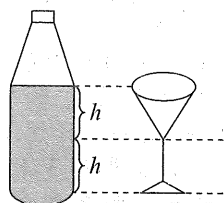


⑭ 2021 年某 GD 附中 入学数学真卷(十)

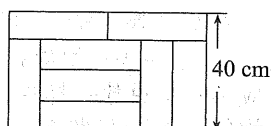
(满分:100 分 时间:60 分钟)

一、选择题(共 4 小题,每小题 3 分,共 12 分)

- (分数的应用)一个数的 $\frac{3}{5}$ 比这个数的一半大 2,那么这个数是()。
A. 20 B. 30 C. 42 D. 54
- (等体积变换)图中所示的瓶底的面积和圆锥形杯口的面积相等,现在将瓶子中的液体倒入圆锥形杯子中,能倒满圆锥形杯子的杯数为()。
A. 3 B. 4 C. 6 D. 8



第 2 题图

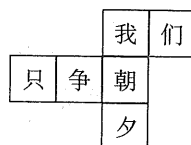


第 3 题图

- (图形的切拼)用 8 块相同的小长方形恰能拼成如图所示的一个大长方形,则每个小长方形的面积是()。
A. 200 cm^2 B. 300 cm^2 C. 600 cm^2 D. 2400 cm^2
- (找规律)魔术师表演魔术,从一个装有 5 个小球的盒子中任取 1 个小球,把这个小球变成 5 个和原来一模一样的小球放回盒中;他又从中任取 1 个小球,又把这个小球也变成 5 个和原来一模一样的小球放回盒中……如此进行到某一时刻,魔术师停止取球,此时盒中球的总数可能是()。
A. 2018 B. 2019 C. 2020 D. 2021

二、填空题(共 8 小题,每小题 3 分,共 24 分)

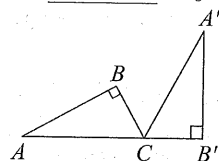
- (定义新运算)定义这样一种关于 $\ast$ 的运算:
规定 $a \ast b = a \times (a + b)$ 。若 $2 \ast (3 \ast \star) = 52$,那么式子中的 $\star$ 代表的数是_____。



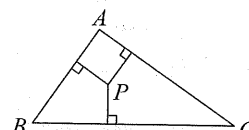
第 6 题图

- (立方体的展开图)一个正方体的表面展开图如图所示,将它折成正方体后,“们”字对面是“_____”。
- (商品经济)某商场为了促销某件运动衣,先按进价的 50% 加价后,又降价 20%,结果每件运动衣仍获利 20 元,每件运动衣的进价是_____元。
- (立体图形的切拼)将一个正方体切成两个一样的长方体,表面积增加 10 平方厘米,正方体原来的表面积是_____平方厘米。

- (图形的运动)如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$, $AC = 4 \text{ cm}$,将 $\triangle ABC$ 绕顶点 C 顺时针方向旋转至 $\triangle A'B'C$ 的位置,使得 A, C, B' 三点在同一条直线上,则点 A 在旋转过程中所经过的路线长为_____ cm 。(结果保留 π)

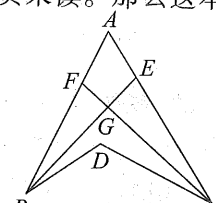


第 9 题图



第 10 题图

- (三角形的面积)如图,三角形 ABC 的周长是 30 厘米,三角形内一点 P 到三角形三条边的距离都是 3 厘米,则三角形 ABC 的面积为_____平方厘米。
- (还原问题)磊磊买了一本新书,非常喜欢。第一天读了这本书的 $\frac{3}{5}$ 还多 12 页,第二天读了剩余的 $\frac{1}{4}$ 还多 15 页,第三天读了剩余的 $\frac{1}{3}$ 还少 18 页,这时,还剩 78 页未读。那么这本书共有_____页。
- (三角形内角和)如图, BE 是 $\angle ABD$ 的平分线, CF 是 $\angle ACD$ 的平分线, BE 与 CF 交于点 G ,若 $\angle BDC = 140^\circ$, $\angle BGC = 110^\circ$,则 $\angle A$ 的度数为_____。



第 12 题图

三、解答题(共 7 小题,共 64 分)

- (15 分)

(1) 直接计算: $\frac{13}{15} \div \left[\frac{9}{10} - \left(\frac{1}{20} + 20\% \right) \right]$

(2) 简便运算: $\frac{7}{6} + \frac{13}{12} + \frac{21}{20} + \frac{31}{30} + \frac{43}{42} + \frac{57}{56} + \frac{73}{72} + \frac{91}{90}$

