ 故椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1;$$

(2) 设 $l: y = kx + 2$, 平行四边形 $OAMB$ 的对角线交点 $C(x_0, y_0)$, 则 $M(2x_0, 2y_0)$, 由点差法以及 M 点在椭圆上可知

$$\begin{cases} k = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x_0}{y_0} \end{cases} \quad (11.30)$$

$$\begin{cases} y_0 = kx_0 + 2 \end{cases} \quad (11.31)$$

$$\begin{cases} \frac{(2x_0)^2}{4} + (2y_0)^2 = 1 \end{cases} \quad (11.32)$$

解得 $k = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$, 所以直线 l 的方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}x + 2$.

212. 由抛物线定义可知 B 点横坐标为 1, 所以 $B(1, 4)$, 又 $F(4, 0)$, 所以平行四边形的对角线交点为 $M\left(\frac{5}{2}, 2\right)$, 又对角线 AC 过 M , 排除 $A C$ 选项, 又由中点弦公式可知 $k_{AC} = 4$, 选 B .

215. (I) $\frac{1}{2}$; (II) 利用本书第 140 页定理 3.13 可知答案为 $\sqrt{3}$.

218.

(1) 证 依题意 $b = c = 1$, 所以 $a = \sqrt{2}$, 于是 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$,

由点 A 在椭圆 C 上, 点 B 在直线 $y = \sqrt{2}$ 上, 且 $OA \perp OB$ 知 OA 的斜率肯定存在.

① 当 OA 的斜率为 0 时, $|OA| = \sqrt{2}$, $|OB| = \sqrt{2}$, 于是 $|AB| = 2$, O 到 AB 的距离为 1, 所以直线 AB 与圆: $x^2 + y^2 = 1$ 相切;

② 当 OA 的斜率不为 0 时, 设 OA 的方程为 $y = kx$, 与椭圆联立

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = kx \end{cases} \quad \text{得 } (1 + 2k^2)x^2 = 2, \text{ 所以 } \begin{cases} x_A^2 = \frac{2}{1 + 2k^2} \\ y_A^2 = \frac{2k^2}{1 + 2k^2} \end{cases} \quad \text{从而 } |OA|^2 = \frac{2 + 2k^2}{1 + 2k^2},$$

由 $OA \perp OB$ 知 OB 的方程为 $y = -kx$, 而点 B 在直线 $y = \sqrt{2}$ 上, 所以 $x = -\sqrt{2}k$,

从而 $|OB|^2 = 2 + 2k^2$, 于是 $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} = 1$, 由等面积法可知 O 到 AB 的距离为 1, 所以直线 AB 与圆: $x^2 + y^2 = 1$ 相切.

综上所述, 直线 AB 与圆: $x^2 + y^2 = 1$ 相切.

(2) 由 (1) 知 $\triangle AOB$ 的面积为

$$S = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OB| = \frac{2 + 2k^2}{2\sqrt{1 + 2k^2}} = \frac{1 + (1 + 2k^2)}{2\sqrt{1 + 2k^2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2k^2}} + \sqrt{1 + 2k^2} \right) \geq 1$$

当且仅当 $k = 0$ 时等号成立.

此时 $A(\pm\sqrt{2}, 0)$, $B(0, \sqrt{2})$, 不妨设 $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(0, \sqrt{2})$, 则直线 $AB: y = x + \sqrt{2}$, 代入椭圆

$$C \text{ 方程解得 } y_D = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 即 } \begin{cases} x_D^2 = \frac{2}{9} \\ y_D^2 = \frac{8}{9} \end{cases} \quad \text{从而 } |OD| = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

219.

(1) 设 $a = 2t$, $c = t$, $\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 3t^2$, 此时椭圆方程为 $\frac{x^2}{4t^2} + \frac{y^2}{3t^2} = 1$, 代入点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 解得

$$t^2 = 1, \text{ 所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

- (2) ① 当直线 MN 的斜率不存在时, 由对称性, 设 $M(x_0, x_0)$, $N(x_0, -x_0)$, 因为 M, N 在椭圆上, 所以 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0^2}{3} = 1 \Rightarrow x_0^2 = \frac{12}{7}$.

$$\therefore O \text{ 到直线 } MN \text{ 的距离 } d = |x_0| = \frac{2\sqrt{21}}{7}, \quad x^2 + y^2 = \frac{12}{7}.$$

- ② 当直线 MN 的斜率存在时, 设 $MN: y = kx + m$, 联立

$$\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \quad \text{得 } (3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0,$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3 + 4k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2},$$

$$\because OM \perp ON, \therefore x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

$$\therefore x_1 x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = (k^2 + 1)x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = 0,$$

$$\therefore (k^2 + 1) \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} - \frac{8k^2 m^2}{3 + 4k^2} + m^2 = 0, \text{ 即 } 7m^2 = 12(k^2 + 1),$$

$$\therefore O \text{ 到直线 } MN \text{ 的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{\frac{12}{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

故存在定圆 $x^2 + y^2 = \frac{12}{7}$ 与直线 MN 总相切.

220. 设 $|OP| = m$, $|OQ| = n$, 因为 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$,

所以 $\text{Rt}\triangle OPQ$ 斜边上的高

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \quad (11.33)$$

$$\text{由等面积法知 } |PQ| = \frac{mn}{h} = \frac{mn}{\sqrt{2}},$$

$$\text{易知 } \text{Rt}\triangle OPQ \text{ 的内切圆半径 } r = \frac{|OP| + |OQ| - |PQ|}{2} = \frac{m + n - \frac{mn}{\sqrt{2}}}{2},$$

由式 (11.34) 知

$$\frac{2}{m^2} + \frac{2}{n^2} = 1 \quad (11.34)$$

$$\text{引入参数方程, 令 } \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{m} = \cos \theta \\ \frac{\sqrt{2}}{n} = \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta} \\ n = \frac{\sqrt{2}}{\sin \theta} \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} 2r &= m+n-\frac{mn}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\cos \theta}+\frac{\sqrt{2}}{\sin \theta}-\frac{\sqrt{2}}{\sin \theta \cos \theta} \\ &=\frac{\sqrt{2}(\sin \theta+\cos \theta)-\sqrt{2}}{\sin \theta \cos \theta} \\ &\geqslant \frac{2 \sqrt{2} \sqrt{\sin \theta \cos \theta}-\sqrt{2}}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

当且仅当 $\sin \theta=\cos \theta$ 时等号成立, 即 $\sin \theta=\cos \theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

此时 $2r \geqslant 4-2 \sqrt{2}$, 所以 $r \geqslant 2-\sqrt{2}$. 选 B.

221. (1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; (2) 动直线 $3x+ty-3=0$, t 为 P 点纵坐标; 定点 $(1,0)$.

226.

注 过点 $A\left(0,-\frac{p}{2}\right)$ 作抛物线 $x^2=2py$ 的切线, 切点为 P , 则直线 AP 的斜率为 ± 1 .