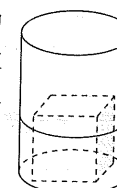
(3) 解方程: $2\left(x - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{5}x + 2$

- (图形的切拼)将一张正方形大纸片,横着剪 4 刀,竖着剪 6 刀,可以裁成尽可能大的形状大小一样的 35 张长方形纸片。现在,拿出其中的一张长方形纸片裁成若干张,尽可能大的大小一样的小正方形纸片。如果小正方形边长为 3 厘米,那么长方形纸片的面积应为多少平方厘米?(7 分)

- (比、百分数的应用)有一批零件,原计划按 8:5 分配给师徒两人加工。实际师傅加工了 1600 个,超过分配任务的 25%,徒弟因有事只完成分配任务的 60%,徒弟实际加工零件多少个?(7 分)

- (最优化问题)甲、乙两个班(学生人数相同)的学生同时从学校出发,到距离学校 24 千米的海洋馆参观学习,学校只有一辆大客车,一次可以运载一个班的学生。若大客车每小时行驶 45 千米,学生步行每小时走 5 千米,那么如何安排他们乘车使他们最快到达海洋馆?最短时间是多少?(学生上下车的时间忽略不计)(8 分)

- (立体图形的体积)如图,一个圆柱形玻璃容器的底面直径是 10 cm,高是 20 cm,在它的内部放置着一个长 8 cm、宽 6 cm、高 10 cm 的长方体的玻璃容器,长方体容器内部的水深 7 cm,放入一块不规则的石块后水溢出,并使得圆柱内部的水深为 8 cm,这块石块的体积是多少立方厘米?(8 分)



第 17 题图

- (找等量关系)某市职工医疗保险规定:职工因病住院医疗费用补偿设起付线,如果甲医院的起付线是 500 元,500 元以内的个人支付;超过起付线并且不超过 2000 元的部分按 80% 补偿;2000 元以上的部分按 75% 补偿,其余自付。王叔叔 7 月份因病在甲医院住院,医疗费用补偿后,个人实际支付了 3300 元,那么给王叔叔补偿多少元?(9 分)

- (新定义数)《道德经》中的“道生一,一生二,二生三,三生万物”道出了自然数的特征。在数的学习过程中,我们会对其中一些具有某种特性的数进行研究,如学习自然数时,我们研究了奇数、偶数、质数、合数等。现在我们来研究另一种特殊的自然数——“纯数”。

定义:对于自然数 n ,在通过列竖式进行 $n + (n + 1) + (n + 2)$ 的运算时各位都不产生进位现象,则称这个自然数 n 为“纯数”。

例如:32 是“纯数”,因为 $32 + 33 + 34$ 在列竖式计算时各位都不产生进位现象;23 不是“纯数”,因为 $23 + 24 + 25$ 在列竖式计算时个位产生了进位。(10 分)

(1) 请直接写出 1949 到 2020 之间的“纯数”;(5 分)

(2) 求出不大于 100 的“纯数”的个数,并说明理由。(5 分)

一、1. A 【解析】设这个数为 x 。

$$\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}x = 2$$

$$\frac{1}{10}x = 2$$

$$x = 20$$

2. C 【解析】 $1 \div \frac{1}{3} \times 2 = 6$ (杯)

【点拨】等底等高的圆柱体积是圆锥体积的 3 倍。

3. B 【解析】宽： $40 \div 4 = 10$ (cm)，长： $10 \times 3 = 30$ (cm)，面积： $10 \times 30 = 300$ (cm²)

4. D 【解析】每取出一个球再变成 5 个一模一样的球再放入盒中，实际上球的数量增加了 4 个。

$$a_n = 5 + 4n (n \text{ 为整数})$$

选项只有 $2021 = 5 + 4n, n = 504$ 为整数，故选 D。

【点拨】实际每次增加 4 个球，找通项公式。

二、5. 5 【解析】设 $3 \star \star = x$

$$2 \star x = 52$$

$$2 \times (2 + x) = 52$$

$$2 + x = 26$$

$$x = 24$$

$$3 \star \star = 24$$

$$3 \times (3 + \star) = 24$$

$$3 + \star = 8$$

$$\star = 5$$

6. 争

7. 100 【解析】设进价为 x 元。

$$(1 + 50\%)x \cdot (1 - 20\%) = 20 + x$$

$$1.2x = 20 + x$$

$$x = 100$$

【点拨】 $(1 + \text{利润率}) \times \text{成本} \times \text{折扣} = \text{售价}$ 。

8. 30 【解析】 $10 \div 2 \times 6 = 30$ (cm²)