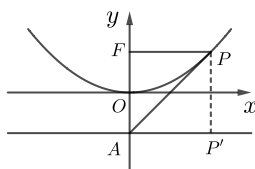


图 11.35

过点 P 作 $PP' \perp$ 抛物线的准线, 垂足为 P' , 于是 $\frac{PF}{PA} = \frac{PP'}{PA} = \sin \angle PAP'$, 要使 $\sin \angle PAP'$ 最小, 只需 $\tan \angle PAP'$ 最小, 即直线 AP 的斜率最小, 故 AP 为抛物线的切线, 所以 $k_{AP} = \pm 1$, 此时

$$\frac{|PF|}{|PA|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

228. 圆 $x^2+y^2-6y+5=0$ 的标准方程为 $x^2+(y-3)^2=4$, 又知直线 AB 恒过定点 $(0,3)$, 此即圆心, 故所得弦长为直径 4. 故选 C.

229. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $P(3-(x_1+x_2), 3-(y_1+y_2))$,

由阿基米德三角形性质可知 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1x_2}{2}\right)$, 因此

$$\begin{cases} 3 - (x_1 + x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ 3 - (y_1 + y_2) = \frac{x_1 x_2}{2} \\ y_1 + y_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow P(1, -1) \Rightarrow m = 1,$$

所以抛物线 $D: y^2 = x$, 故选 A.

230. 直线 AB 过抛物线 C 的焦点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

231. 由本书第 96 页定理 3.6 易知直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \sqrt{3}$, 由阿基米德三角形性质知 $MF \perp AB \Rightarrow M\left(-1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

232.

解法一 设 $P(x, y)$, 则

$$\frac{|PF|}{|PA|} = \sqrt{\frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 6x + 1}} = \sqrt{1 - \frac{4x}{x^2 + 6x + 1}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

解法二 设 P' 为点 P 在抛物线准线上的投影, 由抛物线的定义, 则 $\frac{|PF|}{|PA|} = \frac{|PP'|}{|PA|}$, 要使 $\frac{|PP'|}{|PA|}$ 最小, 则直线 AP 的斜率应最大. 即直线 AP 与抛物线相切, 根据阿基米德三角形推论 3.36 知 $PF \perp AF$, 此时 P 点坐标为 $P(1, 2)$,

$$\frac{|PF|}{|PA|} = \frac{2}{\sqrt{4+4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

237. 由 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ 知此题为特殊化的阿基米德三角形. 所以 $k \cdot k_{MF} = -1 \Rightarrow k = 2$.

238. 由推论 3.36 知 MN 连线过抛物线焦点 $(1, 0)$ 并垂直于 x 轴. 计算可得 M 点坐标为 $(1, 2)$, 又因为四边形 $PMAN$ 为平行四边形, 所以椭圆中 $a = 3$, 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 代入 M 点坐标, 可知答案为 B.

240. 易知抛物线方程为 $x^2 = 2y$. 由阿基米德三角形性质知线段 PQ 过焦点且 N 点的纵坐标为 $\frac{y_P + y_Q}{2}$, 由本书第 133 页抛物线几何平均性质知 $y_P y_Q = \frac{1}{4}$. 再由基本不等式知 $\frac{y_P + y_Q}{2} \geq \sqrt{y_P y_Q} = \frac{1}{2}$. 答案为 D.

241. 设点 P 坐标为 $P(x_0, -1)$, 易知 AB 所在直线方程为 $x_0x = 2(y-1)$, 所以直线 AB 恒过焦点 $(0, 1)$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由抛物线几何平均值可知 $y_1y_2 = 1$, $\therefore A$ 点到准线的距离与 B 点到准线的距离之和 $y_1 + y_2 + 2 \geq 2\sqrt{y_1y_2} + 2 = 2 + 2 = 4$, 当且仅当 $y_1 = y_2 = 1$ 时等号成立.

242. 易知 $\triangle AF_1F_2$ 为等腰直角三角形, 由双曲线定义可得

$$\begin{cases} 2a = AF_2 - AF_1 = \sqrt{2}p - p \\ 2c = p \end{cases} \quad (11.35)$$

$$(11.36)$$

式 $\frac{(11.36)}{(11.35)}$ 得 $e = \sqrt{2} + 1$. 故选 C.

243. $\because$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的蒙日圆为 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, $\therefore a + 2 + a = 4 \Rightarrow a = 1$, 故选 A.

注 也可以特殊化, 把椭圆的右顶点和上顶点作为切点.

244. 依题意, 若 $\angle APB$ 恒为锐角, 则蒙日圆 $x^2 + y^2 = a^2 + 1$ 与直线 $3x + 4y - 10 = 0$ 相离, 即

$$d = \frac{10}{5} > \sqrt{a^2 + 1} \Rightarrow a^2 + 1 < 4 \Rightarrow 1 < a^2 < 3$$

从而离心率 $e = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \in \left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. 答案为 $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

245. 易知直线 l 的斜率存在且不为 0, 设方程为 $x = ty + 2$, 令 $\overrightarrow{NC} = \lambda \overrightarrow{CF}$, 设 C 点坐标为 $C(x, y)$,

N 点坐标为 $N\left(0, -\frac{2}{t}\right)$, 由定比分点公式可得 $\begin{cases} x = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \\ y = \frac{-\frac{2}{t}}{1+\lambda} \end{cases}$, 因为 C 点在椭圆上, 所以

$$\frac{\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)^2}{9} + \frac{\left(\frac{-\frac{2}{t}}{1+\lambda}\right)^2}{5} = 1 \Rightarrow 25t^2\lambda^2 + 90t^2\lambda - 36 + 45t^2 = 0 \quad (11.37)$$

根据题意我们可知 m 和 n 是方程 (11.37) 的两个根. 由韦达定理可知 $m + n = -\frac{18}{5}$.

246. (1) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 易知直线 l 的斜率存在且不为 0, 设方程为 $y = kx + 4$, 根据题意 $\overrightarrow{PQ} = \lambda_1 \overrightarrow{QA} = \lambda_2 \overrightarrow{QB}$, 可化为

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{PA} &= (-\lambda_1 - 1)\overrightarrow{AQ} \\ \overrightarrow{PB} &= (-\lambda_2 - 1)\overrightarrow{BQ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (-\lambda_1 - 1) + (-\lambda_2 - 1) = \frac{2}{3} \quad (11.38)$$

令 $\overrightarrow{PD} = \lambda \overrightarrow{DQ}$, 设 D 点坐标为 $D(x, y)$, Q 点坐标为 $Q\left(-\frac{4}{k}, 0\right)$, 由定比分点公式可得 $\begin{cases} x = \frac{-\frac{4}{k}\lambda}{1+\lambda} \\ y = \frac{4}{1+\lambda} \end{cases}$, 因

为 D 点在双曲线上, 代入并化简可得

$$\left(\frac{48}{k^2} - 3\right)\lambda^2 - 6\lambda - 19 = 0 \quad (11.39)$$

根据题意我们可知 $(-\lambda_1 - 1)$ 和 $(-\lambda_2 - 1)$ 是方程 (11.39) 的两个根. 因此

$$\frac{6}{\frac{48}{k^2} - 3} = \frac{2}{3} \Rightarrow k^2 = 4$$

252. $\triangle PMN$ 的外接圆方程为 $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 7 = 0$.