【点拨】切后表面积增加的是原来正方体的两个面的面积。

9. $\frac{8}{3}\pi$ 【解析】因为 $\angle A = 30^\circ, \angle B = 90^\circ$ ，所以 $\angle C = 60^\circ$

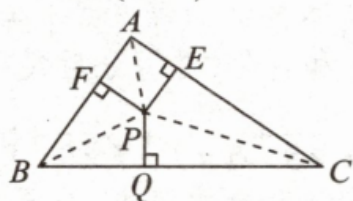
旋转角度： $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$\frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{1}{3} \times 2 \times 4 \times \pi = \frac{8}{3}\pi \text{ (cm)}$$

【点拨】根据三角形内角和求出 $\angle ACB = 60^\circ$ ，然后求出旋转角 $\angle ACA'$ 。

10. 45 【解析】 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle APC} + S_{\triangle BPC}$
$$= \frac{1}{2} (AB \cdot FP + AC \cdot PE + BC \cdot PQ)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \times 3 \times (AB + AC + BC) \\
 &= \frac{1}{2} \times 3 \times 30 \\
 &= 45 (\text{cm}^2)
 \end{aligned}$$



第 10 题图

【点拨】作辅助线,构建成 3 个三角形。

11. 380 【解析】 $(78 - 18) \div \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 90$ (页)

$$(90 + 15) \div \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 140 \text{ (页)}$$

$$(140 + 12) \div \left(1 - \frac{3}{5}\right) = 380 \text{ (页)}$$

【点拨】还原问题,从最后一个条件倒推。

【考点 39】还原法解题

一个数经过若干次变化,成了另一种结果,我们从结果出发根据每一次变化情况,一步步地倒着想,把结果还原成开始状态,这类问题叫作还原问题,又叫作逆运算问题。

对于简单的还原问题,可直接列式,一步步倒着推算;对于变化较复杂的还原问题,可借助列表和画图来帮助解决问题。

还原法解题是从最后的结果出发,运用加和减、乘和除之间的互逆关系,从后往前一步一步地推算,直到找到最初的数据。

12. 80° 【解析】如题图,连接 BC 。

因为 BE 是 $\angle ABD$ 的平分线, CF 是 $\angle ACD$ 的平分线,

$$\text{所以 } \angle ABE = \angle DBE = \frac{1}{2} \angle ABD,$$

$$\angle ACF = \angle DCF = \frac{1}{2} \angle ACD,$$

$$\text{因为 } \angle BDC = 140^\circ, \angle BGC = 110^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle DBC + \angle DCB = 180^\circ - \angle BDC = 40^\circ,$$

$$\angle GBC + \angle GCB = 180^\circ - \angle BGC = 70^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle EBD + \angle FCD = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle ABE + \angle ACF = 30^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle ABE + \angle ACF + \angle GBC + \angle GCB = 70^\circ + 30^\circ = 100^\circ,$$

$$\text{即 } \angle ABC + \angle ACB = 100^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle A = 80^\circ.$$

$$\begin{aligned}
 \text{三、13. (1)} \quad & \frac{13}{15} \div \left[\frac{9}{10} - \left(\frac{1}{20} + 20\% \right) \right] \\
 &= \frac{13}{15} \div (0.9 - 0.05 - 0.2) \\
 &= \frac{13}{15} \div \frac{65}{100} \\
 &= \frac{13}{15} \times \frac{20}{13} \\
 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{7}{6} + \frac{13}{12} + \frac{21}{20} + \frac{31}{30} + \frac{43}{42} + \frac{57}{56} + \frac{73}{72} + \frac{91}{90} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{6} \right) + \left(1 + \frac{1}{12} \right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{90} \right) \\
 &= 8 + \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10} \right) \\
 &= 8 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) \\
 &= 8 \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

【考点3】借一还一

(1) 可用于简便运算中,分子不同(分子比分母少或分子比分母多),分母可分解成两个连续数相乘。先借1作差或借1作和转化,再拆分后裂项相消。例如:

$$\text{计算: } \frac{2^2}{1 \times 3} + \frac{4^2}{3 \times 5} + \frac{6^2}{5 \times 7} + \frac{8^2}{7 \times 9} + \frac{10^2}{9 \times 11}$$

此题分子是连续偶数的平方,分母为连续奇数且两两相乘,口算发现,每个加数的分子都比分母大1,先将每个加数变成1与真分数之和,即借1作和的转化,再裂项巧算。

(2) 用于实际应用题中

例如:某酒厂为了回收酒瓶,规定了3只空瓶换一瓶酒,有一个人买了10瓶酒,喝完以后,又用空酒瓶换酒。问这个一共可以换多少瓶酒?