255. 依题意

$$3 = \frac{h^2 + 2a^2}{4} \Rightarrow h^2 + 2a^2 = 12 \Rightarrow 2a^2 = 12 - h^2$$

$$\therefore V = S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{2}a^2h = \frac{1}{4}h(12 - h^2).$$

$$\therefore V'(h) = -\frac{3}{4}h^2 + 3 = 3\left(1 + \frac{1}{2}h\right)\left(1 - \frac{1}{2}h\right), \text{ 于是 } V(h)_{\max} = V(2) = 6 - 2 = 4. \text{ 选 C.}$$

256. 易知 $CB \perp$ 平面 ABP , $\therefore R^2 = \frac{4}{4} + \frac{3}{3} = 2$, 所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 8π , 选 A.

257. 易知 $R^2 = \frac{1^2}{4} + 1^2 = \frac{5}{4}$, $\therefore S = 4\pi R^2 = 5\pi$. 选 D.

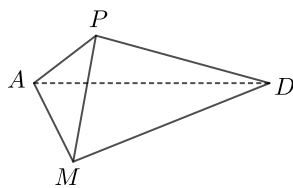
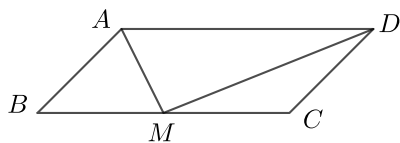
258. 依题可知 $PM \perp PA$, $PM \perp PD$, $\therefore MP \perp$ 平面 PAD ,

$\therefore R^2 = \frac{MP^2}{4} + r^2 = 1 + r^2$, 其中 R, r 分别为三棱锥 $M-PAD$ 的外接球半径和 $\triangle PAD$ 的外接圆半

径, 而在 $\triangle PAD$ 中, 由正弦定理得 $2r = \frac{4}{\sin 150^\circ} = 8 \Rightarrow r = 4$,

$\therefore R^2 = 1 + r^2 = 17$, 于是 $S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 68\pi$.

答案为 68π .



261. 记正三角形 ABC 的边长为 a , 则 $PC = 4 - a$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球半径满足

$$R^2 = \frac{(4-a)^2}{4} + \frac{a^2}{3} = \frac{7}{12}a^2 - 2a + 4 = \frac{7}{12}\left(a - \frac{12}{7}\right)^2 + \frac{16}{7} \geq \frac{16}{7} \quad (11.40)$$

选 D.

263. 辅助线如图 11.36, 取 AC 中点 D , 连接 DB , DS , 则 $\angle SDB$ 就是二面角 $S-AC-B$ 的平面角,

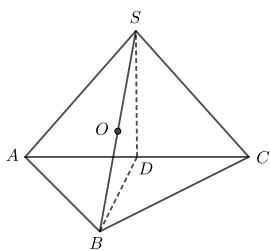


图 11.36

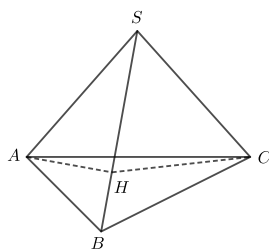


图 11.37

在 $\triangle SDB$ 中由余弦定理可求得 $SB^2 = 12$, 由勾股定理逆定理可知 $\angle SCB = \angle SAB = 90^\circ$, $\therefore SB$ 即为三棱锥 $S-ABC$ 的外接球直径, 于是外接球表面积是 $4\pi R^2 = 4\pi \times 3 = 12\pi$, 故选 C.

注 $\because \angle SCB = \angle SAB = 90^\circ$, $\therefore$ 三棱锥 $S-ABC$ 为弹三角板模型, 如图 11.37, 过 A 作 $AH \perp SB$ 于 H , 连接 HC , 易知 $\triangle AHC$ 为以 AC 为底的等腰三角形. 且 $SB \perp \triangle AHC$, 于是三棱锥 $S-ABC$ 的体积 $V_{S-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle AHC} \cdot SB$.

264. 三棱锥 $P-BCD$ 为典型的弹三角板模型, 如图 11.38, 过点 C 作 $CE \perp BD$, 垂足为 E , 连接 EP , 则四面体体积 $V_{P-BCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PCE} \cdot BD$.

过点 E 作 $EF \perp PC$, 垂足为 F , 则 $S_{\triangle PCE} = EF = \sqrt{PE^2 - 1}$, 于是四面体体积 $V_{P-BCD} = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{PE^2 - 1}$, 故只需 PE 最大便可得到四面体体积 V_{P-BCD} 最大.

在 $\triangle PBD$ 中, 由 $PB + PD = 10$, $BD = 8$, 我们想到了椭圆的定义: 以 B, C 两点为椭圆的左右焦点, 构造椭圆: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, 易知 PE 的最大值为椭圆的短半轴 3,

所以四面体体积 $V_{P-BCD} = \frac{8}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$.

故选 C.

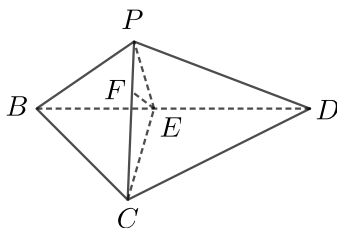


图 11.38

267. 依题意点 P 在平面 ABC 内的投影 D 恰好落在 AB 上, 所以平面 PAB 垂直于平面 CAB , 易知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径的平方为 $\frac{13}{4}$, $\triangle ABP$ 的外接圆半径的平方为 $\frac{5}{2}$, 于是

$$R^2 = \frac{13}{4} + \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{7}{2}$$

$\therefore S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 14\pi$. 选 D.

273. 依题意 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{4}{5}$, 选 D.

274. 依题意 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -3 \Rightarrow \tan \alpha = 2$, 所以 $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5}$. 选 A.

275. 依题意由万能公式 $\frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{7}{5} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$, 选 C.

276. 依题意得 $\tan \alpha = 3$, $\therefore \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 3}{1 + 3^2} = \frac{2}{5}$, 选 D.

277. 由万能公式可得 $\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{4 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - 1$, 解得 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 所以 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 选 C.

279. 令 $X = \frac{\pi}{4} - \alpha$, $Y = 2\alpha$, 则 $2X + Y = \frac{\pi}{2}$, 于是

$$\sin 2\alpha = \sin Y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2X\right) = \cos 2X = 2 \cos^2 X - 1 = 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}. \text{ 选 D.}$$

280. 令 $X = \alpha + \frac{\pi}{12}$, $Y = 2\alpha + \frac{2\pi}{3}$, 则 $Y - 2X = \frac{\pi}{2}$, 于是

$$\sin\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin Y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2X\right) = \cos 2X = 2 \cos^2 X - 1 = \frac{16}{25} - 1 = -\frac{9}{25}.$$

281. 令 $X = \theta - \frac{\pi}{3}$, $Y = 2\theta - \frac{\pi}{6}$, 则 $Y - 2X = \frac{\pi}{2}$, 于是

$$\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \sin Y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2X\right) = \cos 2X = 1 - 2\sin^2 X = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}.$$

284. 稍作变化 $y = -2\cos 2x = 2\cos(2x - \pi)$, $y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 令两个三角函数都等于 1.

$$\begin{cases} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \cos(2x - \pi) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\frac{\pi}{3} \mapsto \frac{\pi}{2}$ 相当于向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度. 故选 D.

286. 依题意令 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$, 令 $\cos 2x = 1 \Rightarrow x = 0$, 故选 D.

289. 充分性显然成立, 若 $\cos C < 0 < \sin A$, 则 C 为钝角, 于是必要性不成立. 故选 B

291. (1) 由射影定理知 $\sin B = \frac{1}{2}$, 又 $a > b$, 故 $B = \frac{\pi}{6}$; (2) 由边上中线等于边长度的一半可知三角形 ABC 为直角三角形, 故 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

293.

解法一 由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = 2$. 所以

$2a + c = 4\sin A + 2\sin C = 2\sin C + 4\sin\left(\frac{2\pi}{3} - C\right) = 4\sin C + 2\sqrt{3}\cos C = 2\sqrt{7}\sin(C + \theta) \leq 2\sqrt{7}$, 所以最大值为 $2\sqrt{7}$.

解法二 由余弦定理知 $a^2 + c^2 - ac = 3$. 设 $2a + c = t \Rightarrow c = t - 2a$, 代入 $a^2 + c^2 - ac = 3$, 得 $7a^2 - 5at + t^2 - 3 = 0$. 于是 $\Delta \geq 0 \Rightarrow t^2 \leq 28 \Rightarrow 2a + c \leq 2\sqrt{7}$.

295.

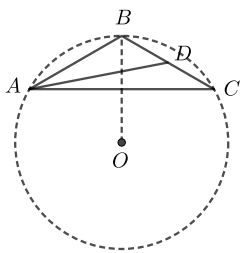
(1) 由射影定理 $a = b\cos C + c\cos B$ 可知

$$\sqrt{3}a = \sqrt{3}b\cos C - c\sin B \Rightarrow \sqrt{3}c\cos B = -c\sin B \Rightarrow B = \frac{2\pi}{3};$$

(2) 易知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = 2$, 所以当点 B 在边 AC 的中垂线上时 $\triangle ABC$ 的面

积取得最大值. 此时 $\triangle ABC$ 是顶角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的等腰三角形, 对 $\triangle ABD$ 运用余弦定理可得

$$AD = \sqrt{7}.$$



296. 依题意, 由 $2\sqrt{3}\cos^2 \frac{A}{2} = \sin A \Rightarrow A = \frac{2\pi}{3}$, 又由正弦定理可知 $2R = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$, 辅助线如图 11.39, 延长 CA 到 D, 使得 $AB = AD$, 此时 $\triangle ABC$ 周长变为 $2\sqrt{3} + CD$, 作出 $\triangle BCD$ 的外接圆, 易知其半径 r 满足 $2r = \frac{a}{\sin \frac{\pi}{3}}$, 解得 $2r = 4$, $\therefore CD$ 的最大值为 4, 再利用两边之和大于第三边知 $a + b + c > 2a = 4\sqrt{3}$, 故选 C.

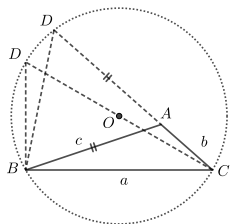


图 11.39

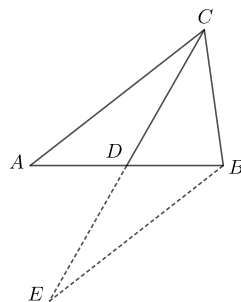


图 11.40

297.

(1) 由二倍角及正弦定理得 $ab = a^2 + b^2 - c^2 \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}$,

(2) 如图 11.40, 延长中线 CD 到 E, 使 $DE = DC$, 连接 EB, 在 $\triangle CBE$ 中, $\angle CBE = \frac{2\pi}{3}$, 设 $CD = x$, 由余弦定理得

$$4x^2 = a^2 + b^2 + ab \geq 3ab \quad (11.41)$$

当且仅当 $a = b$ 时等号成立. 又 $\triangle ABC$ 的面积为 2, 所以

$$2 = \frac{1}{2}ac \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow ab = \frac{8\sqrt{3}}{3} \quad (11.42)$$

将式 (11.42) 代入式 (11.41),

$$CD^2 \geq 2\sqrt{3} \quad (11.43)$$

298. 延长 AM 至 D , 使得 $MD = 2AM$, 则 $\triangle ABM \sim \triangle DCM$. 在 $\triangle ACD$ 中, $\angle CDA = 120^\circ$, $AD = 3$, $CD = 2AB$, 以下从略.

299. 根据题意 $B = 2A \Rightarrow 2 \cos A = \frac{b}{a}$. 又因为三角形为锐角三角形, 所以

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 3A > 90^\circ \Rightarrow A > 30^\circ \\ B = 2A < 90^\circ \Rightarrow A < 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow 30^\circ < A < 45^\circ \Rightarrow \sqrt{2} < 2 \cos A < \sqrt{3}$$

故选 A.

300. 根据题意可知 $a = 2 \cos C$. 又因为正弦定理, 所以

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{\sin(A+C)}{\sin C} = \frac{\sin 3C}{\sin C} = 4 \cos^2 C - 1$$

所以

$$a + b + c = 4 \cos^2 C + 2 \cos C \quad (11.44)$$

又因为

$$\left. \begin{array}{l} 0 < A < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 2C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < B < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \pi - C - 2C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < C < \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sqrt{2} < 2 \cos C < \sqrt{3} \quad (11.45)$$

利用二次函数的性质可知 $a + b + c$ 的取值范围为 $(2 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{3})$. 故选 C.

301. 根据题意可知 $\cos B = 1 - 2 \sin^2 A = \cos 2A$, 所以 $B = 2A$, 因此 $b^2 = a(a + c)$, 于是

$\frac{c}{b-a} = \frac{b+a}{a} = \frac{b}{a} + 1$, 又由 $B = 2A$ 可得 $\frac{b}{a} = 2 \cos A$, 所以 $\frac{c}{b-a} = 2 \cos A + 1$, 又

$$\left. \begin{array}{l} 0 < B = 2A < \pi \\ 0 < C = \pi - 3A < \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < A < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < \cos A < 1 \quad (11.46)$$

所以 $\frac{c}{b-a}$ 的取值范围是 $(2, 3)$.

302. (1)

证 由本书第 238 页射影定理知 $a = 2b \cos B$, 即 $\sin A = \sin 2B$, 即 $A = 2B$.