有人会这样解答:10个空酒瓶中的9个酒瓶换回3瓶酒,3瓶酒喝完后又可用3只空酒瓶换回一瓶酒,把这瓶酒喝完,手里还剩2只空瓶,再也不能换酒。其实这个回答是不完美的:最后2只空酒瓶向人借1个空酒瓶,就是3个空酒瓶,就可以再换一瓶酒,把这瓶酒喝完。再把空瓶子还给人。

$$(3) \quad 2\left(x - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{5}x + 2$$

$$\text{解:} \quad 2x - \frac{4}{3} = \frac{3}{5}x + 2$$

$$2x - \frac{3}{5}x = \frac{4}{3} + 2$$

$$\frac{7}{5}x = \frac{10}{3}$$

$$x = \frac{50}{21}$$

14. 【解析】 $(4+1) \times (6+1) = 35$, 当大正方形边长为 35 cm 时, 小长方形长和宽分别为 7 cm, 5 cm。

都不能被 3 整除, 不符合题意。

当大正方形边长为 $35 \times 3 = 105$ (cm) 时,

小长方形宽: $105 \div (6+1) = 15$ (cm), 小长方形长: $105 \div (4+1) = 21$ (cm)。

15, 21 都可以被 3 整除, 所以符合题意。

$$15 \times 21 = 315 (\text{cm}^2)$$

15. 【解析】师傅计划加工: $1600 \div (1+25\%) = 1280$ (个)

$$\text{徒弟计划加工: } 1280 \times \frac{5}{8} = 800 \text{ (个)}$$

$$\text{徒弟实际加工: } 800 \times 60\% = 480 \text{ (个)}$$

16. 【解析】 $45 \div 5 = 9$, 把全程平均分成 6 份, 汽车把甲班送到 $\frac{5}{6}$ 处返回。

遇到乙班, 把乙班送到, 在汽车行驶期间, 乙、甲两个班的学生步行。

$$24 \div 6 = 4 (\text{km}), 4 \times 14 \div 45 = \frac{56}{45} (\text{h})$$

17. 【解析】 $r = 10 \div 2 = 5$ (cm)

$$V_{\text{石块}} = (3.14 \times 5^2 \times 8 - 8 \times 6 \times 8) + 8 \times 6 \times (10 - 7) = 388 (\text{cm}^3)$$

【点拨】 $V_{\text{石块}} = \text{长方体流出的水的体积} + \text{长方体容器内升高水的体积}$, 流出水的体积 = 圆柱底面积 $\times 8 - \text{长方体底面积} \times 8$ 。

18. 【解析】设王叔叔一共在医院花了 x 元。

$$500 + (2000 - 500) \times (1 - 80\%) + (x - 2000) \times (1 - 75\%) = 3300$$

$$500 + 300 + 0.25x - 500 = 3300$$

$$0.25x = 3000$$

$$x = 12000$$

$$\text{补偿: } 12000 - 3300 = 8700 (\text{元})$$

19. (1) 2000, 2001, 2002, 2010, 2011, 2012, 2020。

【解析】显然 1949 ~ 1999 都不是“纯数”。

在 2000 至 2020 之间的数, 只有个位不超过 2 时, 才符合“纯数”定义。

(2) 13 个

0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 100

因为个位不超过 2, 十位不超过 3 时, 才符合“纯数”定义。【解析】因为数不大于 100, 当 $n = 100$ 时,

$100 + 101 + 102$ 不产生进位, 所以 100 是“纯数”,

则剩余的为两位数或一位数, 假设“纯数” n 与 $n + 1$ 或 $n + 2$ 的十位上的数不相同, 则在相加时个位一定产生进位, 所以“纯数” n 与 $n + 1$ 或 $n + 2$ 的十位的数相同,

则设“纯数” n 的十位上的数为 a , 个位上的数为 b , ($a \geq 0, b \geq 0$, 且均为整数) 则 $n = a \times 10 + b = 10a + b$, 所以

$$n + 1 = a \times 10 + b + 1 = 10a + b + 1,$$

$$n + 2 = a \times 10 + b + 2 = 10a + b + 2,$$

又因为进行 $n + (n + 1) + (n + 2)$ 的竖式运算时各位都不产生进位现象,

所以 $a + a + a < 10, b + (b + 1) + (b + 2) < 10$,

$$\text{解得 } a < \frac{10}{3}, b < \frac{7}{3},$$

又因为 $a \geq 0, b \geq 0$, 且均为整数,

所以 a 可取 0、1、2、3, b 可取 0、1、2,

所以不大于 100 的“纯数”的个数为 $4 \times 3 + 1 = 13$ 。