(2) 由 $A = 2B$ 可知 $a^2 = b(b+c) = b^2 + \sqrt{2}ab$, 两边同除以 b^2 , 得

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \sqrt{2}\left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0 \quad (11.47)$$

解得 $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$, 故 $\cos B = \frac{a}{2b} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

303. 由正弦定理可知 AD 为角平分线, 且

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = 2$$

在三角形 ACD 中, 余弦定理

$$\cos \angle DAC = \frac{AC^2 + 4 - 2}{4AC} \quad (11.48)$$

又由引理 6.1 可知

$$\frac{1}{2AC} + \frac{1}{AC} = \frac{2 \cos \angle DAC}{AD} = \cos \angle DAC \quad (11.49)$$

所以 $AB = 2AC = 4$, 故选 B.

304.

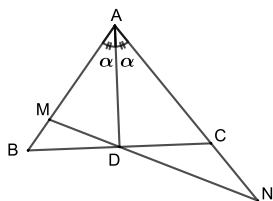


图 11.41

证 由推论可知 $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{2 \cos \alpha}{AD} = \frac{2}{AB}$.

305. 由推论可知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$, 再由基本不等式知最小值为 9.

306. 设 $BD = x$, 由张角定理推论可知

$$1 + \frac{1}{2} = 2 \cos \angle BAD = \frac{1 + 1 - x^2}{1 \times 1} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

又

$$\cos \angle BAD = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \angle BAD = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

由正弦定理知 $BO = \frac{BD}{2 \sin \angle BAD} = \frac{\sqrt{14}}{7}$.

307. (1) 由本书第 238 页射影定理知 $4a \cos B + 4b \cos A = b + 4a \cos B$, 可得 $\cos A = \frac{1}{4}$, 于是

$$\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4};$$

(2) 由引理 6.1 知

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{b} = \frac{2 \cos \angle BAD}{\sqrt{10}} \quad (11.50)$$

又由二倍角公式可知

$$\cos \angle BAD = \sqrt{\frac{1 + \cos \angle BAC}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \quad (11.51)$$

由以上两式可得 $b = 3$.

308. 利用张角定理和斯库顿定理都可得到答案 $\frac{6\sqrt{21}}{5}$.

315. 特殊化, 令 $f(x) = kx (k \neq 0)$, 则 $(x+1)^2 + 2(y+2)^2 = 4$. 引入圆的参数方程

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta - 1, \\ y = \sqrt{2} \sin \theta - 2, \end{cases} \quad \text{则 } x + y = \sqrt{2} \sin \theta + 2 \cos \theta - 3 \leq \sqrt{6} - 3.$$

320. 易知函数 $f(x)$ 是 **开口向上** 的偶函数 (**轴对称**), 所以自变量离 y (**对称**) 轴越远, 函数值就越大. 选 A.

321. 易知函数 $f(x)$ 的图象是以 $x = 2$ 为对称轴的轴对称图形, 且开口向上, 所以自变量离对称轴越远, 函数值就越大. 选 A.

322. 函数 $f(x)$ 为偶函数, 并易知当 $x > 0$ 时单调递增, 所以函数 $f(x)$ 为开口向上的轴对称图形, 自变量离对称轴越远函数值就越大. 因此 $|x| > |2x - 1| \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 1$.

324. 函数 $f(x) = e^{x-1} + e^{1-x}$ 的图象是开口向上的轴对称图形, 且对称轴为 $x = 1$, 所以 $f(x-1) < e + e^{-1} \Rightarrow |x-1-1| < |2-1| \Rightarrow x \in (1, 3)$.

327.

解法一 易知函数 $f(x)$ 的图象为开口向下的轴对称图形, 所以离对称轴越远的自变量对应的函数值越小, 故 $|x-1-0| > |-1-0| \Rightarrow x > 2$ 或 $x < 0$. 选 C.

解法二 取特殊函数 $f(x) = -|x| + 3$.

328. 易知函数 $f(x)$ 图象为中心对称图形, 对称中心为 $(0, 3)$, 且在定义域内单调递增, 因此 $6 - f(x) = f(-x) \Leftrightarrow f(1-2x) > f(-x) \Leftrightarrow 1-2x > -x \Leftrightarrow x < 1$.

332. 易知 $f(|x|)$ 为偶函数, 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $g(x) = \text{偶} - \text{偶} = \text{偶}$, 故 ① $\times$, ④ $\checkmark$; 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $g(x) = \text{偶} - \text{偶} = \text{偶}$, 故 ② $\times$; 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $g(x) = \text{偶} - \text{偶} = \text{偶}$, 故 ③ $\checkmark$; ⑤ ⑥ $\times$. 故选 A.

333. 依题意令 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, 则不等式 $f(2x) - f(x-1) > 3x^2 + 2x - 1$ 转化为

$$2x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} - 3x^2 - 2x + 1 > 0$$

整理得 $3x^2 + 2x - 1 < 0$, 解得 $-1 < x < \frac{1}{3}$. 所以答案为 $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$.

334. $f(x) = x^2 + 2x - m \cos(x+1) + m^2 + 3m - 7 = (x+1)^2 - m \cos(x+1) + m^2 + 3m - 8$, 可以看成是偶函数 $g(x) = x^2 - m \cos x + m^2 + 3m - 8$ 向左平移了一个单位, 因为函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点, 所以 $g(0) = 0 \Rightarrow m = 2$.

338.

解法一 对式子 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2018$ 两边同时加上 2018, 令 $h(x) = f(x) + 2018$, 则 $h(x+y) = h(x) + h(y)$, 易知 $h(x)$ 为奇函数. 故 $g(x) = h(x) + 2018x^{2019} - 2018$.

此为典型的奇函数加常数模型, 故答案为 -4036.

解法二 令 $f(x) = -2018$.

339. 易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$ 且单调递增, 所以

$$\left. \begin{array}{l} -1 < a < 1 \\ -1 < a+1 < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 < a < 0 \quad (11.52)$$

又根据函数的奇偶性知

$$f(a) + f(-a) = 2 \Leftrightarrow 2 - f(a) = f(-a)$$

所以 $f(a) + f(a+1) > 2 \Leftrightarrow f(a+1) > f(-a) \Rightarrow a > -\frac{1}{2}$, 综上选 C.

347. 根据题意, 函数 $f(x)$ 的图象是以 $x=1$ 为对称轴的轴对称图形, 并且开口朝上, 则 $f(x) > f(2x+1) \Leftrightarrow |x-1| > |2x+1-1| \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 4x^2$. 因此选 C.

348. 由三次函数的对称性可知 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. 所以 $f(x) + f(1-x) = \frac{1}{2}$. 因此

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2016} f\left(\frac{k}{2017}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \cdots + f\left(\frac{2015}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{2015}{2017}\right) + \cdots + f\left(\frac{1008}{2017}\right) + f\left(\frac{1009}{2017}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times 1008 = 504. \text{ 选 B.}
\end{aligned}$$

349. 由“ $\frac{1}{1}$ ”型函数的对称性可知 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$. 所以 $f(x) + f(1-x) = -2$. 因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{2017} f\left(\frac{n}{2017}\right) \\
&= f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \cdots + f\left(\frac{2015}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f(1) \\
&= f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{2015}{2017}\right) + \cdots + f\left(\frac{1008}{2017}\right) + f\left(\frac{1009}{2017}\right) + 0 \\
&= (-2) \times 1008 = -2016
\end{aligned}$$

350. 易知 $f(x)$ 的对称中心为 $(1, 0)$, 由三次函数性质知 $g(x)$ 的对称中心为 $(1, 0)$. 令 $n = 2$, 则 $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 2 + 0 = 2$, 故选 A.

351. 易知 $f(x)$ 的对称中心为 (a, b) , $h(x)$ 的对称中心为 (a, b) . 所以

$$\sum_{i=1}^{2m} (x_i + y_i) = 2m(a + b) = 4m \Rightarrow a + b = 2$$

由轮换对称知最小值为 $1 + 1 = 2$.

352. 易知函数 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 所以 $f(x) + f(1-x) = 1$, 故选 B.

353. 易知函数 $g(x) = \frac{x+4}{2x-1}$ 是以 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 为对称中心的中心对称函数, 和函数 $f(x)$ 的图象如图 11.42 所示, 故选 A.

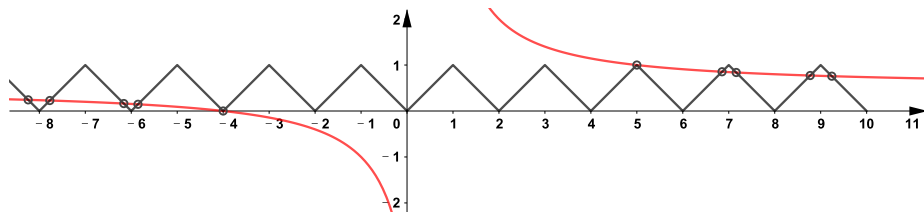


图 11.42

355. 因为 $f(x)$ 的周期为 4, 所以 $f(x+3) = f(x-1)$.

358. 易知 $f(x)$ 的最小正周期为 8, 因为 $55 \div 8 = 6 \cdots 7$, 而 $7 = 8 - 1$, 所以 $f(1) + f(2) + \cdots + f(55) = 0$.

361. $\Delta' > 0$ 即可, $(-\infty, -3) \cup (6, +\infty)$.

362. 易知过 $f(x)$ 的中心点的切线方程为 $y = -x$, 且点 $(1, b)$ 在 A 区域, 所以 $-1 < b < f(1) = 0$.

363. 易知过 $f(x)$ 的中心点的切线方程为 $y = -\frac{a^2}{4}\left(x - \frac{a}{2}\right) + 1 - \frac{a^3}{12}$, 且点 $A(0, 2)$ 在 C 区域, 所以 $-\frac{a^2}{4}\left(-\frac{a}{2}\right) + 1 - \frac{a^3}{12} > 2 \Rightarrow a > \sqrt[3]{24}$.

364. (1) $f(x) = x^3 - 3x$; (2) 根据题意, 易知 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x)_{\max} - f(x)_{\min}| = 4 \Rightarrow c \geq 4$; (3) $-6 < m < 2$.

56. 根据题意

$$(1) f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 2ax = \ln x - 2ax + 1 \quad (x > 0),$$

令 $f'(x) = 0$ 得

$$2a = \frac{1 + \ln x}{x} \quad (11.53)$$

记 $Q(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, 则 $Q'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$, $\therefore Q(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 于是 $Q(x)_{\max} = Q(1) = 1$,

又易知 $Q\left(\frac{1}{e}\right) = 0$, 并且当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $Q(x) > 0$.

$\therefore$ 当 $0 < 2a < 1$ 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 方程 (11.53) 有两解.

综上所述, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 有两个极值点.

$$(2) g(x) = f(x) - x = x \ln x - ax^2 - x, \quad g'(x) = \ln x - 2ax \quad (x > 0),$$

$$\text{令 } g'(x) = 0 \text{ 得 } 2a = \frac{\ln x}{x},$$

记 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $\therefore h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 于是

$$h(x)_{\max} = h(e) = \frac{1}{e},$$

所以当 $0 < a < \frac{1}{2e}$ 时, $g(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ,

由

$$\begin{cases} \ln x_1 = 2ax_1 \\ \ln x_2 = 2ax_2 \end{cases} \quad (11.54)$$

$$\begin{cases} \ln x_1 = 2ax_1 \\ \ln x_2 = 2ax_2 \end{cases} \quad (11.55)$$

由式 (11.54), (11.55) 得 $\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 = 2a(x_1 + x_2)$,

$$\therefore 2a = \frac{\ln(x_1 x_2)}{x_1 + x_2}, \text{不妨设 } x_1 < x_2, \text{则 } 1 < x_1 < e < x_2, \therefore x_1 + x_2 > x_2 > e,$$

$$\text{又 } h(x) \text{ 在 } (e, +\infty) \text{ 上是减函数, } \therefore \frac{\ln(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} < \frac{\ln(x_2)}{x_2} = 2a = \frac{\ln(x_1 x_2)}{x_1 + x_2},$$

$$\therefore \ln(x_1 + x_2) < \ln(x_1 x_2), \therefore x_1 + x_2 < x_1 x_2.$$

57.

注 若 $f'(x_0) = 0$.

① 若 $f''(x_0) > 0$, 则 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点;

② 若 $f''(x_0) < 0$, 则 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点.

若 x_0 为函数 $f(x)$ 的极小值点, 且 $f(x_1) = f(x_2), x_1 < x_2$, 则

(1) 若 $f'''(x) > 0$ 在区间 (m, n) 恒成立, 则极小值点右偏, 所以 $x_1 + x_2 < 2x_0$;

(2) 若 $f'''(x) < 0$ 在区间 (m, n) 恒成立, 则极小值点左偏, 所以 $x_1 + x_2 > 2x_0$.

依题意 $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x^2} \quad (x > 0)$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 单调递增, 于是 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极小值点. 故 A $\times$;

由于 $y' = f'(x) - 1 = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 = \frac{-x^2 + x - 2}{x^2} < 0 \quad (x > 0)$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 且 $f(1) - 1 = 2 + \ln 1 - 1 = 1 > 0$, $f(2) - 2 = 1 + \ln 2 - 2 = \ln 2 - 1 < 0$, $\therefore$ 函数 $y = f(x) - x$ 有且只有 1 个零点. 所以 B $\checkmark$;

分离变量 $f(x) > kx \Rightarrow k < \frac{2}{x^2} + \frac{\ln x}{x}$, 令 $g(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{\ln x}{x} \quad (x > 0)$,

则 $g'(x) = \frac{-4 + x - x \ln x}{x^3}$, 令 $h(x) = -4 + x - x \ln x \quad (x > 0)$, 则 $h'(x) = -\ln x$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, $\therefore h(x) \leq h(1) < 0, \therefore g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 函数无最小值. 故 C $\times$;

因为 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 且 $f'''(x) = \frac{2x-12}{x^4}$, 于是

① 当 $x \geq 6$ 时, $x_1 + x_2 > \max\{x_1, x_2\} > 4$;

② 当 $x < 6$ 时, $f'''(x) < 0$, 极小值点往左偏移, 所以 $x_1 + x_2 > 2 \times 2 = 4$. 所以 D $\checkmark$.

答案为 B, D.

58. 依题意

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + (2a-1)x - 2a = \frac{(2a-1)x^2 - 2ax + 1}{x} = \frac{(x-1)[(2a-1)x-1]}{x},$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } a \leq \frac{1}{2} \text{ 时, 令 } \begin{cases} f'(x) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{ 得 } 0 < x < 1, \text{ 令 } \begin{cases} f'(x) < 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{ 得 } x > 1;$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \frac{1}{2} < a < 1 \text{ 时, 则 } \frac{1}{2a-1} > 0, \text{ 令 } \begin{cases} f'(x) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{ 得 } 0 < x < 1 \text{ 或 } x > \frac{1}{2a-1},$$

$$\text{令 } \begin{cases} f'(x) < 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{ 得 } 1 < x < \frac{1}{2a-1};$$

③ 当 $a = 1$ 时, $f'(x) \geq 0$;

$$\textcircled{4} \text{ 当 } a > 1 \text{ 时, 则 } 0 < \frac{1}{2a-1} < 1, \text{ 令 } \begin{cases} f'(x) < 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{ 得 } \frac{1}{2a-1} < x < 1.$$

综上所述, 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减;

当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $\left(1, \frac{1}{2a-1}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{2a-1}, +\infty\right)$ 上单调递增;

当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2a-1}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{2a-1}, 1\right)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 证 由(1)可知 $a = 1$, 此时 $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x$, 设 $x_1 < x_2$,

又因为 $f(x_1) + f(x_2) = -3 = 2f(1)$, 则 $0 < x_1 < 1 < x_2$,

设 $g(x) = f(2-x) + f(x) + 3, x \in (0, 1)$, 则

$$g'(x) = -f'(2-x) + f'(x) = -\frac{(1-x)^2}{2-x} + \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{2(1-x)^2}{x(2-x)} > 0 \quad (11.56)$$

对任意 $x \in (0, 1)$ 成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数,

于是 $\forall x \in (0, 1)$, 有 $g(x) < g(1) = 2f(1) + 3 = 0$,

即 $\forall x \in (0, 1)$, 有 $f(2-x) + f(x) + 3 < 0$, 因为 $0 < x_1 < 1$, 所以有 $f(2-x_1) + f(x_1) + 3 < 0$,

即 $f(x_2) > f(2-x_1)$, 又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 所以 $x_2 > 2-x_1$, 即 $x_1 + x_2 > 2$.

64. $C_8^2 - 10 = 18$.

65. 选一个空盒的方法为 C_4^1 种, 再按照 $m = 5$ 、 $n = 3$ 的满射分配求出 5 个小球放入 3 个小盒的方法: 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 30, a_3 = 150$, 所以一共有 $C_4^1 A_3 = 150$ 种, 恰有一个空盒的概率为 $\frac{C_4^1 A_3}{4^5} = \frac{75}{128}$.

第十二章 变式训练答案速递

- | | | |
|--|--|---|
| <p>1. D</p> <p>2. C</p> <p>3. D</p> <p>4. D</p> <p>5. C</p> <p>6. A</p> <p>7. 4.</p> <p>8. A</p> <p>9. $\frac{49}{2}$.</p> <p>10. BCD</p> <p>11. 3</p> <p>12. D</p> <p>13. A</p> <p>14. $a_n = (n-1)^2$</p> <p>15. $\frac{2019}{2021}$</p> <p>16. D</p> <p>17. B</p> <p>18. A</p> | <p>19. (1) $a_n = 2n - 4$;</p> <p>20. B</p> <p>21. C</p> <p>22. (1) $a_n = 3^{n-1}$; (2) $m = 6$.</p> <p>23. (1) $a_n = 2^n$; (2) $S_n = 21$.</p> <p>24. -254</p> <p>25. 9</p> <p>26. $-\frac{1}{4}$</p> <p>27. B</p> <p>28. $S_{2020} = \frac{3^{2020} - 1}{2}$</p> <p>29. C</p> <p>30. B</p> <p>31. -63.</p> <p>32. D</p> <p>33. B</p> <p>34. (1) $S_n = n^2 + n$; (2) 数列 $\{a_n + b_n\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列; 数列 $\{a_n - b_n\}$</p> | <p>是以 -1 为首项, -1 为公比的等比数列.</p> <p>35. A</p> <p>36. $a_n = 2^{n-2}$ 或 $a_n = 2^{2-n}$.</p> <p>37. A,B</p> <p>38. D</p> <p>39. (1) $a_n = 4n$;
(2) $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$.</p> <p>40. B</p> <p>41. 21</p> <p>42. D</p> <p>43. 21.</p> <p>44. C</p> <p>45. 3</p> <p>46. $\frac{40}{27}$</p> <p>47. B</p> <p>48. D</p> <p>49. $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4} \right)$</p> |
|--|--|---|

50. {5}

51. $\frac{2^{n-1}}{n}, \frac{1}{2}$.

52. C

53. D

54. $a_n = 3^n + n - 1$.

55. (1) $b_n = n^2 - 2n + 2$; (2) 数列 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 的最大项为第 4 项 $\frac{5}{4}$.

56. $a_n = n(n+1)$.

57. $a_n = \frac{1}{n}$.

58. BD

59. $a_n = 3 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

60. 2.

61. (1) $\{b_n\}$ 为以 3 为首项, $\frac{3}{2}$ 为公比的等比数列;

$$a_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 2;$$

(2) $m \geq 1$.

62. (1) $b_n = 2^n - 1$; (2) 3016.

63. C

64. $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}$.

65. (1) 略; (2) $\frac{7}{4} - \frac{2n+7}{4 \cdot 3^n}$.

66. $a_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6n - 9$.

67. $a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 2n - 1$.

68. C

69. $a_n = \frac{2}{2 \times 3^{n-1} - 1}$.

70. $a_n = \frac{1}{2n-1}$.

71. $a_n = n$

72. $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & (n \text{ 为奇数}) \\ 2^{\frac{n}{2}} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$.

73. $a_n = \begin{cases} 4 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & (n \text{ 为奇数}) \\ -4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$.

74. $\lambda = 4$.

75. $\lambda = 4$.

76. (1) $q = -2$; (2) $S_n = \left(\frac{2}{3}n - \frac{7}{9}\right)(-2)^n + \frac{7}{9}$.

77. (1) $a_2 = 3a_1 - 4 = 5$,
 $a_3 = 3a_2 - 8 = 7$, $a_n = 2n + 1$;
(2) $S_n = (2n-1)2^{n+1} + 2$.

78. (1) $k = 4$, $a_n = \frac{9}{2} - n$;
(2) $T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

79. (1) $a_n = 4n - 2$;

80. B

81. (1) $a_n = n + 5$; (2) $k \geq 1009$.

82. (1) $a_n = 2n$

83. (1) $a_n = 2n$; $b_n = 2^{n-1}$; (2) $T_n = 2^n - 1 + \frac{n}{2n+1}$.

84. (1) $a_n = 2^{n-1}$; (2) $T_n = \frac{n}{2n+1}$.

85. (1) 选条件 ②, $a_n = 2^{n-1}$;
(2) $T_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

86. (1) $a_n = 2n + 1$;
(2) $T_n = \frac{4n}{6n+9} + 2n$.

87. (1) 数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是以 4 为首项, 2 为公差的等差数列;
(2) $S_n = \frac{n^2 + 2n}{4(n+1)^2}$.

88. (1) $a_n = 3^n$; (2) $T_n = \frac{3[(-3)^n - 1]}{4} + \frac{n}{n+1}$.

89. 5.

90. (1) $a_n = 2n - 4$.

91. (1) $a_n = 2^{n-1}$; (2) 略.

92. (1) $a_n = (-2)^n$;
(2) $T_n = -\frac{(-2)^{n+1} + 2}{(-2)^{n+1} + 1}$.

94. (1) $a_n = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 2^{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$

95. (1) $S_n = n(n+1)$; (2) 见详解.

96. $T_n = -1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

$$97. |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| =$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}n^2 + \frac{21}{2}n, & n \leq 11 \\ \frac{1}{2}n^2 - \frac{21}{2}n + 110, & n > 11 \end{cases}$$

$$98. |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| =$$

$$\begin{cases} \frac{-3n^2 + 103n}{2}, & n \leq 17 \\ \frac{3n^2 - 103n}{2} + 884, & n > 17 \end{cases}$$

$$99. 4$$

$$100. B$$

$$101. B$$

$$102. A$$

$$103. A$$

$$104. 3$$

$$105. \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3}$$

$$106. A$$

$$107. A$$

$$108. \frac{1}{9}$$

$$109. C$$

$$110. 2$$

$$111. D$$

$$112. D$$

$$113. 6$$

$$114. 2$$

$$115. A$$

$$116. B$$

$$117. \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$118. B$$

$$119. C$$

$$120. D$$

$$121. D$$

$$122. A$$

$$123. A$$

$$124. D$$

$$125. B$$

$$126. D$$

$$127. A$$

$$128. B$$

$$129. D$$

$$130. D$$

$$131. C$$

$$132. B$$

$$133. B$$

$$134. A$$

$$135. \frac{27\sqrt{3}}{8}$$

$$136. C$$

$$137. [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$$

$$138. B$$

$$139. B$$

$$140. \sqrt{17} + 1$$

$$141. \frac{5\sqrt{13}}{26}.$$

$$142. \frac{7}{12}.$$

$$143. x^2 + y^2 = 1 (y \neq 0)$$

$$144. C$$

$$145. A$$

$$146. A$$

$$147. \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$148. \sqrt{2} + 1$$

$$149. [0, 1]$$

$$150. 4$$

$$151. \sqrt{13} + 1$$

$$152. B$$

$$153. \sqrt{2}.$$

$$154. 1 - \sqrt{2}.$$

$$155. A$$

$$156. A$$

$$157. \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$$

$$158. A$$

$$159. 2$$

160. C	183. C	216. -1
161. $k = \frac{5}{14}$	184. $\frac{1}{7}$	217. (1) $e = \sqrt{5}$; (2) $E: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$.
162. B	185. C	220. B
163. C	186. D	222. (1) 最大值 2; (2) 定值 1
164. C	187. $\frac{7+2\sqrt{6}}{7}$	223. (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; (2) 4.
165. A	188. C	224. (16, 0)
166. B	189. C	225. 切点弦方程为: $y_0 y = 2(x-1)$.
167. C	190. D	226. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
168. $\frac{26}{45}$	191. 2	227. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
169. $\frac{4}{5}$	192. 3	228. C
170. (-13, 13)	193. D	229. A
171. B	194. $\frac{1}{3}$	233. $y = x + 1$
172. C	195. $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(x-1)$	234. (I) $y^2 = 4x$; (II) $x^2 + y^2 = 5$.
173. 4	198. 2	235. $\sqrt{2} - 1$
174. A	199. A	236. B
175. C	200. C	237. D
176. $e = \sqrt{3} + 1$	201. B	238. B
177. B	202. C	239. $k = 2$
178. C	203. B	240. D
179. B	205. A C	241. 4
181. C	212. B	242. C
182. $\sqrt{3} + 1$	214. 直线 $x = 3\sqrt{2}$.	

243. A

244. $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

247. C

248. -10

249. (I) 椭圆 $C: \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$;(II) $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -\frac{1}{3}$.250. (I) 椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$;

(II) (1, 0).

251. B

253. ABD

254. 4π

255. C

256. A

257. D

258. 68π

259. D

260. B

261. D

262. 36π

263. C

264. C

265. $\frac{5\pi}{3}$

266. B

267. D

268. $S = 2\pi$

269. A

270. A

271. B

272. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

273. D

274. A

275. C

276. D

277. C

278. D

279. D

280. $-\frac{7}{25}$

281. D

282. $\frac{3}{4}$

283. A

284. D

285. C

286. D

287. $\frac{\pi}{2}$ 288. π

289. B

290. C

291. (1) $B = \frac{\pi}{6}$; (2) $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.292. (1) $A = \frac{\pi}{3}$; (2) $(S_{\triangle ABC})_{\max} = 3\sqrt{3}$.293. $2\sqrt{7}$

294. D

295. (1) $B = \frac{2\pi}{3}$; (2) $AD = \sqrt{7}$.

296. C

297. (1) $C = \frac{\pi}{3}$; (2) $CD^2 \geq 2\sqrt{3}$ 298. $2\sqrt{3}$

299. A

300. C

301. (2, 3)

302. (2) $\cos B = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

303. B

305. 9

306. $BC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $BO = \frac{\sqrt{14}}{7}$

307. (1) $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$; (2) $b = 3$	329. C	351. 2
308. $\frac{6\sqrt{21}}{5}$	330. $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$	352. B
309. $\frac{1}{2}$.	331. $-\frac{1}{2}$	353. A
311. 1	332. A	354. 特殊化, 令 $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}(x-2)$, 可知答案 为 B.
312. B	333. $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	355. D
313. $-\frac{1}{2}$	334. $m = 2$	356. $-\frac{7}{8}$
314. C	335. $f(x) = x^2$.	357. B
315. $\sqrt{6} - 3$	336. -2	358. 0
316. $a = \pm 2$	337. 2	359. 3
317. A	338. -4036	360. C
318. A	339. C	361. $(-\infty, -3) \cup (6, +\infty)$.
319. C	340. C	59. B
320. A	341. C	60. B
321. A	342. A	61. D
322. $\frac{1}{3} < x < 1$	343. B	62. B
323. A	344. 4	63. $\frac{15}{64}$
324. $x \in (1, 3)$	345. B	64. 18.
325. B	346. D	65. $\frac{75}{128}$
326. D	347. C	66. C
327. C	348. B	67. A
328. $x < 1$	349. -2016	
	350. A	